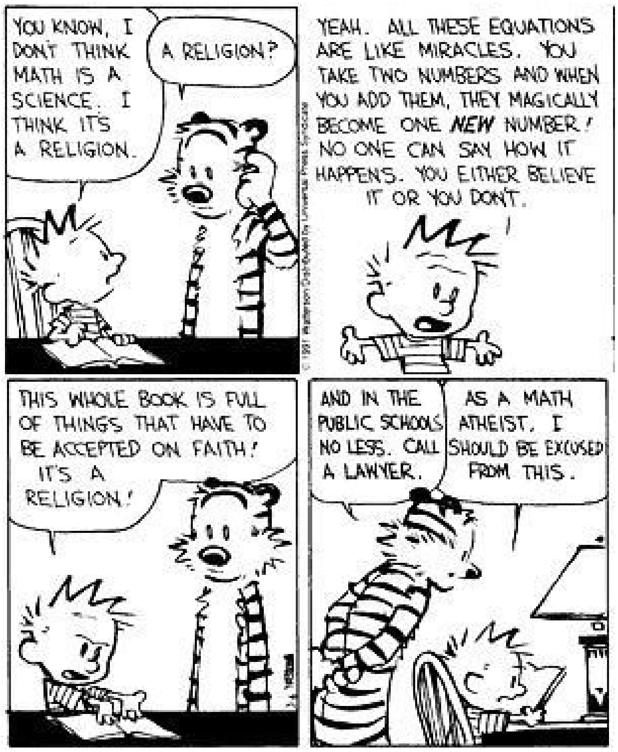
ÓSCAR ROMERO COLLEGE

samen bouwen aan je toekomst

Cursus wiskunde

oefeningen

4 LB 1 – 4 LB 2

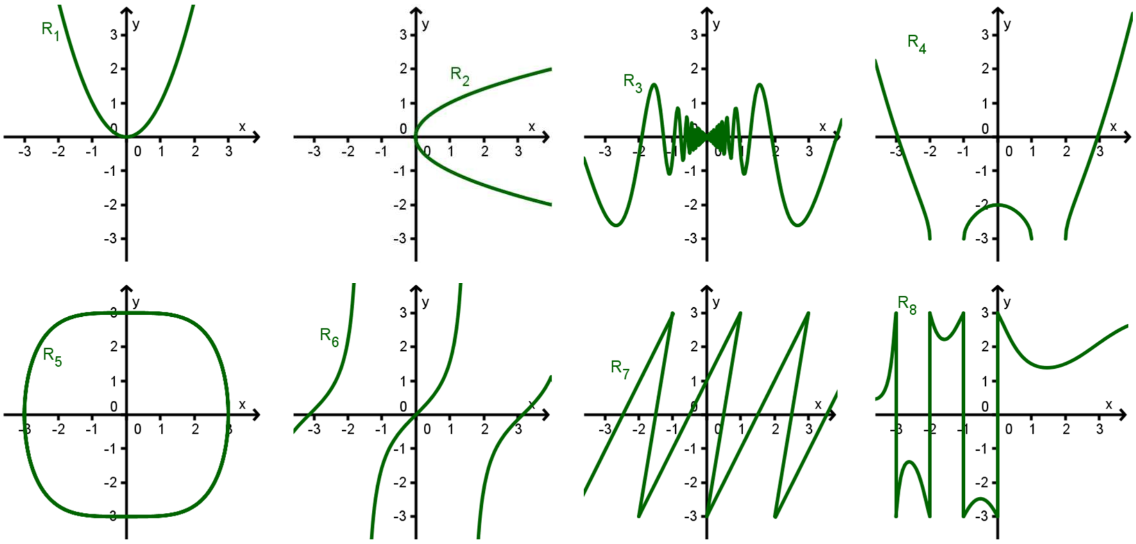


Inhoudstafel – Jaarplanning

1) Tweedegraadsfuncties

Inleiding (parate kennis)

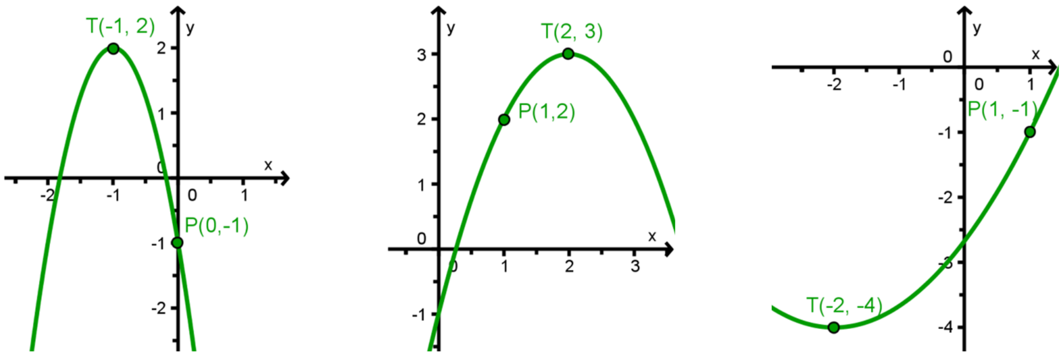
1. Welke van de onderstaande grafieken van reële relaties zijn een functie?



2. Teken de rechten $a \leftrightarrow x-3y+6=0$ en $b \leftrightarrow y=-2x+2$ in eenzelfde assenstelsel.
    a. Toon aan dat de rechten elkaar snijden op de y-as. Noem dit snijpunt S.
    b. Bepaal de coördinaten van de snijpunten A en B van de gegeven rechten met de x-as.
    c. Bereken de oppervlakte van driehoek ΔBAS.
3. De rechte $r \leftrightarrow 5x+2y-26=0$ snijdt de rechten $y=3$ en $y=-2$ respectievelijk in A en B.
    De rechte $s \leftrightarrow x=-1$ snijdt deze zelfde twee rechten respectievelijk in C en D.
    Maak een duidelijke figuur en bepaal de oppervlakte van de vierhoek $ABDC$.

Tweedegraadsfuncties: definities en grafieken

4. Maak een duidelijke schets van de grafiek $y=4(x+3)^2-1$ in een goed gekozen assenstelsel.
5. Teken de grafiek van deze functies:
    a. $f(x)=x^2+6x+11$ b. $f(x)=3x-4-\dfrac{3}{2}x^2$ c. $f(x)=\left|x^2+4x+3\right|$
6. Geef een volledige bespreking (domein, beeld, stijgen & dalen, tekenverloop) van deze functies:
    a. $y=-2x^2+8x-9$ b. $y=4x^2-9$
7. Stel de vergelijking op (in standaardvorm) van de parabolen die je op de figuur getekend ziet:



Tweedegraadsvergelijkingen

8. Los de volgende vergelijkingen zo eenvoudig mogelijk op:

a. $2x^2-9x=0$ b. $3x^2-12x+12=0$ c. $4x^2+81=0$

d. $(x+2)(2x-1)=3x$ e. $9x^2-1{,}44=0$ f. $2(2x-5)^2-18=0$

9. Los de volgende vergelijkingen op met behulp van de discriminantformule:

a. $2x^2+7x-9=0$ b. $6x^2+x+1=0$ c. $2x+5x^2+2=0$

d. $25x^2-20x+4=0$ e. $x^2+1=6x$

10. Los de volgende vergelijkingen op:

a. $(x+3)(5x-1)-(2x+3)^2+13=0$ b. $\dfrac{x+3}{5}-\dfrac{3x-8}{2}=2(x-1)^2$

c. $(2x-1)(2x+1)-(x-1)(1-3x)=3x(4-3x)$ d. $\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{x+1}{8}-\dfrac{x^2+1}{5}=-x$

11. Los de volgende vergelijkingen op:

a. $2x-\dfrac{1}{x}+1=0$ b. $\dfrac{2x+1}{3x+1}=\dfrac{4x+1}{5x+1}$

c. $\dfrac{x+3}{x}-1=\dfrac{x}{x^2+2x}$ d. $\dfrac{2x}{x-3}-\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{7x+1}{x^2-9}$

e. $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{4}{x+5}-\dfrac{7}{x+8}=0$ f. $\left|2x^2-5x-5\right|=2$

g. $\left|x^2+3x-10\right|+\left|4-x^2\right|=0$ h. $\left|x^2-6\right|=x$

12. Los de volgende vergelijkingen op ($k,m\in\mathbb{R}$ zijn parameters):

a. $x^2+5kx+6k^2=0$ b. $x^2-(2k+1)x+4k-2=0$

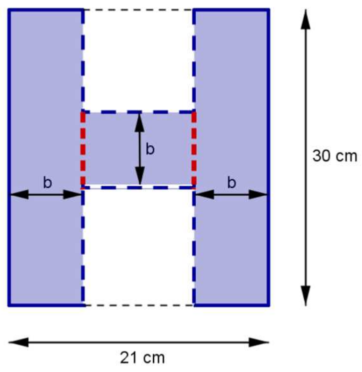
c. $x^2+(k-m)x-2k^2-2km=0$ d. $x^2-(k+m)x+5km=2\left(k^2+m^2\right)$

13. Als je weet dat $c>a>0$, en $a+b+c=0$, wat is dan de kleinste wortel van $ax^2+bx+c=0$?
14. Het verschil van de twee oplossingen van de vierkantsvergelijking $x^2+ax+b=0$ is 5. Wat is de discriminant van deze vierkantsvergelijking? *(VWO 2009)*

Toepassing: vraagstukken die aanleiding geven tot een vierkantsvergelijking

15. De som van de kwadraten van 2 opeenvolgende natuurlijke getallen is 1985. Wat zijn die getallen?
16. Een rechthoek heeft een oppervlakte van 18 cm² en een omtrek van 18 cm. Bepaal zijn afmetingen.
17. Een voetbalveld is 56m langer dan het breed is. De diagonaal ervan meet 130m. Wat zijn de afmetingen van dit voetbalveld (rond af op 1 cm nauwkeurig)?
18. Om mijn living te betegelen heb ik 1080 vierkante tegels nodig. Neem ik echter tegels met een zijde die 5 cm langer is, dan heb ik er slechts 750 nodig. Hoe groot is mijn living?

19. Jean wil uit een A4-blad (21cm op 30cm) een letter H knippen, die overal even breed is (zie figuur). Hoe breed moet hij de letter maken opdat de letter H een totale oppervlakte van 324cm² zou innemen?
20. Ellen is 3 jaar ouder dan Julie. Als je hun leeftijden vermenigvuldigt vind je 928. Hoe oud zijn ze?
21. Kevin en Jakke lopen allebei 400m. Jakke loopt gemiddeld 1,6 m/s trager dan Kevin. Hij doet er dan ook 12,5s langer over. In welke tijd loopt Kevin zijn 400m?



Eigenschappen van de wortels

22. Los de volgende vergelijkingen op met behulp van som en product (dus zonder discriminant):

a. $x^2 - 5x - 14 = 0$ b. $x^2 + 12x + 20 = 0$

c. $-x^2 + 4x + 5 = 0$ d. $2x^2 - x - 1 = 0$

23. Bepaal twee getallen met als som 8 en als product 13.
24. Toon aan dat er geen getallen bestaan die als som 5 en als product 7 hebben.
25. Twee getallen hebben dezelfde som als de wortels van $x^2 + 6x + 1 = 0$ en hetzelfde product als de wortels van $x^2 + 8x + 7 = 0$. Wat is het grootste van die twee getallen? *(VWO 1996)*

(A) $-3+\sqrt{2}$ **(B)** -1 **(C)** $-4+\sqrt{15}$ **(D)** $3+\sqrt{2}$ **(E)** 7

26. De vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft twee wortels x_1 en x_2. Zij $\alpha x^2 + \beta x + 1 = 0$ de vergelijking met wortels x_1/x_2 en x_2/x_1, dan is β gelijk aan ... *(VWO 1999)*

(A) $2 - \frac{b^2}{ac}$ **(B)** $\frac{b^2}{ac} - 2$ **(C)** $2 - \frac{ab^2}{c}$ **(D)** $2 - \frac{b^2}{c}$ **(E)** $\frac{b^2}{c} - 2$

27. De som van alle oplossingen van $x^2 + |x| - 6 = 0$ is gelijk aan ... *(VWO 2007)*

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** -1 **(D)** -6 **(E)** 0

28. Stel $ac < 0$. Als je de grootste oplossing van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ deelt door de kleinste oplossing van de vergelijking $cx^2 + bx + a = 0$, dan verkrijg je ... *(VWO 2010)*

(A) $\frac{c}{a}$ **(B)** $\frac{a}{c}$ **(C)** 1 **(D)** $\frac{c}{b}$ **(E)** $\frac{a}{b}$

Ontbinden in factoren

29. Ontbind de volgende veeltermen in factoren:

a. $x^2 + x - 6$ b. $2x^2 + 7x - 9$

c. $6x^3 + x^2 - x$ d. $3x^3 - 5x^2 + 7x$

30. Ontbind $(a+b)^2 x^2 - (a+b)^2 x + ab$ in factoren (met $a + b \neq 0$).

31. Vereenvoudig de breuk in haar domein: $\frac{2x^3 - 2x}{3x^2 + 5x + 2}$.

Via substitutie vergelijkingen herleiden tot een vierkantsvergelijking

32. Los de volgende vergelijkingen op met behulp van een passende substitutie:

a. $4x^4 - 13x^2 + 9 = 0$

b. $8x^6 + 7x^3 = 1$

c. $x^8 = 19x^4 - 48$

d. $x^5 - x^3 - 20x = 0$

e. $\left(x^2 + 5x\right)^2 - 2\left(x^2 + 5x\right) = 24$

f. $-3x^2\left(x+1\right)^2 - 7\left(x+1\right)x + 10 = 0$

g. $\dfrac{5}{12x^2 - 7x} + \dfrac{3}{12x^2 - 7x + 1} = \dfrac{6}{12x^2 - 7x - 1}$

h. $30x^4 - 13x^3 - 230x^2 - 13x + 30 = 0$ (hint: deel alles door x^2 en stel $t = x + \dfrac{1}{x}$)

33. Wat is het product van alle oplossingen van $\left|x-1\right|^2 - 2\left|x-1\right| - 8 = 0$? *(VWO 2006)*

Ongelijkheden

34. Stel het tekenverloop op van deze functies:

a. $f\left(x\right) = x^2 - 4x + 1$

b. $f\left(x\right) = \dfrac{4}{3} - x^2 - x$

c. $f\left(x\right) = 17x^2 + 3 + x$

d. $f\left(x\right) = 9x^2 - 6x + 1$

e. $f\left(x\right) = 3 - 8x$

f. $f\left(x\right) = 7x + 9$

35. Los de volgende ongelijkheden op:

a. $x^2 - x \le 6$

b. $3x^2 + x > 10 - 10x - 3x^2$

c. $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x^2 - 4}{5} < 10 - x^2$

d. $x^4 - 16 < 0$

36. Los de volgende ongelijkheden op:

a. $\left(x-3\right)\left(12x - x^2 - x^3\right) \le 0$

b. $\left(2x+5\right)\left(7-3x\right)\left(5 + 7x + 2x^2\right) \ge 0$

c. $\dfrac{x^3 - 4x}{2x - 3 + x^2} \ge 0$

d. $\dfrac{3x-2}{2-x} \le \dfrac{x}{x+3}$

e. $\dfrac{x^2 - 5x - 13}{8 - x} \ge 1$

f. $\dfrac{\left|2x^2 - 3x - 2\right|}{x+1} > 0$

37. Los de volgende stelsels ongelijkheden op:

a. $\begin{cases} 2x - x^2 \ge 0 \\ 3x - 3 \ne 0 \\ 4x^2 - 8x + 3 \le 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x < 7 \\ 8 > 4x \\ x^2 \le 2x + 1 \end{cases}$

c. $-2 < x^2 - 3x \le 3 - x$

d. $\left|8x^2 + 32x - 29\right| < 11$

Ligging van de wortels

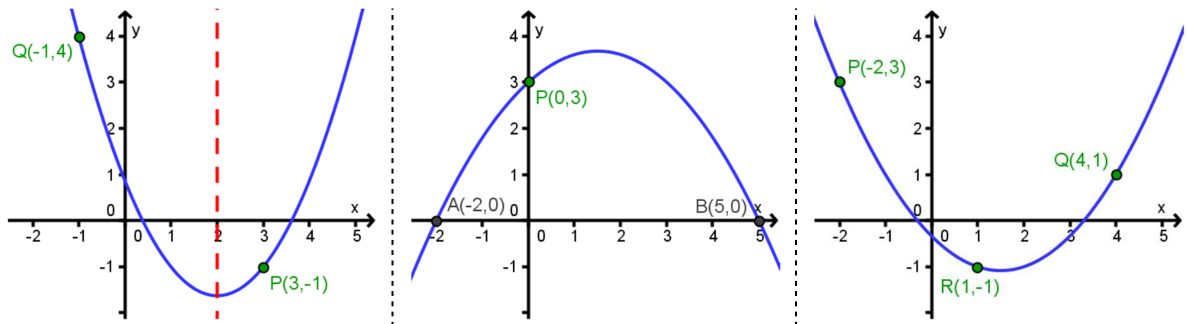
38. Bewijs dat als in een vierkantsvergelijking $ax^2+bx+c=0$ geldt dat a en c een verschillend teken hebben, ze dan zeker twee verschillende wortels heeft.

39. Bepaal de parameter $m \in \mathbb{R}$ zodat de linkse vergelijking aan de rechtse voorwaarde voldoet:

a.	$3mx^2+(m+1)x-7=0$	2 is een wortel
b.	$mx^2+(1-4m)x-\sqrt{5}=0$	De som van de wortels is 3
c.	$x^2+mx=m-1$	Er is slechts één wortel (of twee samenvallende)
d.	$(m-1)x^2+3mx+4m+1=0$	Er zijn geen wortels
e.	$mx^2+9x+4m=0$	Er zijn twee verschillende wortels
f.	$x^2+mx+2m+5=0$	Er zijn twee wortels met hetzelfde teken
g.	$x^2-mx+3m=5$	Er zijn twee wortels met een verschillend teken en de negatieve is in absolute waarde groter.

Opstellen van de vergelijking van een parabool

40. Stel de vergelijkingen op van de parabolen die je getekend ziet. Gebruik hierbij enkel de gegevens die je expliciet ziet aangeduid op de grafiek.



41. Gegeven is de parabool $p \leftrightarrow y=3x^2+12x+8$.
    a. Stel de vergelijking op van p_1: het spiegelbeeld van p om de rechte $s_1 \leftrightarrow y=-1$.
    b. Stel de vergelijking op van p_2: het spiegelbeeld van p om de rechte $s_2 \leftrightarrow x=3$.

Onderlinge ligging van rechten en parabolen

42. Bepaal de eventuele snijpunten van de rechten rechts met de parabolen links.

a.	$p \leftrightarrow y=x^2-4x+7$	$r \leftrightarrow y=4x-5$
b.	$p \leftrightarrow y=x^2+2x-1$	$r \leftrightarrow y=-2x-5$
c.	$p \leftrightarrow y=3x^2-1$	$r \leftrightarrow x+3y+6=0$

43. Bepaal de eventuele snijpunten van de parabolen links met de parabolen rechts.

a. $p \leftrightarrow y = x^2 - 4x + 7$ $\quad$ $p \leftrightarrow y = 2x^2 - 3x + 5$

b. $p \leftrightarrow y = x^2 + 2x - 1$ $\quad$ $p \leftrightarrow y = -3x^2 - 2x - 5$

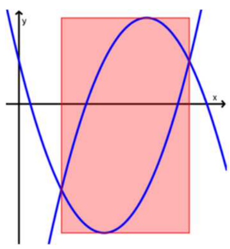
c. $p \leftrightarrow y = 3x^2 - 6$ $\quad$ $p \leftrightarrow y = x^2 - 4x - 8$

44. Het punt $P(2,3)$ ligt op de parabool $p \leftrightarrow y = 3 + 2x - x^2$. Stel de vergelijking op van de raaklijn in dit punt aan deze parabool.

45. Het punt $P(1,-4)$ ligt buiten de parabool $p \leftrightarrow y = x^2 - 3x + 2$. Stel de vergelijking op van de raaklijnen uit dit punt aan de parabool.

46. De rechte $r \leftrightarrow 2x + y - 4 = 0$ snijdt de parabool $p \leftrightarrow y = 2x^2 - 4x$. Stel de vergelijking op van de rechte die evenwijdig is aan r en de parabool p raakt.

47. De parabolen $p_1 \leftrightarrow y = x^2 - 4x + 1$ en $p_2 \leftrightarrow y = -x^2 + 6x - 7$ omvatten een gebied (zie figuur). Bepaal de oppervlakte van de kleinst mogelijke rechthoek met zijden evenwijdig aan de coördinaatassen die dat gebied omvat.



48. De parabool $p_1 \leftrightarrow y = ax^2 + bx + c$ ligt helemaal boven de rechte $r_1 \leftrightarrow y = cx$. Bewijs dat de parabool met vergelijking $p_2 \leftrightarrow y = cx^2 - bx + a$ helemaal boven de rechte $r_2 \leftrightarrow y = cx - b$ ligt. *(finalevraag VWO 2011)*

Extremumproblemen

49. Van een getal trekken we zijn kwadraat af. Hoe groot kan dit verschil maximaal zijn?

50. In 1996 breekt Jan Železný het wereldrecord speerwerpen. De hoogte van de speer kan beschreven worden door $h(x) = -0{,}009x^2 + 0{,}861x + 2{,}5$.

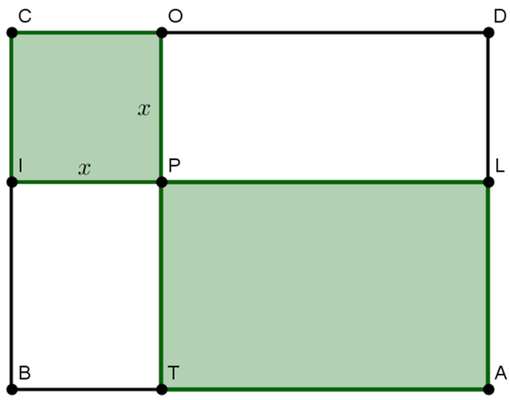
Hierbij is h de hoogte van de speer in meter en x de horizontale afstand die de spreer aflegde.

a. Wat is de maximale hoogte die de speer bereikte tijdens haar vlucht?

b. Wat is het wereldrecord speerwerpen (op 1 cm nauwkeurig)?

51. Jean-Michel verhuurt kajaks aan de oevers van de Lesse. Hij vraagt nu 12€ per kajak, en verhuurt zo gemiddeld 36 kajaks per dag. In het magazine 'Kajakkers United' leest hij dat per halve euro dat hij de prijs zou doen stijgen er 2 kajaks minder zouden verhuurd worden per dag. Voor welke prijs per kajak zou Jean-Michel zijn inkomsten maximaliseren?

52. Binnen een rechthoek $\square ABCD$, met $|AB| = 8$ en $|BC| = 6$ ligt een punt P op gelijke afstand x van $[BC]$ en $[CD]$. Vanuit P trek je loodlijnen op de zijden van de rechthoek, zoals op de figuur. Op die manier ontstaan een vierkant $\square PICO$ en een rechthoek $\square PLAT$. Wat is de minimale oppervlakte van deze twee vierhoeken samen?



2) <u>Goniometrie</u>

Hoofdwaarde

1. Wat is de hoofdwaarde van de volgende hoeken?

   a. $410°$ b. $-190°$ c. $7205°$

De goniometrische getallen

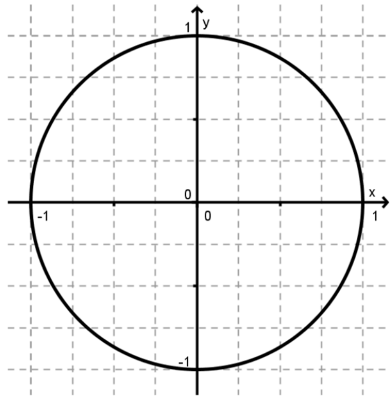
2. Duid de hoeken $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aan op de goniometrische cirkel, als je het volgende weet:

   a. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha \in IV$

   b. $\sin\beta = \frac{3}{4}$, β is stomp

   c. $\tan\gamma = \frac{7}{8}$, $\gamma \in I$

   d. $\csc\delta = -2$, $\delta \in III$

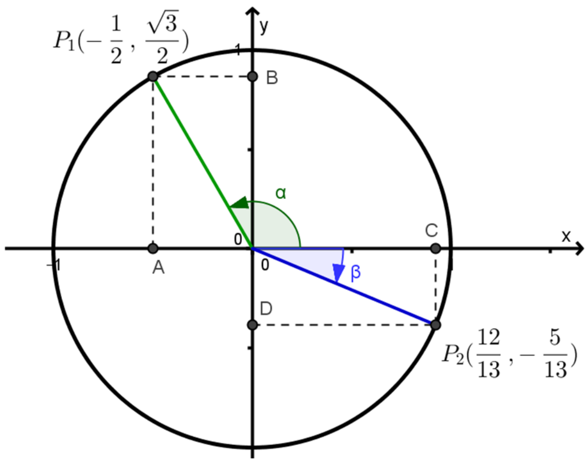


3. Bereken met je rekenmachine (rond af op 5 decimalen nauwkeurig):

   a. $\sin 36°41'55''$ b. $\sec 53°$ c. $\cot 15°$

4. Lees af van de hiernaast staande goniometrische cirkel:

   - $\cos\alpha$
   - $\sin 180°$
   - $|OP_1|$
   - $|OD|$
   - $\sin\beta$
   - $\tan\alpha$
   - $\csc\beta$
   - $\sin 90°$
   - $|OA|$
   - $|AC|$
   - $\cot\beta$
   - $\cos 180°$
   - $\sin\alpha$
   - $|AB|$



5. Bereken alle goniometrische getallen van de stompe hoek α waarvoor geldt dat $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

6. Bereken $\sec\beta$ als je weet dat $\cot\beta = \sqrt{3}$ en β een hoek is in het derde kwadrant.

7. Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen:

   a. $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{2\cos\alpha}$

   b. $\dfrac{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{2}$

   c. $\dfrac{1+\tan^2\alpha}{\sec^2\alpha} - \dfrac{\csc^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}$

   d. $(1-\cos\alpha)^2 + (1-\sin\alpha)^2 + 2(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)$

8. Bewijs de volgende goniometrische identiteiten:

a. $\dfrac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}=1-\sin\theta$

b. $\dfrac{\cos\alpha-\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha}=\cos\alpha$

c. $\sin^2\alpha-\cos^2\beta=\sin^2\beta-\cos^2\alpha$

d. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$

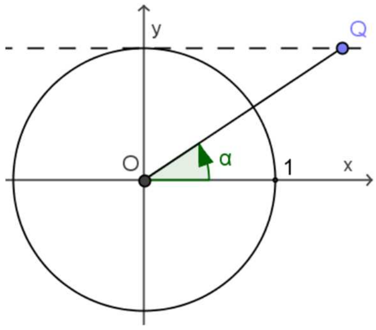
e. $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1-\cot^2\theta}=1-\sec^2\theta$

f. $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}=\tan\alpha.\tan\beta$

g. $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\dfrac{\cot\theta-1}{\cot\theta+1}$

h. $\tan\delta+\cot\delta=\sec\delta.\csc\delta$

9. Bereken de lengte van $|OQ|$ op de deze figuur (in functie van α):



Verwante hoeken

10. Bereken de volgende goniometrische getallen:

a. $\sin 120°$ b. $\cos 510°$ c. $\tan 315°$ d. $\cos 225°$

11. Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen:

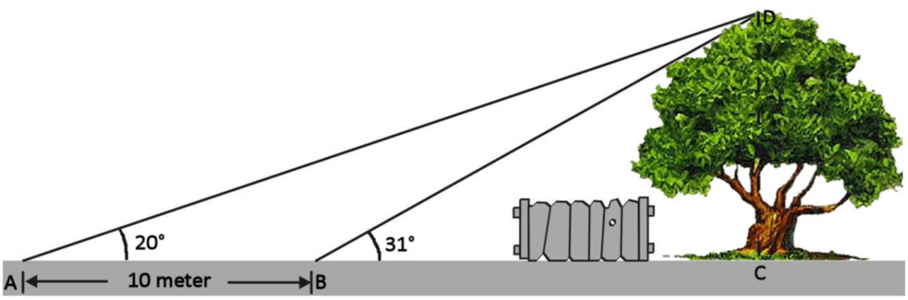
a. $\dfrac{\sin(180°-\alpha)}{\sin(180°+\alpha)}+\dfrac{\cos(180°+\alpha)}{\cos(180°-\alpha)}$

b. $\dfrac{\tan(450°-\alpha).\sin(540°+\alpha)}{\cos(\alpha-180°)}$

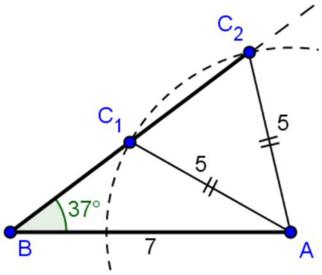
c. $\cos(360°-\alpha).\csc(90°-\alpha)-\sin(\alpha-360°).\cos(\alpha-90°)$

Willekeurige driehoeken

12. Een boom is onbereikbaar omdat hij achter een hek staat. Je kunt echter toch zijn hoogte berekenen. Daartoe meet je de hoek waaronder je de boom ziet op een bepaald punt. Je stapt dan 10m dichter en meet de hoek opnieuw. Je bekomt zo de hoeken 20° en 31°. Bereken hiermee de hoogte van de boom op 1 cm nauwkeurig.



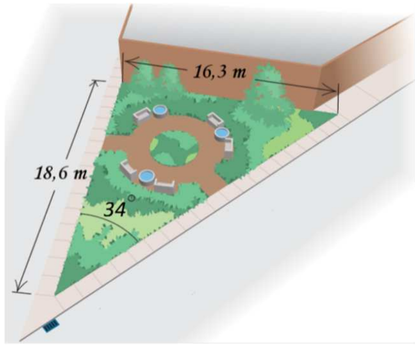
13. We weten al even dat ZZH geen congruentiekenmerk is. Je ziet dit geïllustreerd op de hiernaast staande figuur.
Stel dat je van een driehoek ΔABC gegeven hebt dat $|AB| = 7$, $|AC| = 5$ en $\widehat{B} = 37°$. Bereken de (twee) mogelijke lengtes van de derde zijde $|BC|$, tot op 0,0001 nauwkeurig.

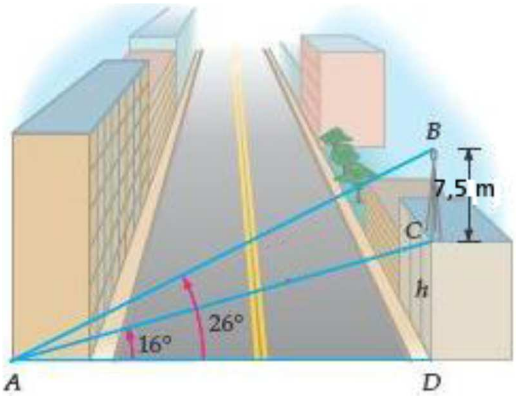


14. Bewijs dat in een parallellogram de som van de kwadraten van de zijden gelijk is aan de som van de kwadraten van de diagonalen.

15. Een parkje op de hoek van twee straten is aangelegd in de vorm van een stomphoekige driehoek waarvan de twee kortste zijden 18,6m en 16,3m meten. De hoek ten overstaande van de zijde die 16,3m meet, is 34° groot.
    a. Bereken de lengte van de grootste zijde.
    b. Bereken de oppervlakte van het parkje.

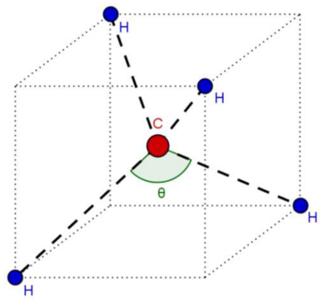
    (respectievelijk op 0,1m en 0,1m² nauwkeurig)



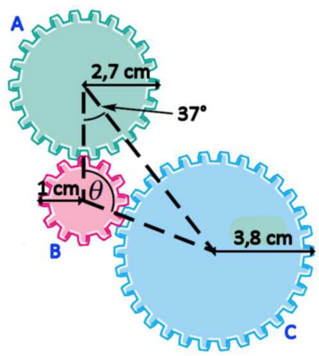


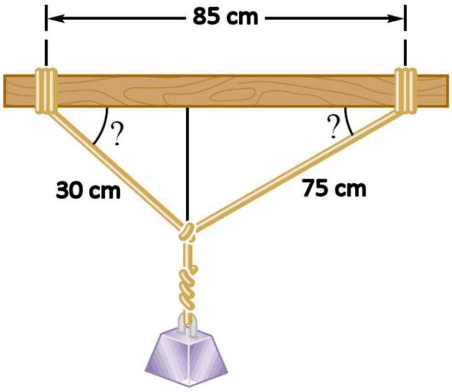
16. Op een gebouw staat een radio-antenne van 7,5m hoog.
Van aan de overkant van de straat zie je de voet van de antenne onder een hoek van 16°, en de top van de antenne onder een hoek van 26°.
Bereken de hoogte van het gebouw (op 1 mm nauwkeurig).

17. Vanuit de chemie ken je de molecule methaan (CH_4). Je kan je deze molecule ruimtelijk voorstellen door in het midden van een kubus het koolstofatoom te plaatsen en de 4 waterstofatomen zo op de hoekpunten te plaatsen dat geen 2 waterstofatomen op één ribbe liggen (zie figuur).
Bereken de valentiehoek θ van CH_4: de hoek die twee H-atomen maken met het C-atoom (tot op 1" nauwkeurig).



18. Een tandwielconfiguratie ziet eruit zoals op de figuur. Bereken de hoek θ op 1" nauwkeurig (de tandwielen hebben een straal van 2,7 cm; 1 cm en 3,8 cm).

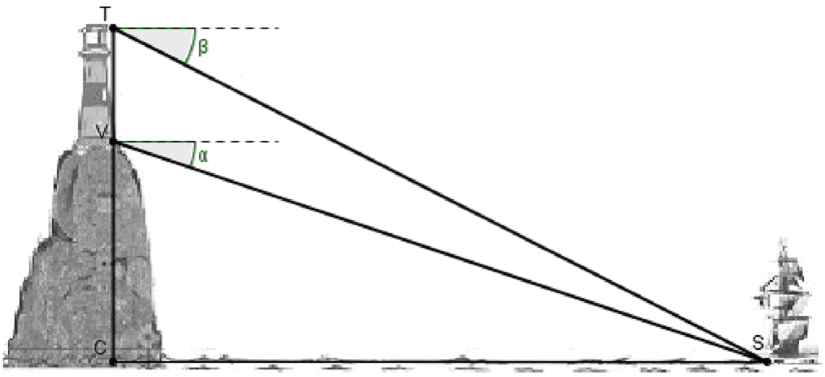




19. Een gewicht wordt omhoog gehangen zoals op de figuur hiernaast. Bereken de hoeken die de touwen maken met de balk waaraan ze werden vastgemaakt (tot op 1" nauwkeurig).

20. Een driehoek wordt perfect genoemd als het maatgetal van zijn omtrek gelijk is aan het maatgetal van zijn oppervlakte. Bewijs dat een driehoek met zijden 9, 10 en 17 perfect is.

21. Een vuurtoren van 50m hoog ($|VT| = 50$) staat boven op een rots. Van op de top T van de vuurtoren ziet de torenwachter een schip S onder een hoek $\beta = 28°40'$. Aan de voet van de toren ziet hij datzelfde schip onder een hoek $\alpha = 18°20'$.
Bepaal de hoogte van de rots $|CV|$ en de afstand van het schip tot het voetpunt C van de rots, beide tot op 1mm nauwkeurig.

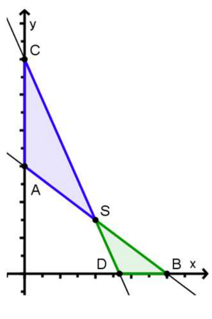


3) Analytische meetkunde

Herhaling basis analytische meetkunde

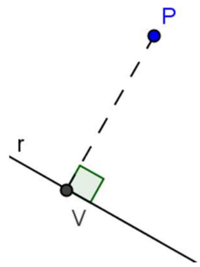
1. Beschouw de punten $A(-3,-3)$, $B(-2,1)$, $C(3,4)$ en $D(7,3)$.
   - Teken in een passend assenstelsel de vierhoek $\square ABCD$.
   - Bewijs dat $\square ABCD$ een gelijkbenig trapezium is.
   - Bepaal het snijpunt van zijn diagonalen.
   - Bereken de grootte van hoek $\widehat{D}$.

2. De rechten $r_1 \leftrightarrow 3x + 4y - 12 = 0$ en $r_2 \leftrightarrow y = -\dfrac{9}{4}x + 6$ snijden de y-as en de x-as in respectievelijk A en B, en C en D. Ze snijden elkaar in het punt S.
   - Bepaal de coördinaten van de punten A, B, C, D en S.
   - Bereken de oppervlakte van de driehoeken ΔACS en ΔBDS.



Loodrechte stand

3. Bepaal in de onderstaande gevallen de coördinaat van de loodrechte projectie van P op de rechte r.



   a. $P(5,4)$ en $r \leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

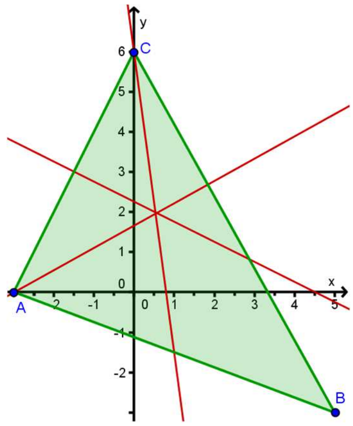
   b. $P(-1,2)$ en $r \leftrightarrow 3x-y+7=0$

   c. $P(1,-8)$ en $r \leftrightarrow x=-6$

4. Bepaal het hoogtepunt van de driehoek ΔABC, met $A(-2,1)$, $B(4,5)$, $C(5,-1)$.
5. De rechte $a \leftrightarrow y=2x+3$ snijdt de assen in de punten V en W. Stel de vergelijking op van de middelloodlijn van $[VW]$.
6. Gegeven zijn twee punten $A(-2,5)$ en $B(-3,-2)$. Bepaal de coördinaten van alle mogelijke punten C op de y-as zodat de driehoek ΔABC rechthoekig is.
7. Bepaal de coördinaten van de punten die even ver van $(1,-1)$ als van $(5,3)$ liggen en bovendien op een afstand 5 liggen van $M(3,1)$.
8. Hiernaast zie je ΔABC getekend, met $A(-3,0)$, $B(5,-3)$ en $C(0,6)$.

   Op de figuur lijkt het alsof de zwaartelijn uit C, de middelloodlijn van $[AC]$ en de hoogtelijn uit A concurrent zijn.

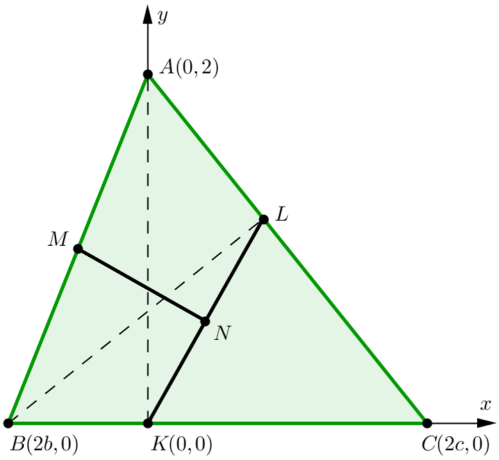
   Bewijs met een duidelijke berekening dat dit niet zo is.



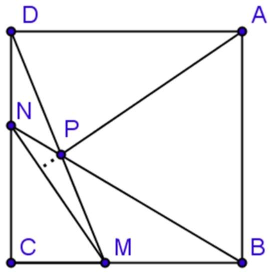
Analytisch bewijzen van meetkundige eigenschappen

9. Als je in een vierhoek de middens van opeenvolgende zijden verbindt verkrijg je een parallellogram. Bewijs dit analytisch.
10. In een vierkant $\square ABCD$ kies je op de zijden $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ en $[DA]$ respectievelijk de punten K, L, M en N zodat $|AK|=|BL|=|CM|=|DN|$. Bewijs analytisch dat $KM \perp LN$.
11. In een driehoek ΔABC zijn $[AK]$ en $[BL]$ twee hoogtelijnen. M is het midden van $[AB]$ en N is het midden van $[KL]$.

    Op de figuur hiernaast zie je al een handig assenstelsel gekozen. Bewijs analytisch dat $MN \perp KL$.

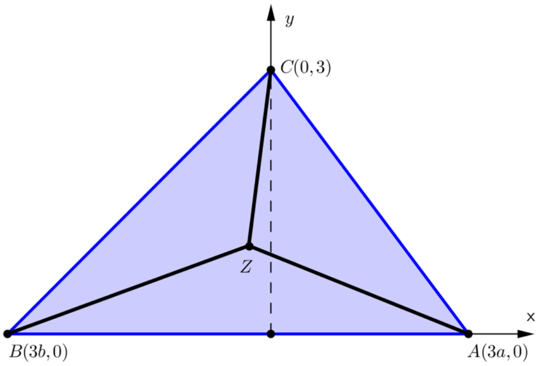


12. De punten M en N liggen respectievelijk op de zijden $[BC]$ en $[CD]$ van het vierkant $\square ABCD$ zodanig dat $|CM| = |DN|$. De lijnstukken $[DM]$ en $[BN]$ snijden elkaar in punt P. Bewijs dat $AP \perp MN$. *(Finalevraag junior wiskunde olympiade 2013)*

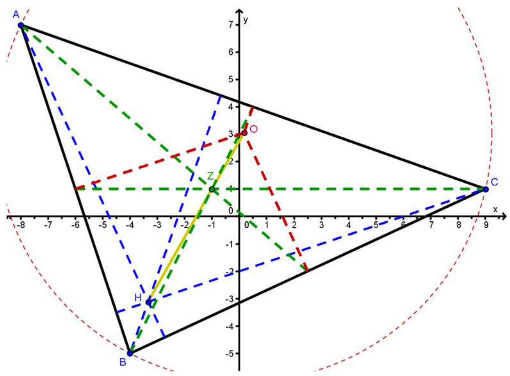


Afstand van een punt tot een rechte

13. Toon aan dat $P(-3,1)$ even ver ligt van $a \leftrightarrow x + 8y - 35 = 0$ als van $b \leftrightarrow 7x - 4y - 5 = 0$.
14. Bereken de oppervlakte van de driehoek ΔABC, met $A(5,2)$, $B(-1,-2)$ en $C(9,-1)$.
15. Bepaal de afstand tussen de evenwijdige rechten $a \leftrightarrow 4x - 2y + 1 = 0$ en $b \leftrightarrow 2x - y + 3 = 0$.
16. Stel de vergelijking op van de rechten die door punt $A(-6,1)$ gaan en die op een afstand $\sqrt{5}$ liggen van het punt $(1,2)$.
17. Bepaal de coördinaten van de punten die op $a \leftrightarrow 3x - 2y + 4 = 0$ liggen en die op een afstand 4 liggen van $b \leftrightarrow 5x - 12y - 2 = 0$.
18. Stel de vergelijking op van de bissectrices van de volgende rechtenparen:
    a. $a \leftrightarrow 3x - 4y + 1 = 0$ en $b \leftrightarrow x = 7$
    b. $a \leftrightarrow 14x - 12y + 1 = 0$ en $b \leftrightarrow 2x - 9y + 5 = 0$
19. In driehoek ΔABC, met $A(-2,-3)$, $B(-1,4)$ en $C(8,7)$, snijden de (binnen)bissectrice van $\widehat{A}$ en de hoogtelijn uit B elkaar in punt S. Toon aan dat ΔBCS oppervlakte 10 heeft.
20. Als je in een driehoek het zwaartepunt verbindt met de hoekpunten krijg je drie kleinere driehoeken met dezelfde oppervlakte.
    Bewijs deze stelling analytisch door te werken in het assenstelsel afgebeeld op de figuur.



21. Eentje voor de doorbijters: gegeven is de driehoek ΔABC met $A(-8,7)$, $B(-4,-5)$ en $C(9,1)$.
    Noem O het snijpunt van de middelloodlijnen, Z het zwaartepunt (snijpunt van de zwaartelijnen) en H het hoogtepunt (snijpunt van de hoogtelijnen).
    Bewijs de stelling van Euler:
    - H, O en Z zijn collineair.
    - $|HZ| = 2.|OZ|$.



Ter controle: $H\left(-\frac{10}{3}, -\frac{28}{9}\right)$, $O\left(\frac{1}{6}, \frac{55}{18}\right)$ en $Z(-1,1)$.

4) De cirkel

Basisbegrippen

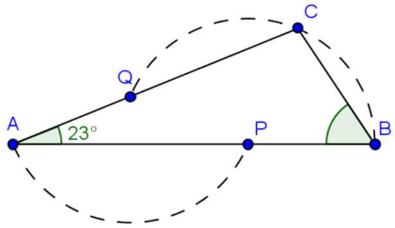
1. A, B, C en D zijn punten op een cirkel met middelpunt M.

   Bewijs dat $|AB| = |CD| \Leftrightarrow \widehat{AMB} = \widehat{CMD}$.

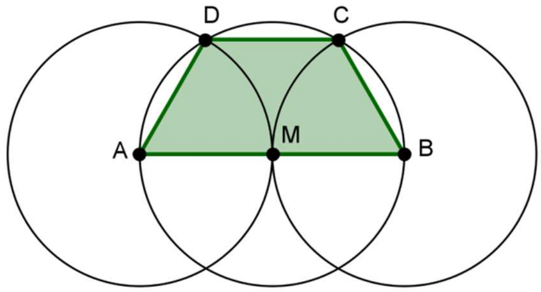
2. Op een cirkel met middelpunt M liggen drie punten A, B en C.

   Bewijs dat $|AB| = |AC| \Leftrightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MAC}$.

3. In een driehoek ΔABC geldt dat $\widehat{BAC} = 23°$. Verder is $P \in [AB]$ en $Q \in [AC]$ zodat Q het middelpunt is van de boog $\widehat{AP}$ en P het middelpunt is van de boog $\widehat{BQ}$, waar ook punt C op ligt. Hoe groot is de hoek $\widehat{ABC}$ dan?



4. Twee cirkels met straal 2 en middelpunten A en B raken elkaar in M. Een derde cirkel met middelpunt M en straal 2 snijdt de andere cirkels in C en D (zie figuur).
   Bereken de oppervlakte van de vierhoek $ABCD$.

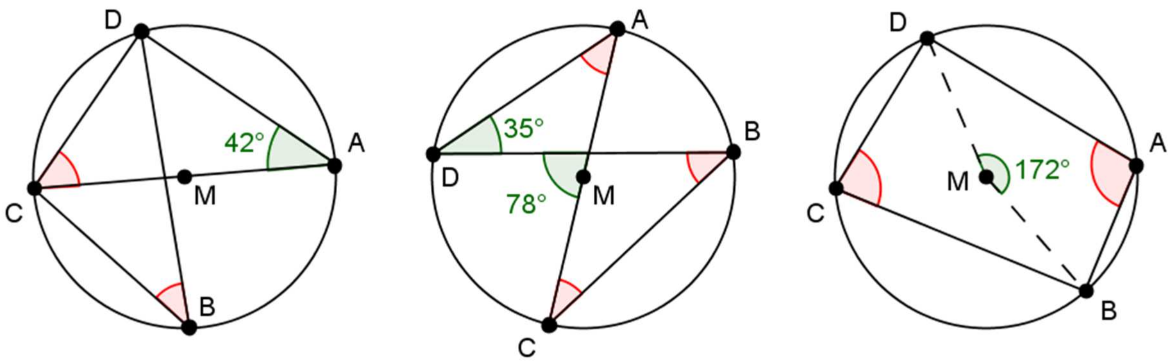


5. De diameter van een cirkel met middelpunt M is 22 cm. Een punt P verdeelt een koorde in stukken van 6 cm en 12 cm. Bepaal de afstand $|MP|$.

6. Een punt P ligt op afstand 9 van het middelpunt van een cirkel met straal 15. Hoeveel verschillende koorden van deze cirkel gaan door P en hebben een geheel getal als lengte.

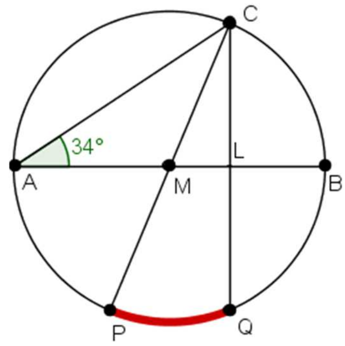
Middelpuntshoeken en omtrekshoeken

7. Bereken de aangeduide hoeken in de cirkels. De middelpunten zijn telkens aangeduid met M.



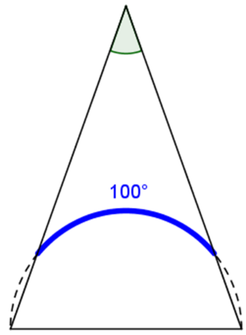
8. Een rechte door de top A van een gelijkbenige driehoek ΔABC snijdt de boog BC van de omgeschreven cirkel in een punt D. Bewijs dat AD de bissectrice is van hoek $\widehat{BDC}$.

9. $[AB]$ en $[CP]$ zijn middellijnen van een cirkel zodat $\widehat{BAC} = 34°$. Als nu Q een punt is van de cirkel zodat $CQ \perp AB$, hoe groot is dan de boog $\overset{\frown}{PQ}$?



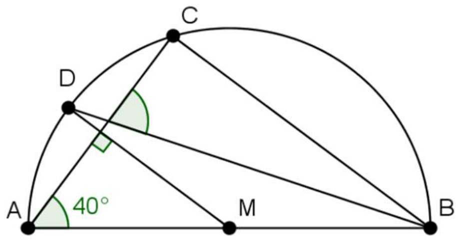
10. ΔABC is een gelijkzijdige driehoek. C' is het spiegelbeeld van punt C bij puntspiegeling om B. Welk soort driehoek is $\Delta ACC'$? Bewijs je antwoord!

11. Een lijnstuk is zowel de middellijn van een halve cirkel als de basis van een gelijkbenige driehoek. De benen van de driehoek snijden van de halve cirkel een boog van 100° af (zie figuur).
Hoe groot is de tophoek van deze driehoek?



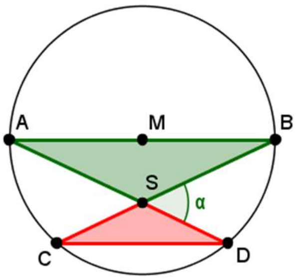
12. Twee cirkels snijden elkaar in twee punten A en B. De middellijnen door A snijden de cirkels in de punten C en D. Bewijs dat de punten B, C en D collineair zijn.

13. $[AB]$ is de middellijn van een cirkel met middelpunt M waarop nog twee punten C en D liggen zodat $MD \perp AC$. Als je weet dat $\widehat{BAC} = 40°$, bepaal dan de grootte van de aangeduide hoek tussen AC en BD.

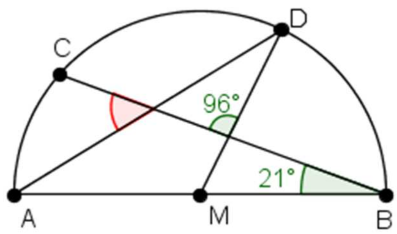


14. Een koorde $[CD]$ in een cirkel is evenwijdig met een middellijn $[AB]$. De koorden $[BC]$ en $[AD]$ snijden elkaar in het punt S onder een hoek $\widehat{DSB} = \alpha$.

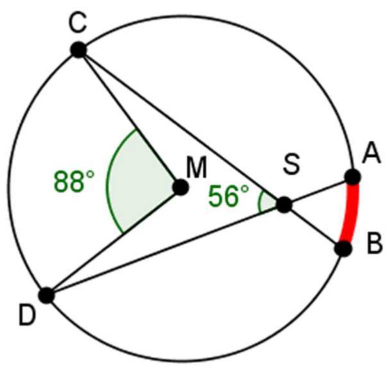
Bewijs dat geldt: $\dfrac{S_{\Delta CDS}}{S_{\Delta ABS}} = \cos^2 \alpha$.



15. Op een halve cirkel met middelpunt M en middellijn $[AB]$ liggen twee punten C en D zoals aangeduid op de figuur. Bereken met behulp van de aangeduide gegevens de grootte van de hoek tussen AD en BC.



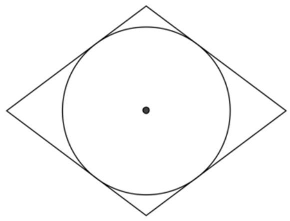
16. Twee koorden $[AD]$ en $[BC]$ van een cirkel met middelpunt M snijden elkaar in punt S. Als je weet dat $\widehat{CMD} = 88°$ en $\widehat{CSD} = 56°$, bereken dan de grootte van de boog $\overset{\frown}{AB}$.



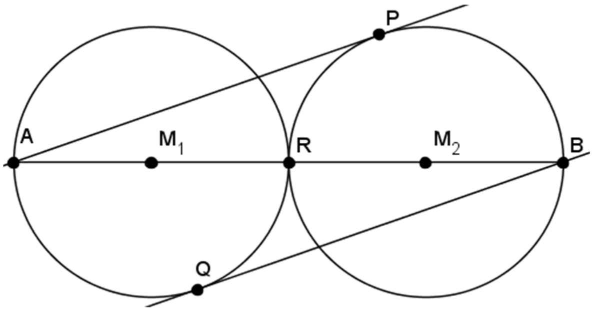
17. ΔABC is een scherphoekige driehoek met hoogtelijnen $[AD]$ en $[BE]$ die elkaar snijden in het hoogtepunt H. Bewijs dat $\widehat{CHD} = \widehat{CED}$.

Onderlinge ligging van cirkels en rechten

18. Wat is de straal van de cirkel die is ingeschreven in een ruit met diagonalen van 6 cm en 8 cm?



19. Twee cirkels met straal 1 raken elkaar in een punt R. Verder zijn $[AR]$ en $[BR]$ middellijnen van de cirkels. AP is een raaklijn aan de eerste cirkel, BQ is een raaklijn aan de tweede cirkel (zie figuur). Bepaal de afstand tussen deze twee evenwijdige raaklijnen AP en BQ.

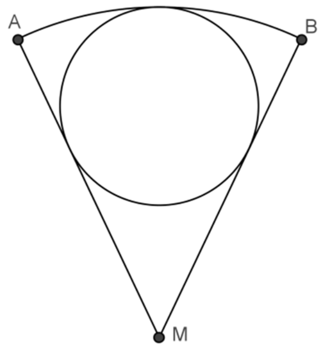


20. Twee cirkels raken elkaar uitwendig in een punt R. Een rechte r door R snijdt de ene cirkel in A en de andere cirkel in B. Bewijs dat de raaklijnen in A en B aan hun cirkel evenwijdig zijn.

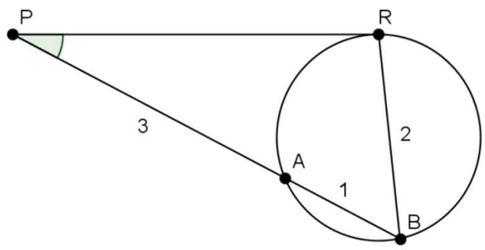
21. Bewijs dat de raaklijnstukken uit een punt aan een cirkel even lang zijn.

22. $[AB]$ is een koorde van een cirkel die niet door het middelpunt M gaat. De raaklijnen uit A en B snijden elkaar in P. Bewijs dat de hoeken $\widehat{AMB}$ en $\widehat{APB}$ supplementair zijn.

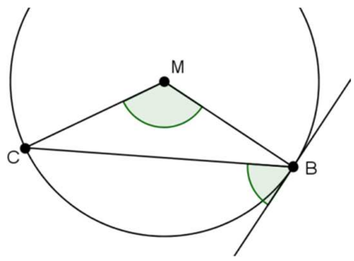
23. In een cirkel met middelpunt M en straal 7 is $[AB]$ een koorde van lengte 6. Bereken de straal van de ingeschreven cirkel in de cirkelsector MAB.



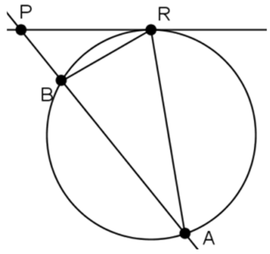
24. Een rechte uit een punt P snijdt een cirkel in de punten A en B zodat $|PA| = 3$ en $|AB| = 1$. R ligt op de cirkel zodat PR een raaklijn is. Als je weet dat $|BR| = 2$, bereken dan de grootte van hoek $\widehat{BPR}$.



25. Bewijs de stelling in verband met de raakomtrekshoek:
De hoek die een raaklijn in een punt van een koorde maakt met die koorde is de helft van de middelpuntshoek op die koorde.

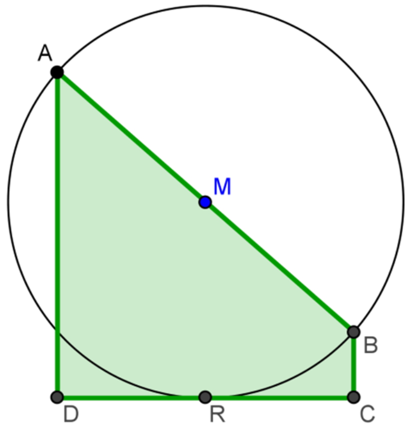


26. A, B en R zijn willekeurige punten op een cirkel, met $|RA| \neq |RB|$. Noem P het snijpunt van de raaklijn in R met de rechte AB.



- Gebruik de voorgaande oefening om af te leiden dat $\Delta PBR \sim \Delta PRA$.
- Bewijs dat $\dfrac{|PA|}{|PB|} = \dfrac{|RA|^2}{|RB|^2}$.

27. De vierhoek $ABCD$ is een rechthoekig trapezium. Verder weet je dat $[AB]$ een middellijn is van een cirkel, en $[CD]$ raakt diezelfde cirkel in punt R. Bereken de oppervlakte van dit trapezium als je weet dat $|AD| = 9$ en $|BC| = 4$.



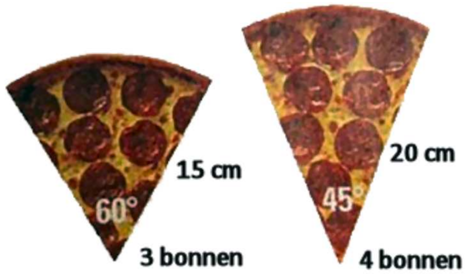
Constructies met passer en liniaal

28. Gegeven zijn 4 punten A, B, C en D, zodat $AB \nparallel CD$. Construeer twee concentrische cirkels waarvan de ene door A en B gaat, en de andere door C en D gaat.

29. Zij gegeven twee punten A en B die langs dezelfde kant van een rechte r liggen. Construeer een punt P op de rechte r zodat $\widehat{APB} = 90°$. Bewijs dat je constructie klopt. Wanneer zijn er twee oplossingen? Wanneer is er een unieke oplossing? Wanneer is er geen oplossing?

Cirkelboog en cirkelsector

30. Op het Pinkpop festival was volgende prijskaart te zien bij het pizzakraam:



Welke slice pizza is het voordeligst?

Analytische meetkunde van de cirkel

31. Stel de vergelijking op van de cirkel met middelpunt $M(5,-3)$ en straal $r = 6$.

32. Stel de vergelijking op van de cirkel met middelpunt $M(-2,1)$ en straal $r = 5$, en controleer dan of de punten $A(1,5)$ en $B(2,-3)$ op deze cirkel liggen.

33. Een cirkel heeft middelpunt $M\left(4, -\dfrac{3}{2}\right)$ en gaat door punt $P(2,1)$. Stel zijn vergelijking op.

34. Bepaal, als de vergelijking die gegeven is een cirkel voorstelt, het middelpunt en de straal van:

a. $x^2 + y^2 + 3x - 2y - 2 = 0$

b. $900x^2 + 900y^2 - 900x + 600y + 289 = 0$

c. $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 29 = 0$

d. $3x^2 + 3y^2 + 9x - 6y + 23 = 0$

35. Stel de vergelijking op van de cirkel die door $A(-3,0)$, $B(-1,3)$ en $C(1,4)$ gaat.

36. Beschouw de cirkel $c \leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 3y - 10 = 0$.

    a. De rechte $r \leftrightarrow 4x - 3y + 15 = 0$ snijdt deze cirkel in de punten A en B. Bepaal $|AB|$.

    b. Bewijs dat de rechte $t \leftrightarrow y = -x + 7$ een raaklijn is aan deze cirkel. Bepaal het raakpunt.

    c. Zoek de snijpunten van deze cirkel met de cirkel $c' \leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 7x + 9y - 15 = 0$.

37. Toon aan dat de cirkels $c_1 \leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 8y - 60 = 0$ en $c_2 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ elkaar inwendig raken.

38. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de cirkel $c \leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$ in $P(-2,1)$.

39. Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen aan de cirkel $c \leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 - 20x - 30y + 52 = 0$ uit het punt $P(-3,4)$.

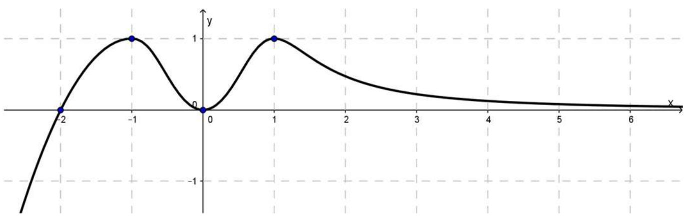
40. Bepaal de vergelijking van de raaklijnen aan de cirkel $c \leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 13 = 0$ die evenwijdig zijn met de rechte $r \leftrightarrow 4x + y - 9 = 0$.

41. Stel de vergelijking op van de cirkel die de rechte $t \leftrightarrow 2x + y = 7$ raakt in punt $R(2,3)$ en die door het punt $P(0,-3)$ gaat.

5) Elementaire functies

Elementaire begrippen in verband met functies

1. Bespreek de functie waarvan je hieronder de grafiek gegeven krijgt volledig. Geef het domein, het beeld, het tekenverloop en stijgen en dalen. Alle nulpunten en extrema zijn aangeduid.



Invloed van het teken en van constanten op het functievoorschrift

2. Zijn de volgende functies even of oneven of geen van beide. Bewijs dit! Vergelijk daarna met je rekenmachine (of met GeoGebra) de symmetrie van de grafiek met je bevindingen.

$$f(x) = \frac{x^3}{x^4+1} \qquad g(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{1+|x|}} \qquad h(x) = \frac{\cos x}{x}$$

3. Vul deze transformatieschema's aan:

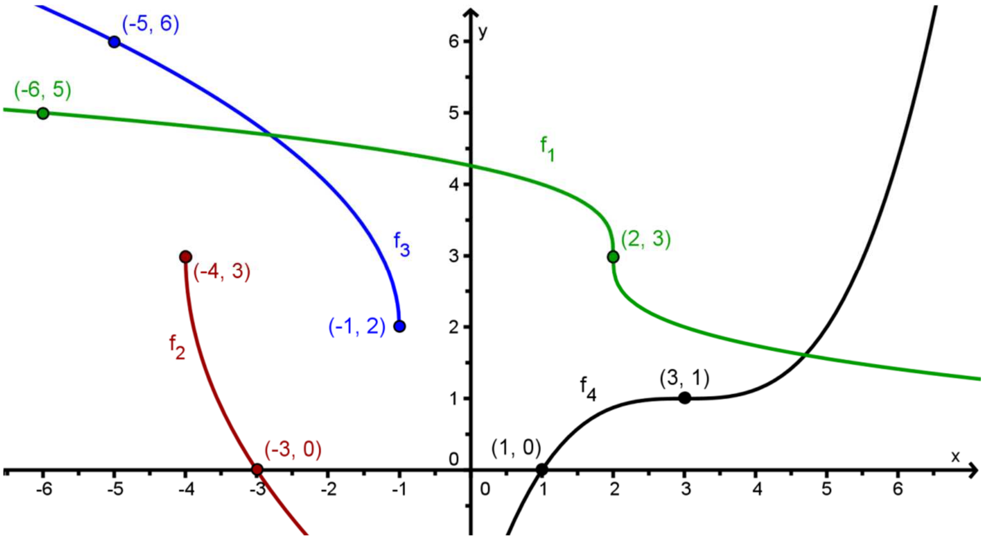
$f_0(x) = x^3$ $\downarrow \vec{v}(3,0)$ $f_1(x) =$ $\downarrow u_x\left(\frac{1}{2}\right)$ $f_2(x) =$ $\downarrow S_x$ $f_3(x) =$	$f_0(x) = \sqrt{x}$ $\downarrow S_y$ $f_1(x) =$ $\downarrow \vec{v}(2,-5)$ $f_2(x) =$ $\downarrow u_y(3)$ $f_3(x) =$

$f_0(x)=\sqrt[3]{x}$		$f_0(x)=\dfrac{1}{x^2}$	
	$\downarrow \vec{v}(0,-1)$		$\downarrow \vec{v}(-2,0)$
$f_1(x)=$		$f_1(x)=$	
	$\downarrow u_y(4)$		$\downarrow u_x\left(\dfrac{1}{4}\right)$
$f_2(x)=$		$f_2(x)=$	
	$\downarrow S_y$		$\downarrow S_O$
$f_3(x)=$		$f_3(x)=$	
	$\downarrow u_x(3)$		$\downarrow u_y\left(\dfrac{1}{2}\right)$
$f_4(x)=$		$f_4(x)=$	
	$\downarrow \vec{v}(2,0)$		$\downarrow \vec{v}(0,-1)$
$f_5(x)=$		$f_5(x)=$	

4. Geef zelf een transformatieschema als je enkel de startfunctie en de eindfunctie kent.

	f_s	f_e		f_s	f_e
a.	$y=x^3$	$y=-3\left(\dfrac{x-1}{5}\right)^3+4$	d.	$y=x^6$	$y=-(2x+1)^6$
b.	$y=\sqrt{x}$	$y=-5\sqrt{2-3x}+1$	e.	$y=\dfrac{1}{x}$	$y=\dfrac{4x-2}{2x+3}$
c.	$y=\sqrt[3]{x}$	$y=1-2.\sqrt[3]{\dfrac{x}{3}+4}$	f.	$y=\dfrac{1}{x}$	$y=\dfrac{4+x}{4-x}$

5. Op de figuur hieronder zie je de grafieken getekend van de vier functies f_1, f_2, f_3 en f_4. Ze zijn bekomen door elementaire transformaties toe te passen op de functies $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$ of $f(x)=x^3$.



Verder zijn er op de grafieken van deze functies telkens 2 punten aangeduid met gehele coördinaten. Gebruik deze twee punten om de functievoorschriften van de functies f_1, f_2, f_3 en f_4 op te stellen.

6. Beschouw de functie $f(x) = 2.\sqrt{x+4} + 1$.

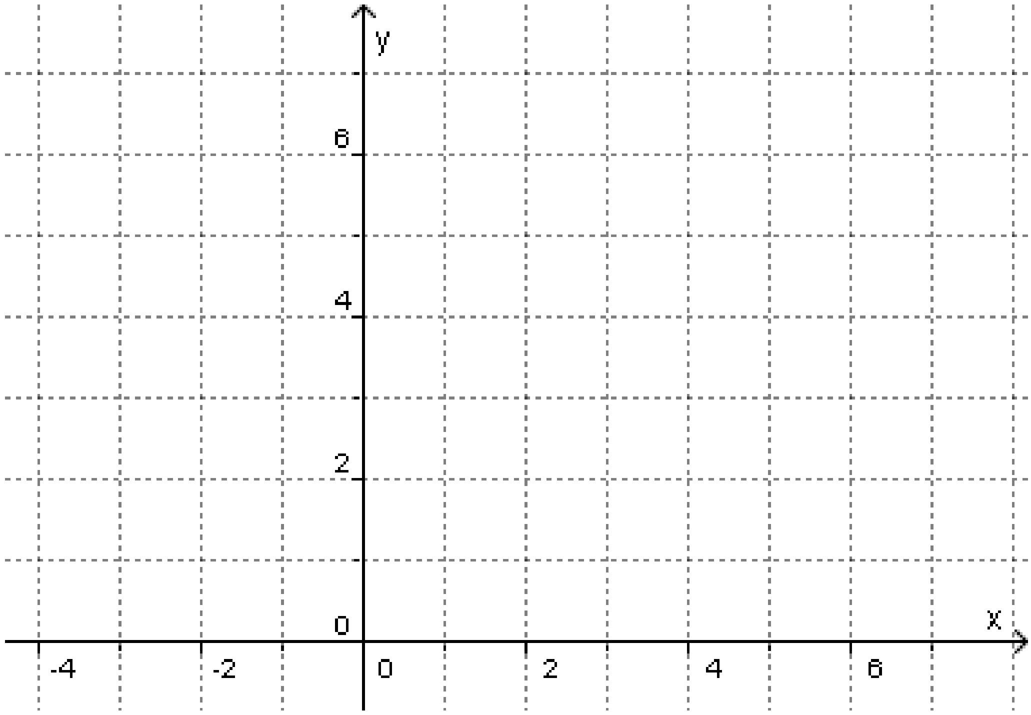
   a. Wat is het domein en wat is het beeld van deze functie?

   b. Door welke transformaties bekom je de grafiek van f uit die van $y = \sqrt{x}$?

   c. In welk punt snijdt de grafiek de y-as?

   d. Schets in het assenstelsel op de achterzijde de grafiek van de functie f .

   e. Wat is het functievoorschrift van de grafiek die je bekomt door de grafiek van f te spiegelen om de verticale rechte met vergelijking $x = 2$?



Differentiequotiënt

7. Bereken de differentiequotiënten voor de gegeven functies in het gegeven interval:

	$y = f(x)$		$[a,b]$
a.	$y = \sqrt{x}$	in	$[1,9]$
b.	$y = 3x + x^2 - x^3$	in	$[-2,1]$
c.	$y = \dfrac{1}{x^2 + 6x + 10}$	in	$[-5,-1]$
d.	$y = \sqrt[3]{4x^2 + 5x}$	in	$[0,5]$

8. Bereken de parameter $a \in \mathbb{R}$ opdat voor $f(x) = 3 - ax + x^2$ zou gelden dat $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{[1,4]} = 2$.

9. In welk interval van breedte 2 heeft de functie $f(x) = x^2 - x + 1$ een gemiddelde helling die gelijk is aan 3.

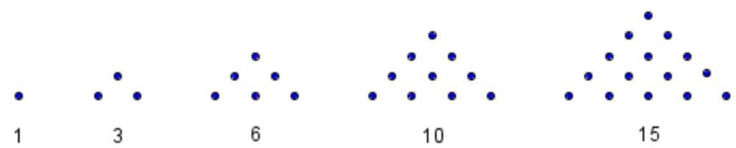
6) Rijen

Rijen – algemeen

1. Van de rijen hieronder krijg je een aantal termen gegeven. Vind een logica achter de rij en geef de drie volgende termen van de rij. Geef indien mogelijk een expliciet en/of een recursief voorschrift.
   - $(a_n) = 0,1,3,7,15,...$
   - $(e_n) = 0,1,8,27,64,...$
   - $(b_n) = \frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{9}{4},\frac{16}{5},...$
   - $(f_n) = \frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{6},1,...$
   - $(c_n) = 1,2,6,15,31,...$
   - $(g_n) = 17,16,14,11,7,...$
   - $(d_n) = 3,1,4,1,5,9,...$
   - $(h_n) = 0,9,99,999,9999,...$
2. De rij (u_n) is expliciet gedefinieerd als volgt: $u_n = n^2 - n + 1$.
   a. Bepaal de eerste 6 termen uit deze rij.
   b. Vind een recursieve definitie voor deze rij.
3. Het aantal diagonalen van een *(convexe)* n- hoek noteren we met d_n. De eerste drie waarden d_1, d_2 en d_3 zijn uiteraard 0 (zowel een punt, een lijnstuk als een driehoek hebben geen diagonalen). $d_4 = 2$ want een vierhoek heeft altijd twee diagonalen.
   a. Bedenk een meetkundig argument voor de recursieformule $d_{n+1} = d_n + n - 1$.
   b. Bedenk een meetkundig argument voor de expliciete formule $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$.
   c. Hoeveel diagonalen heeft een vijfhoek? Hoeveel diagonalen heeft een tienhoek?
4. De *rij van Perrin* is recursief als volgt gedefinieerd: $P_1 = 3$, $P_2 = 0$, $P_3 = 2$; $P_{n+3} = P_n + P_{n+1}$.
   Bepaal de eerste 10 termen van deze rij.
5. Van *de rij van Fibonnaci* worden de eerste termen gegeven door: $(F_n) = 1,1,2,3,5,8,13,21,...$
   a) Vind een eenvoudig recursief voorschrift voor deze rij.
   b) Controleer met behulp van je rekenmachine dat de formule $F_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n.\sqrt{5}}$ klopt als expliciet voorschrift voor deze rij.
   c) Wat is de 25^e term uit deze rij?
6. We noemen (p_n) de rij van de priemgetallen: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, …
   a) Bereken $\sum_{i=1}^{6} p_i^2$
   b) Bereken $\left(\prod_{i=1}^{7} p_i\right) + 1$

Rekenkundige rijen

7. Gegeven is de rij met expliciet voorschrift $z_n = 3n - 19$.
   a. Geef de eerste 7 termen uit deze rij.
   b. Bereken de som van de eerste 50 termen uit deze rij.
8. Voor een rekenkundige rij (u_n) met verschil $v = \frac{1}{2}$ geldt dat $u_2 + u_{19} = 0$. Bereken u_2 en u_{19}.
9. De som van de eerste en de vierde term van een rekenkundige rij is -7. Het product van de derde en de vijfde term is -9. Bepaal de som van de eerste 6 termen van deze rij.
10. Bewijs dat de som van de eerste n oneven getallen gelijk is aan n^2.
11. De som van drie termen die een rekenkundige rij vormen is 12, hun product is 39. Bepaal die drie getallen.
12. Bereken de som van alle getallen van 3 cijfers die deelbaar zijn door 7.
13. Een rekenkundige rij heeft als eerste term 3. De som van de eerste 8 termen is het dubbel van de som van de eerste 5 termen. Wat is het verschil bij deze rij?
14. Schrijf de volgende sommen met behulp van het Σ-teken en bereken ze:
   a. $10 + 14 + 18 + 22 + ... + 1006 + 1010$
   b. $17,1 + 16,8 + 16,5 + ... - 18,3 - 18,6$
   c. $-\frac{1}{2} - \frac{5}{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - ... + \frac{23}{12} + 2$
15. In de rekenkundige rij met als termen $(u_n) = -7, -3, 1, 5, ...$ is een van de termen gelijk aan de som van de eerste 13 termen van deze rij. De hoeveelste term is dit?
16. De eerste, twaalfde en laatste term van een rekenkundige rij zijn respectievelijk 4, $31,5$ en $376,5$. Bepaal het aantal termen van deze rij en bepaal ook hun som.
17. De rij driehoeksgetallen is de volgende: $(T_n) = 1, 3, 6, 10, 15, ...$.



   a. Hierboven lees je af dat $T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6, T_4 = 10$ en $T_5 = 15$. Bepaal T_6 en T_7.
   b. Geef zowel een recursieve als een expliciete definitie voor deze rij.
   c. Bepaal T_{100}.
   d. Bestaat er een $n \in \mathbb{N}$, zodat $T_n = 10000$? ***Bewijs*** waarom of waarom niet!
18. De natuurlijke getallen worden op de volgende manier in een driehoek geplaatst:

1				
2	3			
4	5	6		
7	8	9	10	
11	12	13	14	15
...				

Wat is de som van de getallen op de n-de rij?

(Finalevraag VWO 2007)

Meetkundige rijen

19. Van een meetkundige rij is de eerste term 320 en de elfde term $\frac{5}{16}$. Bepaal de som van de eerste 11 termen van deze rij.
20. Drie termen vormen een meetkundige rij met som -21 en product 125. Wat zijn die drie termen?
21. Bereken zowel het rekenkundig als het meetkundig gemiddelde van $0,5$ en $12,5$.
22. Bewijs de lineariteit van het sommatieteken:

    Voor alle $a,b \in \mathbb{R}$ en rijen (u_n) en (v_n) geldt: $\sum_{i=1}^{n}(a.u_i + b.v_i) = a.\sum_{i=1}^{n}u_i + b.\sum_{i=1}^{n}v_i$

    Bereken nu je dit weet de volgende sommen:

    a. $\sum_{m=0}^{10}\left(2^m + \frac{3}{5^m}\right)$

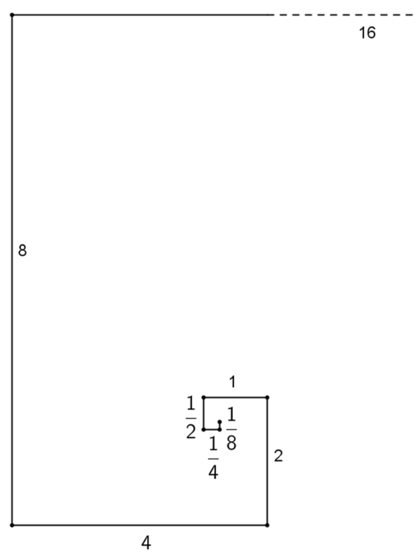
    b. $\sum_{k=3}^{17}\left(1-3k+1,5^k\right)$
23. Bewijs dat de som van de (echte) delers van een macht twee gelijk is aan het getal zelf min één.
24. Drie termen vormen een meetkundige rij met als som 19. Vermeerdert men de tweede term met $\frac{1}{2}$ dan wordt het een rekenkundige rij. Wat zijn deze drie termen?
25. Gegeven is een meetkundige rij x, y, z (met $x \neq y$). Bepaal het quotiënt van deze rij als je weet dat $x, 2y, 3z$ een rekenkundige rij is. *(VWO 1994)*
26. Bewijs dat $\frac{1}{b-a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b-c}$ een rekenkundige rij is als en slechts als a,b,c een meetkundige rij is.
27. Een spiraal wordt opgebouwd als volgt:

    Uit een startpunt wordt een lijnstuk van $1/8\,cm$ naar onder getrokken, daaraan een lijnstuk van $1/4\,cm$ naar links, daarna een lijnstuk van $1/2\,cm$ naar boven, dan $1\,cm$ naar rechts, enz…

    a. Hoe lang is het 30^e lijnstuk?

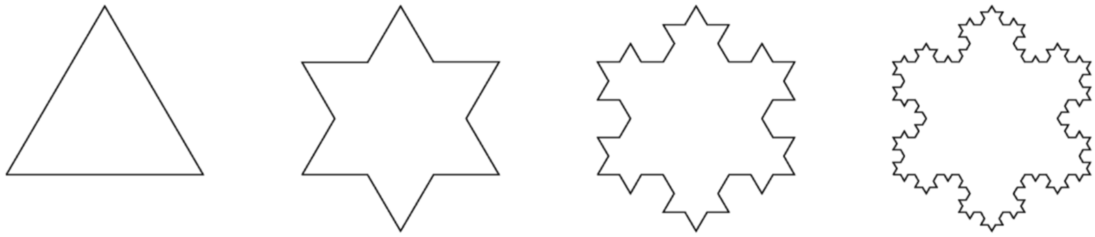
    b. Ligt dit 30^e lijnstuk volledig links, boven, rechts of onder het startpunt.

    c. Hoe lang zal de spiraal zijn die uit 30 lijnstukken bestaat?



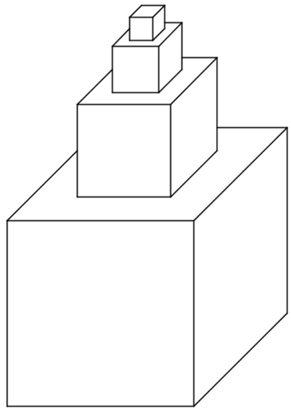
28. $x+18, x+4, x-8$ zijn de eerste drie termen van een meetkundige rij. Wat is het quotiënt van deze rij?
29. x, y, z is een meetkundige rij met als som van de termen 64. Bepaal deze termen als je weet dat y, x, z een rekenkundige rij is (met $x \neq y$).
30. 11 verschillende termen vormen een rekenkundige rij met som 110. De derde, eerste en laatste term vormen (in die volgorde) een meetkundige rij. Bepaal deze rij.

31. De som van de eerste 6 termen van een eindige rekenkundige rij is 6. De vierde, eerste en tiende term vormen een meetkundige rij. De som van alle termen is 888. Hoeveel termen bevat deze rij?
32. De *sneeuwvlok van Koch* is een meetkundige figuur die een fractaal wordt genoemd. Hij wordt opgebouwd door op een basisfiguur steeds dezelfde constructie toe te passen.
Op de figuur hieronder zie je de eerste 4 stappen van deze constructie toegepast:

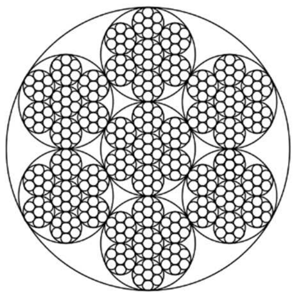


De omtrek van de gelijkzijdige driehoek waar de constructie mee start is $9\ cm$.
a. Bepaal de omtrek van de sneeuwvlok na 2, 3 en 4 stappen.
b. Toon aan dat de omtrek na 78 stappen ongeveer de afstand van de aarde tot de maan is.
c. Bewijs dat de figuur na 78 stappen nog altijd niet groter is dan $7\ cm^2$.

33. Kato krijgt voor haar derde verjaardag een blokkendoos. De grootste blok is een kubus met een ribbe van $16\ cm$.
Ze maakt een toren door op elke vorige blok een blok te plaatsen die half zo hoog is (zie figuur).
a. Hoe hoog zal de toren zijn die uit 4 blokken bestaat?
b. Stel dat ze *oneindig veel* blokken heeft. Hoe hoog kan ze haar toren dan maken als ze op deze manier verder bouwt?
c. Wat zal het volume zijn van deze oneindige constructie?



34. In een grote cirkel worden 7 kleinere cirkels getekend. In elk van deze cirkels worden 7 kleinere cirkels getekend. In elk van deze cirkels worden weer 7 nog kleinere cirkels getekend. Je krijgt dan de situatie getekend op de figuur.
Als we zo zouden verder gaan tot er cirkels van 8 verschillende groottes zijn, hoeveel cirkels zouden er dan te zien zijn?



7) Algebraïsch rekenen

Veeltermen: bewerkingen – het algoritme van Horner – gelijkheid van veeltermen

1. Voer de volgende eenvoudige veeltermbewerkingen uit:

a. $(x-4)(x+4)-(x-3)^2$
c. $(2x-1)^3$
b. $(x^2-3x+4)(x-1)$
d. $(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$

2. Gegeven: $gr\big(A(x)\big)=6$, $gr\big(B(x)\big)=3$, $gr\big(C(x)\big)=2$ en $gr\big(D(x)\big)=1$.

   Gevraagd: bepaal de graad van de veelterm $P(x)$ in onderstaande gevallen:

   a. $P(x)=B(x)-C(x)+D(x)$

   b. $P(x)=A(x).B(x).C(x).D(x)$

   c. $P(x).B(x)+C(x)=A(x).D(x)$

   d. $\big(A(x)\big)^2=P(x).B(x).C(x)$

   e. $\big(P(x)\big)^2.C(x)=A(x).B(x).D(x)$

   f. $A(x)+P(x)=D(x)-C(x)$

3. Gegeven: $A(x)=x^3-2x^2+3x-4$, $B(x)=3x^4-2x+5$, $C(x)=x^5-2x^3+3x^2-1$.

   Gevraagd: Bereken $A(1)$, $A(-2)$, $B(-1)$ en $C(2)$ met behulp van het algoritme van Horner.

4. Vul onderstaande schemas van Horner aan:

	...	3	0	...	...
-2					
	1	...	...	1	7

	2	-7	0	...	4	...	...
3							
	...	...	...	2		-3	0

5. Bepaal de waarde van de parameters $a,b,c\in\mathbb{R}$ in de onderstaande gevallen:

   a. $(3b-1)x^3+(2-c)x^2+(d+2)x+5=(c+6)x^3+ax^2+(2b+1)x+d$

   b. $(3x+a)(2x-1)-(bx^2+3x-7)=8x^2+bx+c$

De Euclidische deling

6. Voer de Euclidische delingen uit:

   a. $A(x)=6x^3-5x^2-3x+5$ door $D(x)=2x+3$

   b. $A(x)=8x^5+14x^4+18x^3+18x^2+13x+8$ door $D(x)=4x^2+3x+2$

   c. $A(x)=x^4+x^2+2$ door $D(x)=x^2-x+1$

   d. $A(x)=3x^3+7x^2+7x+2$ door $D(x)=3x+4$

   e. $A(x)=3x^3+x^2-13x-7$ door $D(x)=x-2$

7. Bij deling van veelterm $A(x)$ door $2x^3-3x+1$ is het quotiënt $3x-4$ en de rest x^2-2. Bepaal het deeltal $A(x)$.

8. Bij deling van $6x^3-7x^2+21x-1$ is het quotiënt $2x^2-x+6$ en de rest $x+11$. Bepaal de deler.

9. Bij deling van $2x^3-ax^2+4x+b$ door x^2-2x+3 is de rest $-4x+2$. Bepaal a en b.

Deelbaarheid bij veeltermen

10. Voer de volgende Euclidische delingen uit met behulp van het algoritme van Horner:

    a. $A(x)=8x^3+4x^2-4x+5$ door $D(x)=x+3$

    b. $A(x)=-3x^4+2x^3+x-1$ door $D(x)=x-3$

    c. $A(x)=-3x^4+2x^3+x-1$ door $D(x)=x-1$

    d. $A(x)=x^5-1$ door $D(x)=x+1$

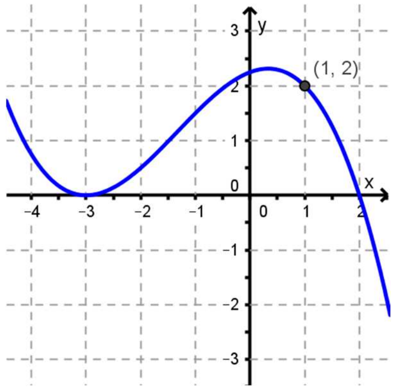
    e. $A(x)=6x^3+5x^2-4x+5$ door $D(x)=x+3/2$

11. Bepaal de parameter $a \in \mathbb{R}$ opdat de volgende delingen opgaand zou zijn:
   a. $A(x) = 3x^2 - ax + 6$ door $D(x) = x - 2$
   b. $A(x) = a^2x^2 - 3ax + 5$ door $D(x) = x - 3$
12. Bij deling van $A(x)$ door $D_1(x)$ wordt het quotiënt gegeven door $Q_1(x)$ en de rest door $R_1(x)$. Deel je $Q_1(x)$ verder door $D_2(x)$ dan krijg je quotiënt $Q_2(x)$ en rest $R_2(x)$.
   Bewijs dat het quotiënt en de rest bij deling van $A(x)$ door $D(x) = D_1(x).D_2(x)$ gegeven worden door $Q(x) = Q_2(x)$ en $R(x) = D_1(x).R_2(x) + R_1(x)$.
13. Gebruik de voorgaande oefening om met behulp van het algoritme van Horner volgende delingen uit te voeren:
   a. $A(x) = 2x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 8x + 2$ door $D(x) = (x-1)(x-2)$
   b. $A(x) = 2x^5 + x^4 - 16x^3 - 19x^2 + 13$ door $D(x) = (x+2)(x-3)$
   c. $A(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 12x - 1$ door $D(x) = x^2 - 4$
   d. $A(x) = 3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 1$ door $D(x) = (x-1)^2$
14. Bepaal de parameters a en b zodat $(x+2)(x-3) \mid 2x^3 - x^2 + ax + b$.
15. De veelterm $2x^3 + x^2 - bx + a$ geeft bij deling door $x^2 - 1$ als rest $3x + 5$. Bepaal de parameters a en b alsook het quotiënt.
16. Bij deling van een veelterm $A(x)$ door $x - 2$ is de rest 2. Bij deling door $x + 1$ is de rest 11. Bij deling door $x - 3$ is de rest 7. Bepaal de rest bij deling door $(x-2)(x+1)(x-3)$.

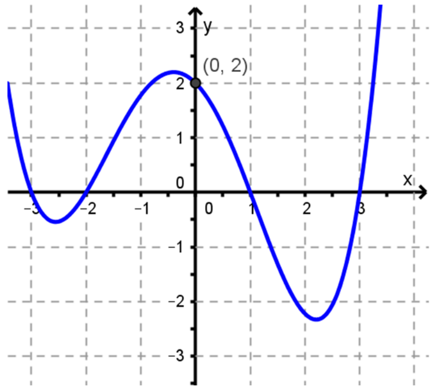
Ontbinden in factoren

17. Ontbind de volgende veeltermen in factoren. Gebruik hierbij het algoritme van Horner.
   a. $x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 11x + 4$
   b. $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$
   c. $x^5 + 13x^4 + 63x^3 + 139x^2 + 136x + 48$
   d. $12x^3 - 11x^2 - 2x + 1$
   e. $24x^3 + 14x^2 - 7x - 3$
   f. $x^7 - 128$ en $x^7 + 128$
18. Ontbind in factoren. Het is mogelijk zonder het algoritme van Horner te gebruiken.
   a. $x^2 - 2x - 1$
   b. $144x^4 - (3x^2 + 4)^2$
   c. $13x^3 - 7x^2 + 13x - 7$
   d. $8x^3 - 27a^3$
   e. $x^5 - x^3 + 8x^2 - 8$
19. Los de volgende ongelijkheden op door eerst te ontbinden in factoren:
   a. $2x^3 - x^2 - 7x + 6 \leq 0$
   b. $6x^4 - 11x^3 - 33x^2 + 72x - 20 \geq 0$
   c. $\dfrac{x^3 + 27}{x^3 + x - 2} \geq 0$
   d. $\dfrac{4x^5 - 8x^4 - 15x^3 + 7x^2 + 7x - 3}{x^2 - 9} < 0$

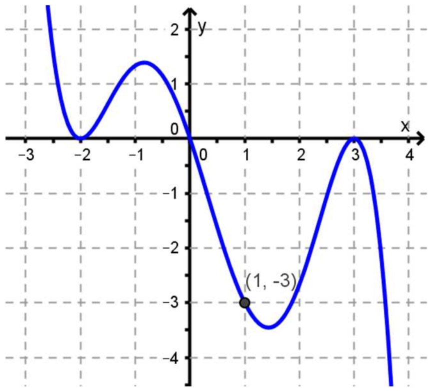
20. Stel de functievoorschriften op van volgende veeltermfuncties (de graad staat erbij vermeld).



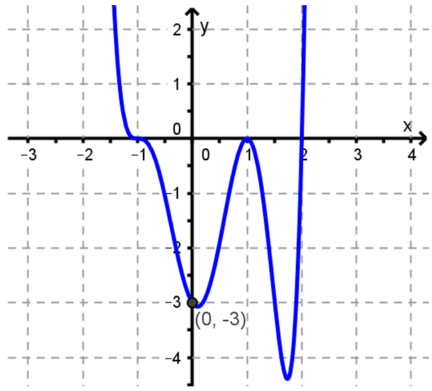
(veelterm van de 3^e graad)



(veelterm van de 4^e graad)



(veelterm van de 5^e graad)

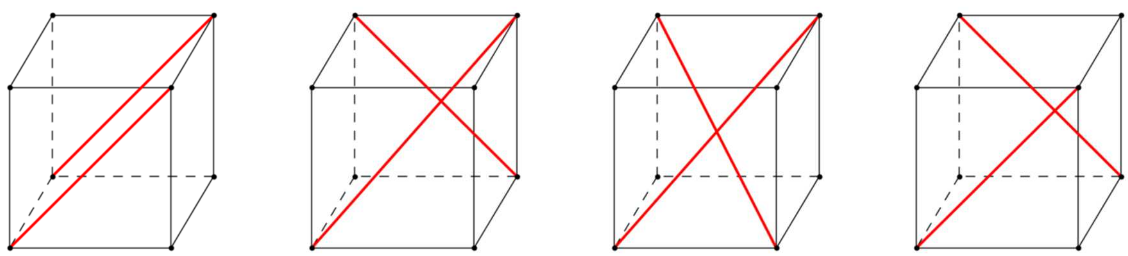


(veelterm van de 6^e graad)

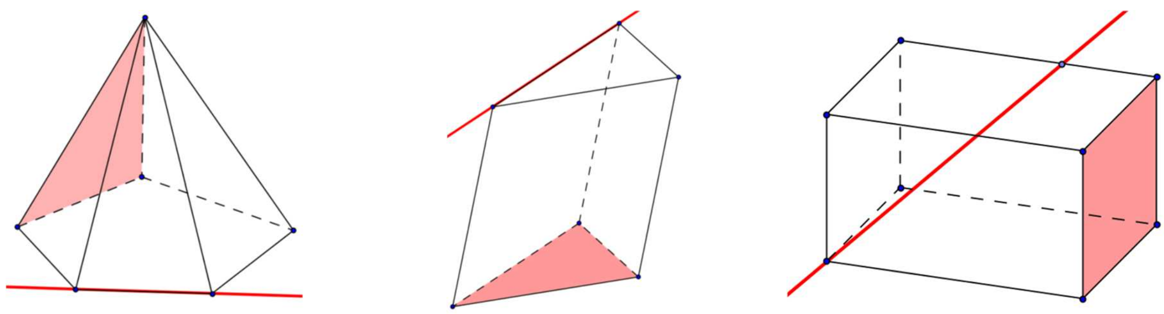
8) Ruimtemeetkunde

Basisbegrippen – onderlinge ligging van punten, rechten en vlakken

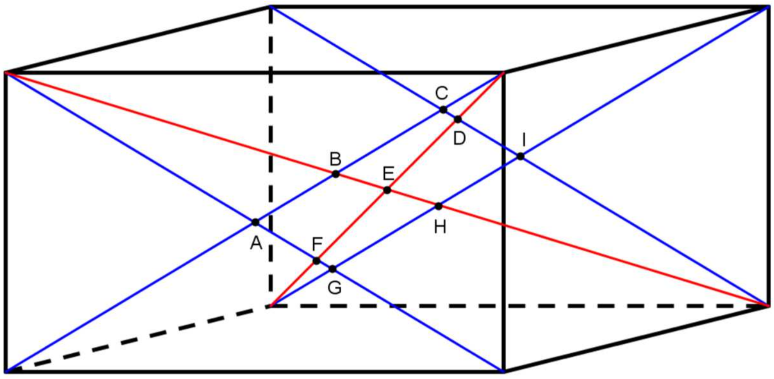
1. Zijn de aangeduide rechten op de figuur (ze gaan door hoekpunten van de getekende kubus) snijdend, evenwijdig, of kruisend?



2. Zal de aangeduide rechte het gekleurde vlak op de figuur (piramide, prisma, balk) snijden of niet? Construeer in het geval dat ze snijden ook het snijpunt (dit noemen we een doorboring).



3. Op de figuur zie je een heel aantal punten aangeduid. Dit zijn echter niet altijd echte snijpunten. Welke van de aangeduide punten zijn ook echte snijpunten als je weet dat de figuur een balk is, en dat de aangeduide rechten allemaal diagonalen zijn?

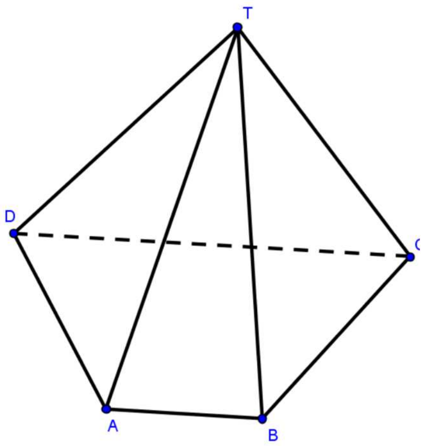


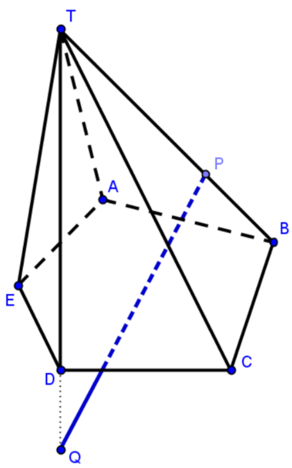
Doorboringen en doorsneden

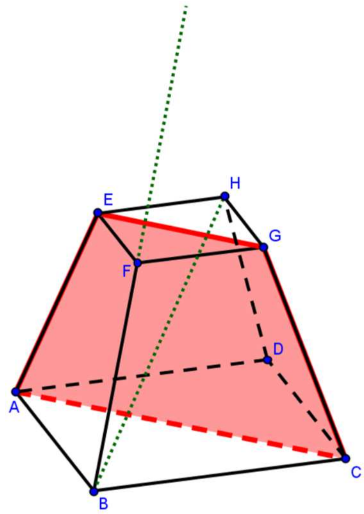
4. De figuur $\begin{pmatrix} T \\ ABCD \end{pmatrix}$ is een piramide met top T, zodat $AB \parallel CD$. Construeer op de figuur de snijlijnen van $vl(TAD)$ en $vl(TBC)$ enerzijds, en $vl(TAB)$ en $vl(TCD)$ anderzijds.

5. De figuur $\begin{pmatrix} T \\ ABCDE \end{pmatrix}$ is een piramide met top T. P is een punt op de ribbe $[TB]$, Q ligt op het verlengde van ribbe $[TD]$.
Construeer de doorboring van rechte PQ met het grondvlak $ABCDE$.

6. De figuur $\begin{pmatrix} EFGH \\ ABCD \end{pmatrix}$ is een afgeknotte piramide.
Construeer de doorboring van zowel BH als van BF met het vlak $ACGE$.

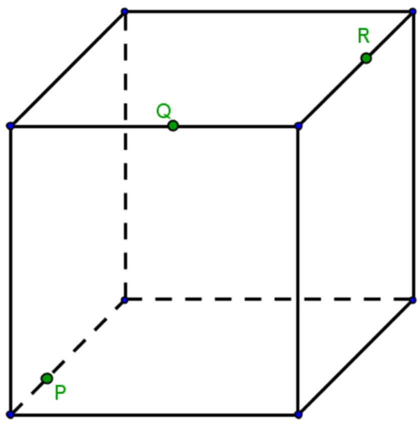


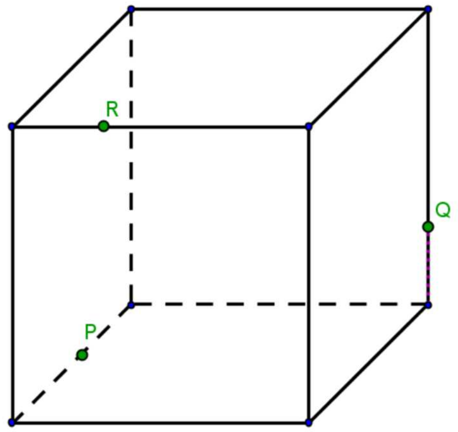




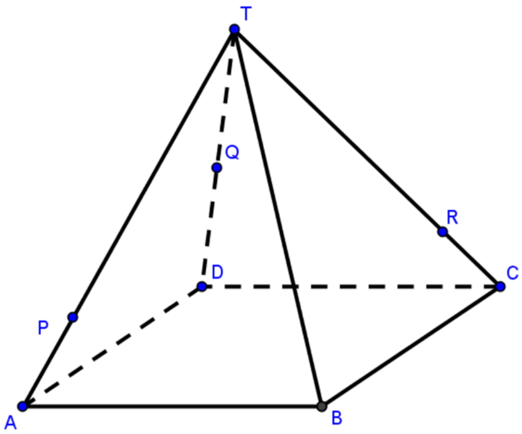
7. Gegeven zijn vier vlakken α, β, γ en δ, en vier rechten a, b, c en d. Zijn de hierna volgende uitspraken waar of niet waar?
   a. $a \parallel \alpha \ \wedge \ a \parallel \beta \ \Rightarrow \ \alpha \parallel \beta$
   b. $a \parallel \gamma \ \wedge \ b \parallel \gamma \ \Rightarrow \ a \parallel b$
   c. $a \parallel \alpha \ \wedge \ \alpha \parallel \beta \ \wedge \ \beta \parallel \gamma \ \wedge \ \gamma \parallel \delta \ \Rightarrow a \parallel \delta$
   d. $a \subset \alpha \ \wedge \ b \subset \beta \ \wedge \ \alpha \parallel \beta \ \Rightarrow \ a \parallel b$
   e. $c = \alpha \cap \beta \ \wedge \ d \parallel c \ \Rightarrow \ d \parallel \alpha \ \wedge \ d \parallel \beta$

8. Bepaal telkens de doorsnede van het vlak $vl\left(PQR\right)$ met de kubus.

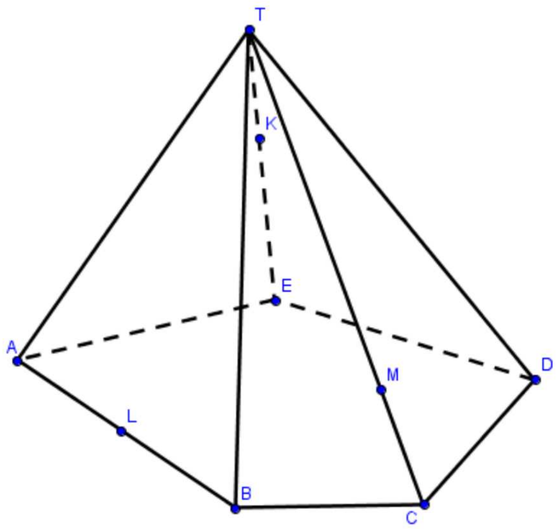




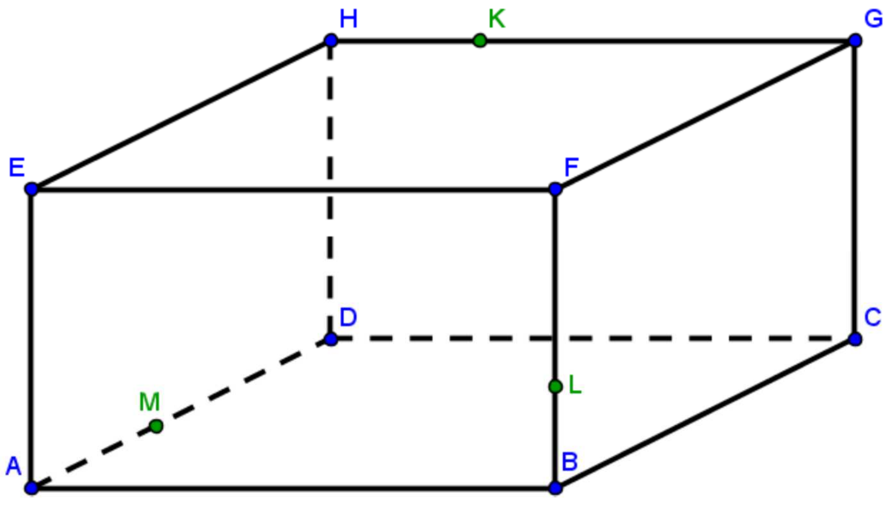
9. Bepaal de doorsnede van het vlak $vl\left(PQR\right)$ met de piramide.



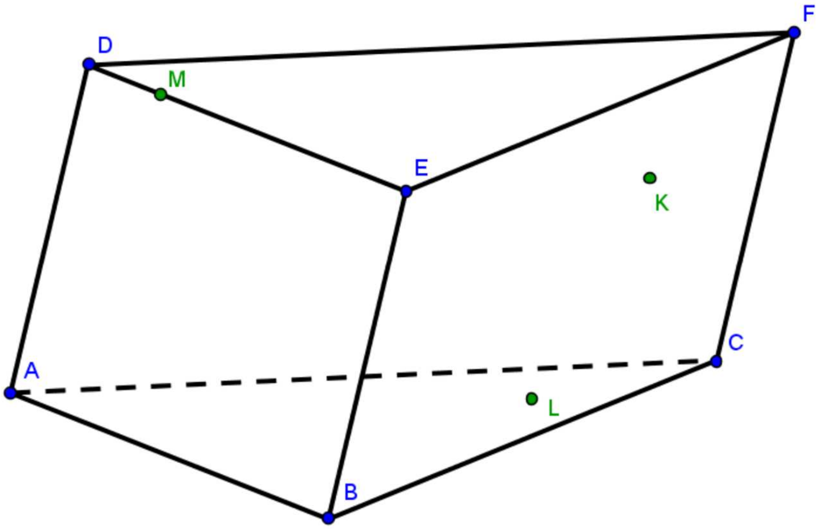
10. Bepaal de doorsnede van het vlak $vl\left(KLM\right)$ met de piramide.



11. Bepaal de doorsnede van de balk met het vlak $vl\left(KLM\right)$.

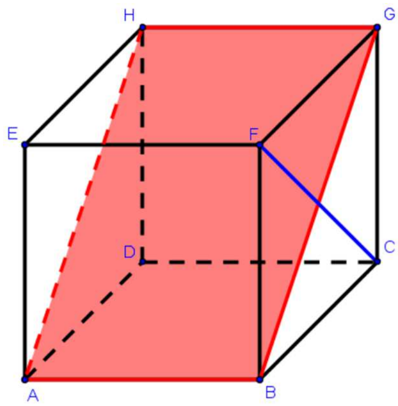


12. Bepaal de doorsnede van vlak $vl\left(KLM\right)$ met het prisma. K ligt in het achtervlak ($ACFD$) en L ligt in het rechtervoorvlak ($BCFE$).



Loodrechte stand

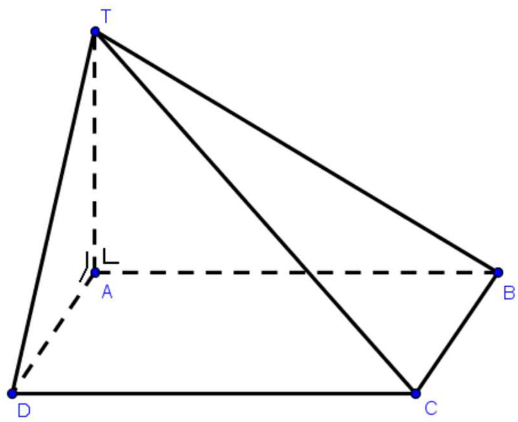
13. Gegeven zijn drie vlakken α,β,γ en drie rechten a,b en c. Zijn de hierna volgende uitspraken waar of niet waar?
    a. $\alpha\perp\beta\ \wedge\ \beta\perp\gamma\ \Rightarrow\alpha\parallel\gamma$
    b. $a\perp b\ \wedge\ b\perp c\ \Rightarrow a\parallel c$
    c. $a\parallel\alpha\ \wedge\ \alpha\perp\beta\ \Rightarrow\ a\perp\beta$



14. Steun op de hoofdstelling in verband met loodrechte stand om te bewijzen dat in een kubus $\begin{pmatrix}EFGH\\ABCD\end{pmatrix}$ geldt dat $CF\perp vl\left(ABGH\right)$.

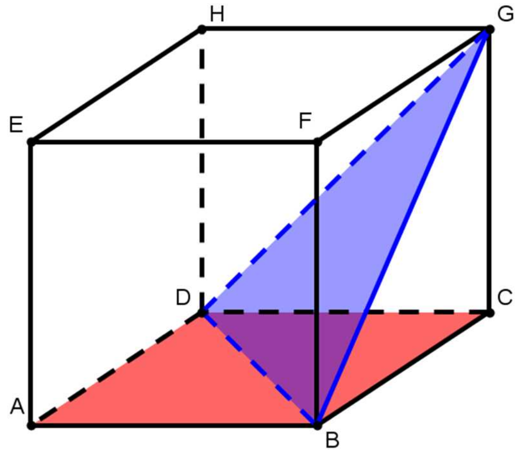
Afstanden en hoeken

15. De figuur $\begin{pmatrix}T\\ABCD\end{pmatrix}$ is een piramide met rechthoekig grondvlak $\square ABCD$ ($\left|AB\right|=12$ en $\left|BC\right|=5$), zodat $TA\perp AB$ en $TA\perp AD$. De hoogte van de piramide is $\left|TA\right|=7{,}5$.



    a. Bereken de hoek tussen de kruisende rechten TB en CD.
    b. Bereken de hoek $\widehat{BTD}$.
    c. Bereken de hoek die de rechte TC maakt met het grondvlak $vl\left(ABCD\right)$.
    d. Bereken de hoek tussen de vlakken $vl\left(TBC\right)$ en $vl\left(ABCD\right)$.

16. Gegeven is een kubus $\begin{pmatrix} EFGH \\ ABCD \end{pmatrix}$. Bereken de hoek tussen de vlakken $vl(BDG)$ en $vl(ABCD)$.



9) Telproblemen en kansrekening

Telproblemen

1. In 1835 stelde Samuel Morse zijn beroemde Morse-alfabet op, dat vooral werd gebruikt bij het doorsturen van boodschappen via telegrafen. Het alfabet kent aan elke letter een code toe, bestaande uit maximaal 4 punten en/of streepjes.

   Zo is het symbool voor de letter E bijvoorbeeld één punt (E = .), en voor de letter N een streep gevolgd door een punt (A = _ .).
   a. Hoeveel verschillende letters kan je coderen met behulp van 3 tekens?
   b. Hoeveel verschillende letters kan je coderen met maximaal 4 tekens?
2. Een metal-liefhebber heeft 350 CD's. Hieruit wil hij een persoonlijke top 5 samenstellen. Op hoeveel verschillende mogelijkheden kan hij dat doen?
3. Hoeveel oneven getallen bestaande uit 4 verschillende cijfers bestaan er?
4. Hoeveel getallen bestaande uit vijf verschillende cijfers bestaan er die deelbaar zijn door 5?
5. We gooien met twee dobbelstenen, een gele en een blauwe. Hoeveel uitkomstmogelijkheden zijn er in totaal? In hoeveel van deze gevallen zal de gele dobbelsteen meer geworpen hebben als de blauwe?
6. In een klas van 13 leerlingen moeten de leerlingen een keuze maken uit 13 sporten voor hun sportdag.
   a. Op hoeveel manieren kan dit?
   b. Op hoeveel manieren kand it als iedereen een verschillende keuze moet maken?
7. In een klas met 24 leerlingen hebben 10 leerlingen een Pleejsteesjen Twie, 8 leerlingen hebben een Eksbox, en 12 leerlingen hebben een Nintendoow Deejez. Eén leerling bezit ze alle drie. Er zijn evenveel leerlingen die enkel een Pleejsteesjen Twie als leerlingen die enkel een Eksbox hebben. Als je weet dat er slechts twee leerlingen die beide spelconsoles hebben, en er 5 leerlingen zijn zonder spelconsole, hoeveel leerlingen hebben er dan enkel een Eksbox?
8. Met Valentijn sturen alle leerlingen van een klas van 20 leerlingen 10 wenskaarten naar 10 verschillende leerlingen. Toon aan dat er minstens één koppel ontstaat die een wenskaart krijgen van elkaar.
9. Bij een ongeval pleegt de chauffeur van een wagen vluchtmisdrijf. Er zijn verschillende getuigen die allemaal een stukje van de nummerplaat hebben gezien!
   a. Bart zag dat de nummerplaat van het type letter letter letter – cijfer cijfer cijfer was. Hoeveel mogelijkheden zijn er dan nog?
   b. John weet bovendien dat het drie verschillende letters en drie verschillende cijfers zijn. Hoeveel mogelijkheden zijn er dan nog?
   c. Kurt heeft gezien dat er geen cijfer '0' en ook geen letter 'O' in voorkomt. Hoeveel mogelijkheden zijn er nu nog?
   d. Kylie weet dat de letters A, C en E zeker voorkwamen, en ook de cijfers 1, 6 en 9, maar niet meer in welke volgorde. Hoeveel mogelijkheden zijn er nu nog?

10. Bij het oorspronkelijke pokerspel krijg je bij aanvang een hand van 5 kaarten (uit een boek van 52). Hoeveel kaartencombinaties zijn er mogelijk? Denk er hierbij aan dat de volgorde geen rol speelt!

Kansrekenen

11. Uit experimenten blijkt dat als we een punaise opgooien, ze twee keer zoveel kans heeft om met de punt naar boven te vallen (links) als dat ze op haar zij zou vallen (rechts). We gaan ervan uit dat er geen andere mogelijkheid is.

   a. Bepaal deze twee kansen.
   b. Als je drie keer een punaise opgooit, wat is dan de kans dat ze drie keer op haar zij valt?
   c. Als je 4 keer een punaise opgooit, wat is dan de kans dat ze exact één keer met de punt naar boven valt?
   d. Als je 6 keer een punaise opgooit, wat is dan de kans dat ze minstens één keer met de punt naar boven valt?
12. Je gooit met een (eerlijke) dobbelsteen. Wat is de kans dat je een priemgetal gooit (2, 3 of 5)?
13. Je gooit met twee dobbelstenen, en telt de ogen bij elkaar op.
   a. Wat is hier de uitkomstenverzameling?
   b. Is er hier sprake van een uniforme kansverdeling?
   c. Bereken de kans dat de som van de ogen 7 is.
14. In een zak zitten er 18 knikkers: 9 witte, 6 rode, 2 gele en één blauwe.
   a. Je trekt drie knikkers uit de zak. Wat is de kans dat dit 3 rode knikkers zijn?
   b. Je trekt twee knikkers uit de zak. Wat is de kans dat ze dezelfde kleur hebben?
   c. Je trekt twee knikkers uit de zak. Wat is de kans dat ze een verschillende kleur hebben?
   d. Je trekt 9 knikkers uit de zak. Wat is de kans dat de blauwe knikker er bij zit?
15. Bij het lotto spel worden er uit een grote bokaal met 45 genummerde balletjes lukraak 6 balletjes getrokken. Bereken de kans dat jij deze 6 balletjes correct kon voorspellen (in één poging).
16. Uit een boek van 52 kaarten trek je 3 kaarten.
   a. Bereken de kans dat het drie harten kaarten zijn.
   b. Bereken de kans dat het 3 azen zijn.
   c. Bereken de kans dat het 3 kaarten van dezelfde kleur zijn (kleur: ♣, ♦, ♥ of ♠).
   d. Bereken de kans dat het 3 kaarten van een verschillende kleur zijn.
17. Bij een tombola worden 500 lotjes verkocht. Er worden 15 prijzen verloot. Jij koopt 3 lotjes.
   a. Bereken de kans dat je 3 prijzen wint.
   b. Bereken de kans dat je geen enkele prijs wint.
   c. Bereken de kans dat je minstens één prijs wint.
   d. Bereken de kans dat je exact één prijs wint.
18. In het eerste jaar wiskunde aan de universiteit zitten 100 studenten, waarvan 3 keer zo veel jongens als meisjes. Achteraf blijkt dat 40% van de meisjes geslaagd is, en slechts 20% van de jongens. Als je lukraak iemand van de geslaagden kiest, wat is dan de kans dat het een meisje is?
19. Een bedrijf maakt koffiemachines. Ze fabriceren op alle werkdagen (Ma-Vr) evenveel machines. In principe is er een kans van 1% dat er een productiefout optreedt, behalve op vrijdag 2% en op maandag zelfs 3%. Bereken de kans dat een kapotte koffiemachine op maandag werd gefabriceerd.

