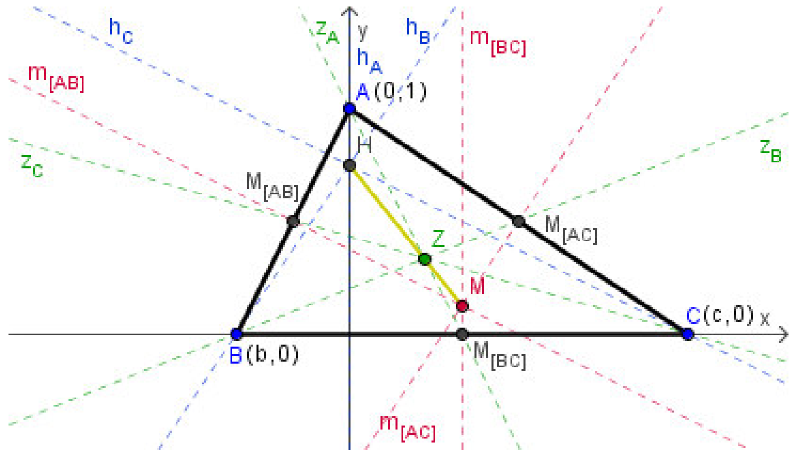
De stelling van Euler

Stelling:

1. De drie zwaartelijnen in een driehoek zijn concurrent.
2. De drie hoogtelijnen in een driehoek zijn concurrent.
3. De drie middelloodlijnen in een driehoek zijn concurrent.
4. De drie snijpunten (*zwaartepunt*, *hoogtepunt* en *orthocenter*) zijn collineair.
5. De afstand van hoogtepunt tot zwaartepunt is tweemaal de afstand van zwaartepunt tot orthocenter.



Analytisch Bewijs:

Ik geef telkens de uitkomsten, jullie zouden deze zelf moeten kunnen narekenen.

Noem de driehoek ΔABC en kies het assenstelsel zó dat $A(0,1)$, $B(b,0)$ en $C(c,0)$.

1. De drie zwaartelijnen z_A, z_B en z_C gaan door het zwaartepunt Z.

De middens van de zijden zijn $M_{[AB]}\left(\frac{b}{2},\frac{1}{2}\right)$, $M_{[AC]}\left(\frac{c}{2},\frac{1}{2}\right)$ en $M_{[BC]}\left(\frac{b+c}{2},0\right)$.

De vergelijkingen van de zwaartelijnen:

$z_A \leftrightarrow y=\frac{-2}{b+c}x+1$; $\quad z_B \leftrightarrow y=\frac{1}{2b-c}(x-b)$; $\quad z_C \leftrightarrow y=\frac{1}{2c-b}(x-c)$

Deze rechten snijden elkaar in het zwaartepunt $Z\left(\frac{b+c}{3},\frac{1}{3}\right)$.

2. De drie hoogtelijnen h_A, h_B en h_C gaan door het hoogtepunt H.

De rico's van de zijden zijn $m_{AB}=-\frac{1}{b}$, $m_{AC}=-\frac{1}{c}$ en $m_{BC}=0$.

De vergelijkingen van de hoogtelijnen:

$h_A \leftrightarrow x=0$; $\quad h_B \leftrightarrow y=c(x-b)$; $\quad h_C \leftrightarrow y=b(x-c)$

Deze rechten snijden elkaar in het hoogtepunt $H(0,-bc)$.

3. ***De drie middelloodlijnen*** $m_{[AB]}, m_{[AC]}$ ***en*** $m_{[BC]}$ ***gaan door het orthocenter*** M ***.***

De vergelijkingen van de middelloodlijnen:

$$m_{[AB]} \leftrightarrow y = b\left(x - \frac{b}{2}\right) + \frac{1}{2} \ ; \qquad m_{[AC]} \leftrightarrow y = c\left(x - \frac{c}{2}\right) + \frac{1}{2} \ ; \qquad m_{[BC]} \leftrightarrow x = \frac{b+c}{2}$$

Deze rechten snijden elkaar in het orthocenter $M\left(\frac{b+c}{2}, \frac{bc+1}{2}\right)$.

4. ***zwaartepunt*** Z ***, hoogtepunt*** H ***en orthocenter*** M ***zijn collineair.***

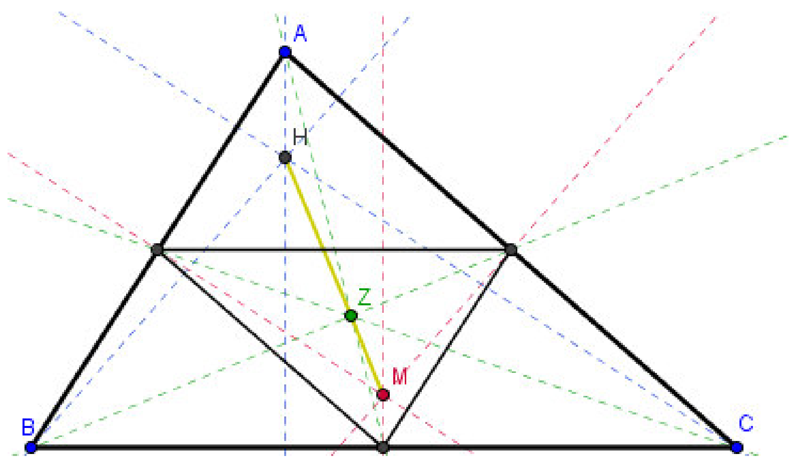
De vergelijking van de rechte is $ZM \leftrightarrow y = \frac{3bc-1}{b+c}x - bc$ en uiteraard ligt H hierop.

5. ***Voor de afstanden geldt:*** $|ZH| = 2.|MZ|$

$$\left.\begin{array}{l} |MZ| = \frac{1}{6}\sqrt{b^2 + c^2 + 9b^2c^2 + 8bc + 1} \\ |ZH| = \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + c^2 + 9b^2c^2 + 8bc + 1} \end{array}\right\} \Rightarrow |ZH| = 2.|MZ|$$

□

Meetkundig bewijs:



Beschouw de homothetie met centrum Z en factor $-\frac{1}{2}$. Dan zijn volgende zaken duidelijk:

- Het beeld van driehoek ΔABC is de mediale driehoek $\Delta A'B'C'$.
- De hoogtelijnen van driehoek ΔABC worden afgebeeld op de middelloodlijnen van ΔABC die tevens de hoogtelijnen zijn van de mediale driehoek $\Delta A'B'C'$.

Het beeld van H onder die homothetie is dus M, dus de punten H, Z en M zijn collineair en er geldt $|ZH| = 2.|MZ|$. □