

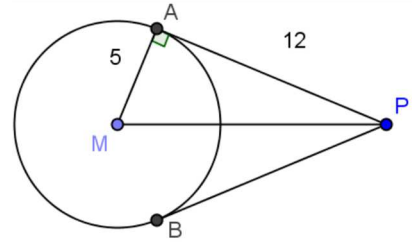
Extra oefeningen: de cirkel

1. Gegeven een cirkel met middelpunt M en straal $r = 5 \text{ cm}$. De lengte van de raaklijnstukken $[PA]$ en $[PB]$ uit een punt P aan deze cirkel bedraagt 12 cm . Bereken de afstand $|PM|$. (★)

$\triangle PAM$ is rechthoekig in \hat{A} , dus geldt:

$$|MP|^2 = |MA|^2 + |AP|^2 = 5^2 + 12^2 = 169$$

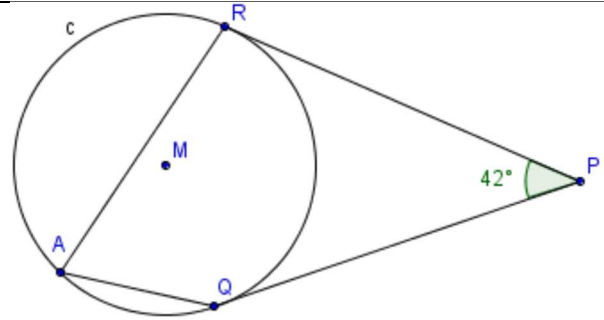
Dus $|MP| = 13$.



2. Uit een punt P trekt men de raaklijnstukken $[PQ]$ en $[PR]$ aan een cirkel $c_{(M,r)}$. De hoek die deze twee raaklijnstukken met elkaar maken is 42° groot.

A is een willekeurig punt op de grote boog \widehat{RQ} .

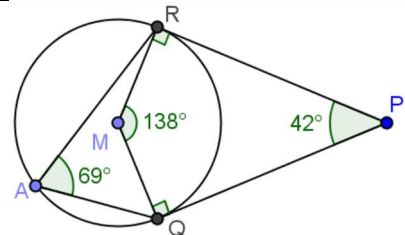
Bepaal de grootte van hoek \widehat{QAR} . (★★)



in de vierhoek $PRMQ$ zijn \hat{R} en \hat{Q} rechte hoeken. Dus geldt:

$$\widehat{RMQ} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

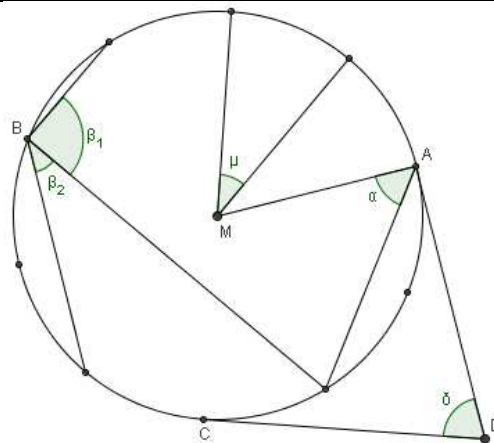
$$\widehat{RAQ} = \frac{1}{2} \widehat{RMQ} = 69^\circ \text{ (omtrekshoek op zelfde boog)}$$



3. Gegeven: cirkel $c_{(M,r)}$ die verdeeld is in 10 gelijke bogen (zie figuur) en $A, B, C \in c$. DC en DA zijn raaklijnen aan de cirkel c .

Gevraagd: De grootte van de hoeken $\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta$ en μ . Geef ook een korte verklaring van je antwoorden.

(★★)



$$\mu = 36^\circ \text{ (één tiende van een volledige cirkel)}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} 108^\circ = 54^\circ \text{ (omtrekshoek op 3 boogjes)}$$

$$\beta_1 = 90^\circ \text{ (omtrekshoek op een halve cirkel)}$$

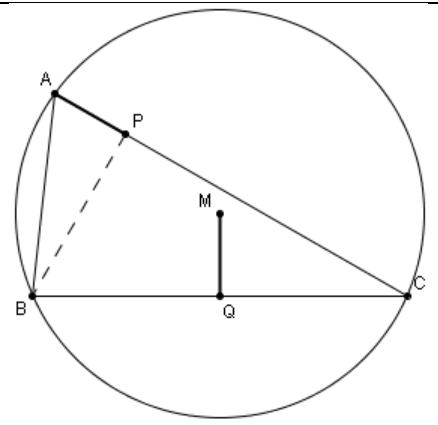
$$\beta_2 = \frac{1}{2} 72^\circ = 36^\circ \text{ (omtrekshoek op 2 boogjes)}$$

$$\delta = 72^\circ \text{ (in vierhoek DAMC zijn A en C rechte hoeken en is } \widehat{M} = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ \text{)}$$

4. Van een driehoek ABC is de zijde AB even lang als de straal van zijn omgeschreven cirkel.

BP is de loodlijn vanuit B op AC en MQ is de loodlijn vanuit het middelpunt M van de omgeschreven cirkel op BC (zie figuur).

Bewijs dat $|AP| = |MQ|$. (★★★)

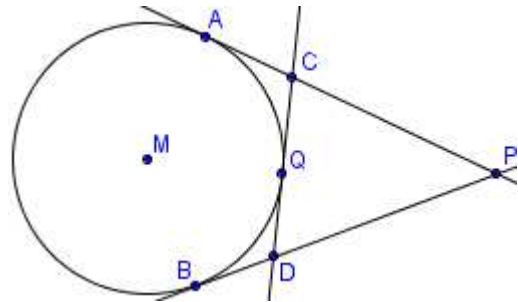


$$\left. \begin{array}{l} |BA| = |BM| \quad (=r, \text{ geg.}) \\ \widehat{APB} = \widehat{BQM} \quad (=90^\circ, \text{ geg.}) \\ \widehat{BAP} = \widehat{BMQ} \\ (\text{omtrekshoek} = \frac{1}{2} \text{middelpuntshoek op zelfde boog}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Delta APB \cong \Delta BQM \\ \Downarrow \\ |AP| = |MQ| \end{array}$$

5. Vanuit een punt P buiten een cirkel worden twee raaklijnstukken $[PA]$ en $[PB]$ getekend met lengte l .

De raaklijn uit een punt $Q \in \widehat{AB}$ snijdt $[PA]$ en $[PB]$ in respectievelijk de punten C en D .

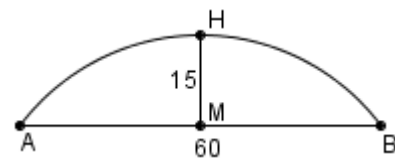
Toon aan dat de omtrek van ΔPCD dan gelijk is aan $2l$ (en dus onafhankelijk is van de ligging van Q). (★★)



Raaklijnstukken uit een punt aan een cirkel zijn gelijk. Dus $|CA| = |CQ|$, $|DB| = |QD|$ en $|PA| = |PB| = l$.

De omtrek is dan $P_{\Delta PCD} = |PC| + |CQ| + |QD| + |DP| = |PC| + |CA| + |DB| + |DP| = |PA| + |PB| = 2l$.

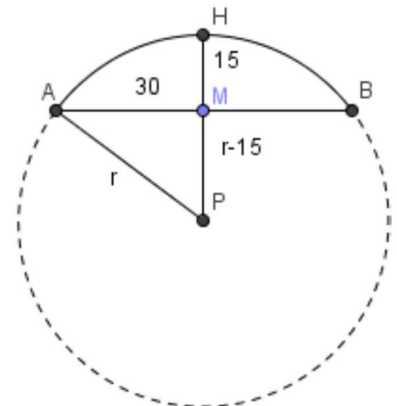
6. De koorde die bij een cirkelboog \widehat{AB} hoort meet 60 cm. De lengte van het lijnstuk dat het midden M van de koorde verbindt met het midden H van de cirkelboog bedraagt 15 cm. Bepaal de straal van de cirkel waarvan \widehat{AB} een boog is? (★★)



Teken eerst de cirkel volledig, noem het middelpunt P en de straal r .

In ΔAMP geldt de stelling van Pythagoras:

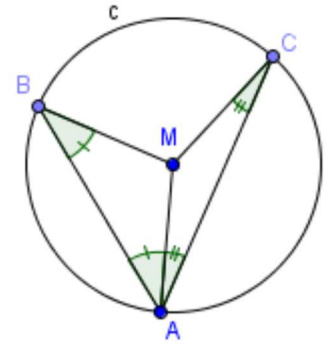
$$\begin{aligned} |AP|^2 &= |AM|^2 + |MP|^2 && \Leftrightarrow r^2 = 30^2 + (r-15)^2 \\ &&& \Leftrightarrow r^2 = 900 + r^2 - 30r + 225 \\ &&& \Leftrightarrow 30r = 1125 \\ &&& \Leftrightarrow r = 37,5 \end{aligned}$$



7. Beschouw een cirkel c met middelpunt M , en punten A , B en C op die cirkel zodat B en C aan weerskanten van MA liggen. Bewijs dat $\widehat{BAC} = \widehat{ABM} + \widehat{ACM}$. (★)

De driehoeken $\triangle ABM$ en $\triangle ACM$ zijn gelijkbenig, dus zijn hun basishoeken gelijk. En dus geldt:

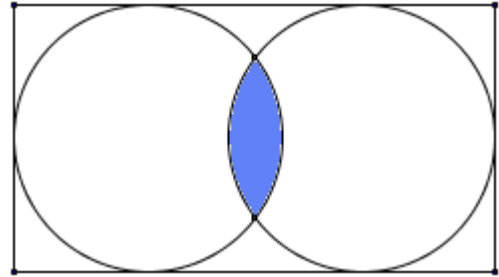
$$\widehat{BAC} = \widehat{BAM} + \widehat{MAC} = \widehat{ABM} + \widehat{ACM}.$$



8. In een rechthoek met lengte 9 cm en breedte 5 cm zijn twee cirkels getekend die raken aan drie zijden van de rechthoek (zie figuur).

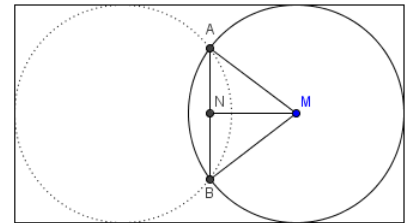
Bereken de oppervlakte van het deel waar beide cirkels overlappen, tot op 0,00001 cm² nauwkeurig.

(★★★★)



We splitsen de gevraagde oppervlakte verticaal op in twee gelijke delen. Elk zo'n deel is dan een cirkelsector zonder de corresponderende driehoek.

De stralen van de cirkels zijn 2,5 cm en de lengte $|MN|$ is 2 cm (leid dit zelf af!!). De lengte $|AN|$ is (Pythagoras) 1,5 cm.



$$\text{In } \triangle AMN \text{ geldt: } \cos \widehat{M}_1 = \frac{|MN|}{|AM|} = \frac{2}{2,5} \Rightarrow \widehat{M}_1 \approx 36^\circ 52' 12'', \text{ dus } \widehat{M} = 2 \cdot \widehat{M}_1 \approx 73^\circ 44' 23''$$

$$\text{De oppervlakte van de cirkelsector is dan } S_{\sphericalangle MAB} = \frac{\pi \cdot 2,5^2 \cdot 73^\circ 44' 23''}{360^\circ} \approx 4,02188.$$

$$\text{De oppervlakte van de driehoek is } S_{\triangle MAB} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

$$\text{De gevraagde oppervlakte is dus } S = 2 \cdot (S_{\sphericalangle MAB} - S_{\triangle MAB}) \approx 2,04376 \text{ (cm}^2\text{)}$$

9. Een concerthal is ontworpen in de vorm van een regelmatige vijfhoek met een zijde gelijk aan 36m.

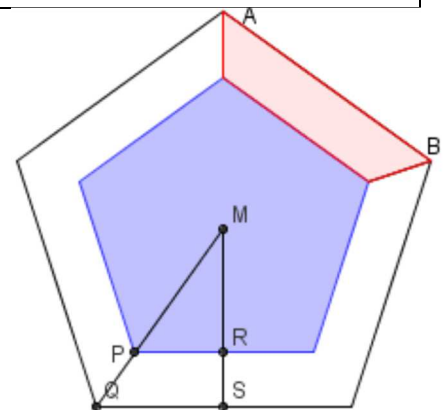
- Bereken de oppervlakte van de concerthal.

In driehoek $\triangle MPR$ geldt (figuur): $|PR| = 18$ en $\widehat{M} = 36^\circ$.

$$\text{Dus } r_{ch} = |MP| = \frac{|PR|}{\sin \widehat{M}} = \frac{18}{\sin 36^\circ} \approx 30,62343.$$

De oppervlakte van de concertzaal is dan (reg. 5-hoek):

$$S_{ch} \approx 5 \cdot 30,62343^2 \cdot \sin \frac{180^\circ}{5} \cdot \cos \frac{180^\circ}{5} \approx 2229,73871 \text{ (m}^2\text{)}$$



- Stel dat men rond deze hal een terras wil aanleggen met een breedte van 6,2m. Bewijs dat de zijde $[AB]$ van dit terras dan ongeveer 45m lang is.

$$\text{In } \triangle MPR \text{ geldt ook } |MR| = \frac{|PR|}{\tan \widehat{M}} = \frac{18}{\tan 36^\circ} \approx 24,77487.$$

$$\text{Dus } |MS| = |MR| + \underbrace{|RS|}_{=6,2} = 30,97487.$$

$$\text{In } \triangle MQS \text{ geldt } |QS| = |MS| \cdot \tan 36^\circ \approx 22,50456.$$

De zijden (zoals $[AB]$) zijn dus ongeveer 45 m lang.

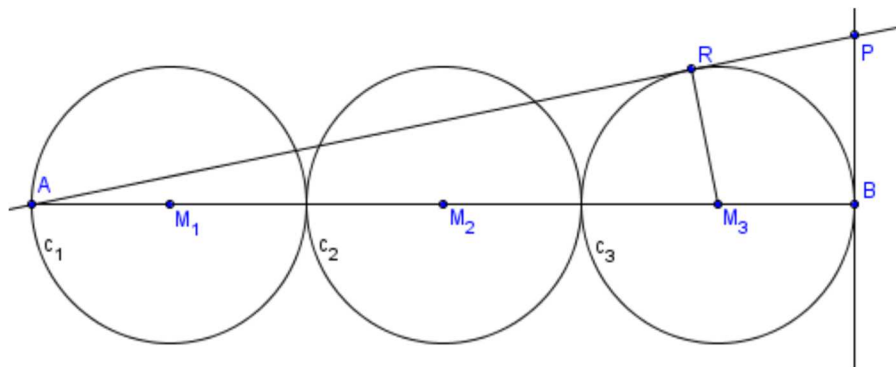
- Bereken dan ook de oppervlakte van dit terras.

Dit terras kan je delen in 5 trapezia

(met grote basis $B = 45$, kleine basis $b = 36$, en hoogte $h = 6,2$).

$$\text{Dus } S_{\text{terras}} = 5 \cdot S_{\text{trap}} = 5 \cdot \frac{B+b}{2} \cdot h = 5 \cdot \frac{45+36}{2} \cdot 6,2 \approx 1255,5$$

10. Gegeven zijn drie cirkels c_1, c_2, c_3 met straal 2 cm, die elkaar uitwendig raken. hun middelpunten M_1, M_2, M_3 liggen op $[AB]$, waarbij $A \in c_1$ en $B \in c_3$. Eén van de raaklijnen uit A aan c_3 snijdt de raaklijn in B aan c_3 in het punt P . Bereken de lengte $|BP|$. (zie figuur) (★★★)



Driehoeken $\triangle ARM_3$ en $\triangle ABP$ zijn gelijkvormig want ze hebben hoek \widehat{A} gemeenschappelijk en ook geldt dat $\widehat{B} = \widehat{R} = 90^\circ$ (raaklijnen staan loodrecht op de middellijn door het raakpunt).

$$\text{Dus geldt: } \frac{|BP|}{|RM_3|} = \frac{|AB|}{|AR|} \Leftrightarrow |BP| = \frac{|AB| \cdot |RM_3|}{|AR|} = \frac{12 \cdot 2}{\sqrt{96}} = \frac{24}{4\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

(Merk op dat in $\triangle ARM_3$ Pythagoras geeft dat $|AR| = \sqrt{|AM_3|^2 - |RM_3|^2} = \sqrt{10^2 - 2^2} = \sqrt{96}$)