Extra opgaven: Analytische meetkunde van de cirkel

1. Gegeven de punten $A(-2,9)$, $B(-6,1)$, $C(2,-3)$ en $D(6,5)$. (★)

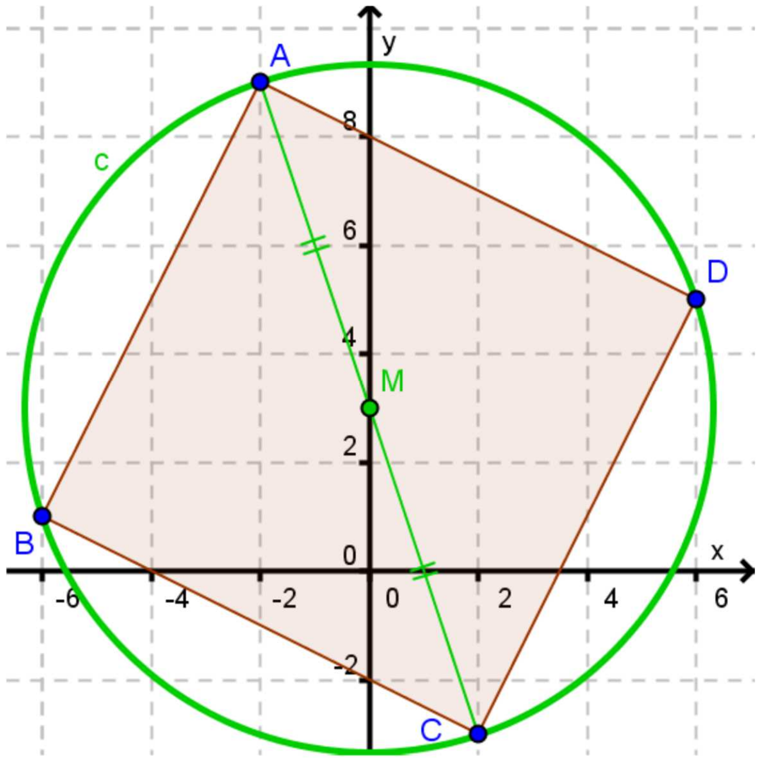
   - Bewijs dat de vierhoek $ABCD$ een vierkant is.

     $|AB| = |BC| = |CD| = |AD| = \sqrt{80}$, en $AB \perp BC$ omdat $m_{AB}.m_{BC} = \dfrac{1-9}{-6+2} \cdot \dfrac{-3-1}{2+6} = -1$

     waaruit onmiddellijk volgt dat de vierhoek een vierkant is.

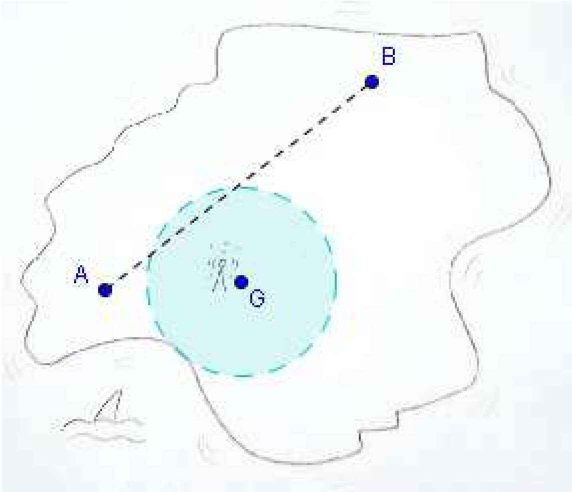
   - Stel de vergelijking op van de omgeschreven cirkel (cirkel door A, B, C en D).

     Het middelpunt van de cirkel is het midden van een diagonaal: $M\left(\dfrac{-2+2}{2}, \dfrac{9-3}{2}\right)$ of na vereenvoudiging $M(0,3)$, en de straal is $r = |MA| = \sqrt{(-2-0)^2 + (9-3)^2} = \sqrt{40}$, zodat de vergelijking wordt: $c \leftrightarrow (x-0)^2 + (y-3)^2 = \left(\sqrt{40}\right)^2$, of $c \leftrightarrow x^2 + y^2 - 6y - 31 = 0$.



2. Op een verlaten eiland met maar één GSM-zendmast rij je op een rechte baan van plaats $A(-7,-1)$ naar plaats $B(7,6)$ (waarbij de eenheden in kilometer zijn uitgedrukt). De zendmast heeft als coördinaat $G(3,-1)$, en heeft een bereik van $5\ km$.

   Over welke afstand ben je dan bereikbaar tijdens je tocht van plaats A naar plaats B? Rond af op de meter nauwkeurig. (★)



De vergelijking van 'de baan' is: $AB \leftrightarrow y = \frac{6+1}{7+7}(x+7)-1$ of nog $AB \leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Voor de 'bereikcirkel' geldt $c \leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 5^2$ of $c \leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$.

Het lijnstuk waar er bereik is wordt dus gegeven door de snijpunten van AB en c:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 5 \\ (2y-5)^2 + y^2 - 6(2y-5) - 15 = 0 \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

*: $(2y-5)^2 + y^2 - 6(2y-5) + 2y - 15 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 - 30y + 40 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \vee y = 4$

De snijpunten zijn dus $S_1(-1,2)$ en $S_2(3,4)$, zodat $|S_1S_2| = \sqrt{(3+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Antw.: Je zal over een afstand van $2\sqrt{5}$ km bereikbaar zijn. Dit is ongeveer 4,472 km.

3. Bepaal de vergelijking van de raaklijnen aan de cirkel $c \leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x - 4y + 19 = 0$, die door het punt $P(-1,3)$ gaan. (★★)

Het punt $P(-1,3)$ ligt buiten de cirkel, want $(-1)^2 + 3^2 + 8.(-1) - 4.3 + 19 = 9 > 0$.

De vergelijking van een rechte door P is $t \leftrightarrow y = m(x+1) + 3$ of dus $t \leftrightarrow mx - y + m + 3 = 0$.

Het middelpunt van de cirkel is $M(-4,2)$ en de straal is $r = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 - 19} = 1$.

De rechte t zal een raaklijn zijn als en slechts als de afstand van de rechte tot M, 1 is:

$$\begin{aligned} d(t,M) = r &\Leftrightarrow \frac{|m.(-4) - 2 + m + 3|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \\ &\Leftrightarrow |-3m+1| = \sqrt{m^2+1} \\ &\Leftrightarrow 9m^2 - 6m + 1 = m^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow 8m^2 - 6m = 0 \\ &\Leftrightarrow m = 0 \vee m = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

De raaklijnen hebben dus als vergelijking:

$t_1 \leftrightarrow y = 0.(x+1) + 3$, of nog $t_1 \leftrightarrow y = 3$.

$t_2 \leftrightarrow y = \frac{3}{4}.(x+1) + 3$, of nog $t_2 \leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$.

4. Zij gegeven de vier punten $A(1,8)$, $B(16,3)$, $C(3,-6)$ en $D(-12,-1)$. (★★★)

- Bewijs analytisch dat $ABCD$ een ruit is.

  $|AB| = \sqrt{(16-1)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{250} = 5.\sqrt{10}$.

  Analoog vind je dat $|BC| = |CD| = |DA| = 5\sqrt{10}$. Het is dus wel degelijk een ruit!

- Stel de vergelijking op van de ingeschreven cirkel (de cirkel die raakt aan alle zijden).

  Het middelpunt van de cirkel is natuurlijk het snijpunt (en het midden) van de diagonalen.

  Dit is dus het punt $(2,1)$. De straal van de cirkel wordt gegeven door de afstand van dit middelpunt tot één van de zijden (vermits het al die zijden raakt).

  Je rekent eenvoudig na dat $AB \leftrightarrow x + 3y - 25 = 0$, dus $r = \frac{|2+3.1-25|}{\sqrt{1^2+3^2}} = 2\sqrt{10}$.

  Dus is $c \leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2$, of nog: $c \leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y - 35 = 0$.