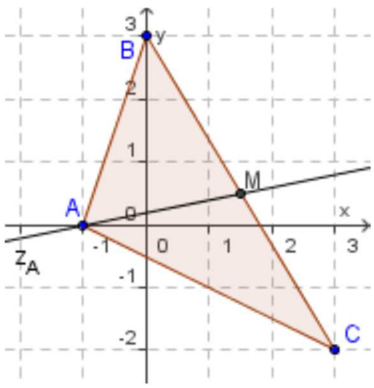
Extra opgaven analytische meetkunde (oplossingen)

A) *Inleiding*

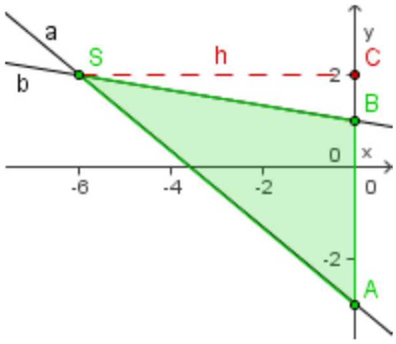
1. Gegeven is de driehoek ΔABC met $A(-1,0), B(0,3)$ en $C(3,-2)$. *(Toets 2007-2008)*
   - Teken deze driehoek in een gepast orthonormaal assenstelsel.
   - Bepaal het midden M van het lijnstuk $[BC]$.
   - Bepaal de vergelijking van de zwaartelijn uit A, en teken deze op je figuur.
   - Bepaal de lengte van het lijnstuk $[BC]$.
   - Bepaal de grootte van de hoek $\widehat{C}$ in deze driehoek tot op de seconde nauwkeurig.



- $M\left(\frac{0+3}{2},\frac{3+(-2)}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$
- $z_A \leftrightarrow y=\dfrac{\frac{1}{2}-0}{\frac{3}{2}-(-1)}\left(x-(-1)\right)+0$ of eenvoudiger $z_A \leftrightarrow y=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$
- $|BC|=\sqrt{(3-0)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{34}$
- $m_{BC}=\frac{-2-3}{3-0}=\frac{-5}{3}$ en $m_{AC}=\frac{-2-0}{3-(-1)}=\frac{-1}{2}$

$$\widehat{C}=\tan^{-1}(m_{AC})-\tan^{-1}(m_{BC})=\tan^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{-5}{3}\right)\approx 32°28'16"$$

2. De rechten $a \leftrightarrow 5x+6y+18=0$ en $b \leftrightarrow x+6y-6=0$ vormen samen met de y-as een driehoek. Bepaal de oppervlakte van deze driehoek.



$$\begin{cases}5x+6y+18=0\\x+6y-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{-5}{6}x-3\\y=\frac{-1}{6}x+1\end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases}x=-6\\y=2\end{cases}$$

$*: \frac{-1}{6}x+1=\frac{-5}{6}x-3 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x=-4 \Leftrightarrow x=-6$

De rechten snijden elkaar in het punt $S(-6,2)$.

Ze snijden de assen in de punten $A(0,-3)$ en $B(0,1)$.

Gebruiken we $|AB|=4$ als basis en dus $|CS|=6$ als hoogte, dan is de oppervlakte van de driehoek 12.

B) Loodrechte stand

3. Zij gegeven een punt $P(1,1)$ en een rechte $a \leftrightarrow 3x+4y-2=0$. Bereken de coördinaat van het voetpunt van de loodlijn l uit P op de rechte a.

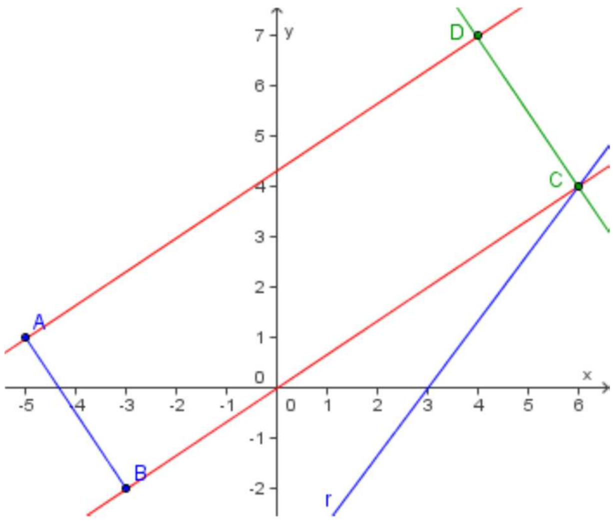
De vergelijking van a kunnen we herschrijven als $a \leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$.

$m_a=\frac{-3}{4} \overset{\perp}{\Leftrightarrow} m_l=\frac{4}{3}$. De loodlijn heeft dus vergelijking $l \leftrightarrow y=\frac{4}{3}(x-1)+1$, of nog $l \leftrightarrow y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$.

Het snijpunt van beide rechten is het gezochte voetpunt: $\begin{cases} y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2} \\ y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3} \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=\frac{1}{5} \end{cases}$. Dus $V\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$.

*: $-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{25}{12}x=-\frac{5}{6} \Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$.

4. Gegeven zijn twee punten $A(-5,1)$ en $B(-3,-2)$. Samen met de punten C en D vormen deze een rechthoek $\square ABCD$. Als je weet dat het punt C op de rechte $r \leftrightarrow 4x-3y-12=0$ ligt, bepaal dan de coördinaat van het punt D.



$m_{AB}=\frac{-3}{2} \Leftrightarrow m_{BC}=\frac{2}{3}$. Dus $BC \leftrightarrow y=\frac{2}{3}(x+3)-2$.

C is het snijpunt van BC en r, dus:

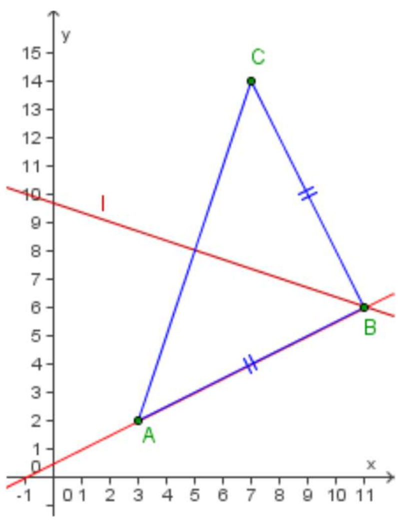
$\begin{cases} y=\frac{2}{3}x \\ y=\frac{4}{3}x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$. Dus $C(6,4)$.

$m_{CD}=m_{AB}=\frac{-3}{2}$. Dus $CD \leftrightarrow y=-\frac{3}{2}(x-6)+4$.

$m_{AD}=m_{BC}=\frac{2}{3}$. Dus $AD \leftrightarrow y=\frac{2}{3}(x+5)+1$.

$D(4,7)$ is het snijpunt van deze rechten (reken ook dit zelf eens na).

5. Voor de gelijkbenige driehoek ΔABC (met $|AB|=|BC|$) geldt $A(3,2)$ en $C(7,14)$. De richtings-coëfficiënt van AB is $\frac{1}{2}$. Bepaal de coördinaat van de top B.

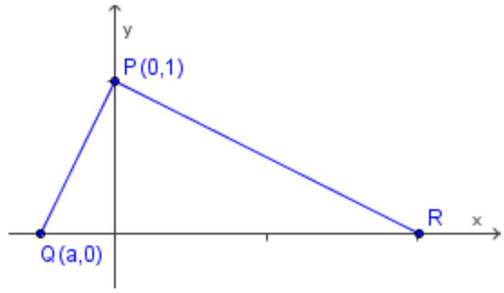


B is het snijpunt van de rechte AB en de middelloodlijn l van $[AC]$.

Reken zelf na dat geldt: $l \leftrightarrow y=\frac{-1}{3}x+\frac{29}{3}$ en $AB \leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Het snijpunt van deze rechten is $B(11,6)$, wat de oplossing is van het vraagstuk.

6. Zij gegeven het punt $P(0,1)$ op de y-as en het punt $Q(a,0)$ op de x-as, waarbij $a \in \mathbb{R}_0$. Verder is R een punt op de x-as zodat geldt dat $RP \perp PQ$. *(Examen 2004-2005)*

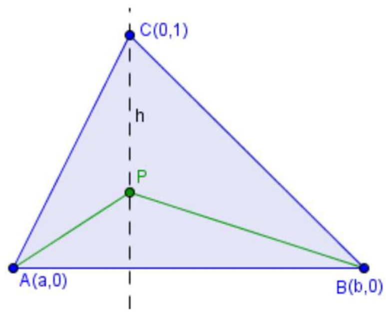


- Maak een duidelijke figuur.
- Bewijs dat $\left(-\frac{1}{a},0\right)$ de coördinaat is van R.
- Bereken het getal $a \in \mathbb{R}_0$ zodat $|QR| = 2,5$.
- $m_{PQ} = -\frac{1}{a} \overset{\perp}{\Leftrightarrow} m_{PR} = a$, dus de vergelijking wordt: $PR \leftrightarrow y = ax+1$.

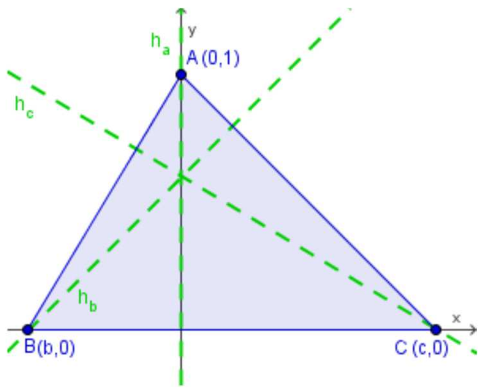
  Stellen we hierin $y=0$ dan vinden we $x = -\frac{1}{a}$. Het snijpunt met de x-as is dus $R\left(-\frac{1}{a},0\right)$.
- $|QR| = \left|a+\frac{1}{a}\right|$. De vergelijkingen die we moeten oplossen zijn dus $a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2}$ en $a+\frac{1}{a}=-\frac{5}{2}$.

  Deze vergelijkingen hebben de oplossingen $a=\frac{1}{2}$, $a=2$ en $a=-\frac{1}{2}$, $a=-2$.

7. In een driehoek ΔABC is P een willekeurig punt op de hoogtelijn h uit C. Bewijs dat $|AC|^2 - |BC|^2 = |AP|^2 - |BP|^2$.
   Kies het assenstelsel zodat de coördinaten worden als op de figuur.
   Dan geldt, als we voor P de coördinaat $P(0,p)$ kiezen:
   $|AC|^2 = a^2+1$, $|BC|^2 = b^2+1$, $|AP|^2 = a^2+p^2$ en $|BP|^2 = b^2+p^2$.
   Het gestelde is dan makkelijk na te rekenen ($LL = RL = a^2-b^2$)



8. Bewijs analytisch dat de drie hoogtelijnen van een driehoek concurrent zijn.
   Kies het assenstelsel zoals op de figuur.
   De rico's van de zijden zijn $m_{AB} = -\frac{1}{b}$, $m_{AC} = -\frac{1}{c}$ en $m_{BC} = 0$.
   De vergelijkingen van de hoogtelijnen zijn:
   $h_A \leftrightarrow x = 0$; $h_B \leftrightarrow y = c(x-b)$; $h_C \leftrightarrow y = b(x-c)$
   De rechten h_B en h_C snijden elkaar in het hoogtepunt $H(0,-bc)$.
   (reken dit zelf na). Het is duidelijk dat ook $H \in h_A$.



C) Afstand van een punt tot een rechte

9. Bereken hoe ver de oorsprong verwijderd ligt van de middelloodlijn van het lijnstuk met eindpunten $A(2,1)$ en $B(4,-3)$. *(Toets 2004-2005)*

De rico van AB wordt gegeven door $m_{AB}=\frac{1+3}{2-4}=-2$ dus de rico van een loodlijn op AB is $m_l=\frac{1}{2}$.

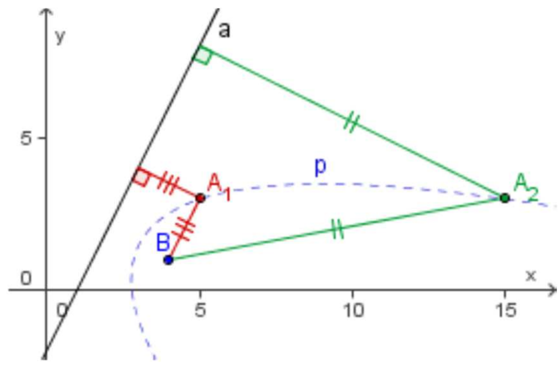
De middelloodlijn gaat ook door het midden $M(3,-1)$ en heeft dus vergelijking :

$l \leftrightarrow y+1=\frac{1}{2}(x-3)$, of anders geschreven: $l \leftrightarrow x-2y-5=0$.

De afstand tot de oorsprong wordt dan gegeven door: $d(l,O)=\frac{|0-2.0-5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

10. Bepaal $m\in\mathbb{R}$ opdat het punt $A(m,3)$ even ver verwijderd is van $B(4,1)$ als van de rechte a met vergelijking $2x-y-2=0$. *(Toets 2007-2008)*

$$
\begin{aligned}
d(A,B)=d(A,a) &\Leftrightarrow \sqrt{(m-4)^2+(3-1)^2}=\frac{|2.m-3-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}\\
&\Leftrightarrow \sqrt{5}.\sqrt{m^2-8m+20}=|2m-5|\\
&\Leftrightarrow 5m^2-40m+100=4m^2-20m+25\\
&\Leftrightarrow m^2-20m+75=0\\
&\Leftrightarrow m=5 \ \vee \ m=15
\end{aligned}
$$



Opm.: Deze punten A_1 en A_2 liggen op de parabool met brandpunt B en richtlijn a *(zie opmerking meetkundige plaatsen)*.

11. Bepaal de vergelijking van de rechten die door de oorsprong gaan en op afstand 5 liggen van het punt $P(1,7)$.

Rechten die door de oorsprong gaan hebben vergelijking $r \leftrightarrow y=mx \leftrightarrow \boxed{y-mx=0}$ of $\underbrace{r' \leftrightarrow x=0}_{\text{voldoet niet}}$.

$$d(r,P)=5 \Leftrightarrow \frac{|m.1-7|}{\sqrt{m^2+1^2}}=5 \Leftrightarrow |m-7|=5\sqrt{m^2+1}$$

Kwadrateren geeft : $m^2-14m+49=25m^2+25 \Leftrightarrow 24m^2+14m-24=0 \overset{vkv}{\Leftrightarrow} m=\frac{3}{4} \ \vee \ m=-\frac{4}{3}$.

De rechten die we zoeken zijn dus $r_1 \leftrightarrow y=\frac{3}{4}x$ en $r_2 \leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x$.

12. Bereken de coördinaten van de punten op de rechte $r \leftrightarrow x+y=6$ die gelijke afstanden hebben tot de rechten $a \leftrightarrow y=2x-1$ en $x+2y=3$.

Een punt op de rechte r kunnen we schrijven als $R(a,6-a)$.

Voor dit punt moet gelden dat de afstanden tot $a \leftrightarrow 2x-y-1=0$ en $b \leftrightarrow x+2y-3=0$ gelijk zijn:

$$d(R,a)=d(R,b) \Leftrightarrow \frac{|2a-(6-a)-1|}{\cancel{\sqrt{2^2+1^2}}}=\frac{|a+2(6-a)-3|}{\cancel{\sqrt{1^2+2^2}}}$$

$$\Leftrightarrow |3a-7|=|-a+9| \Leftrightarrow 3a-7=-a+9 \ \vee \ 3a-7=a-9 \Leftrightarrow a=4 \ \vee \ a=-1$$

De punten zijn dus $R_1(4,2)$ en $R_2(-1,7)$.