Extra opgaven: elementaire functies

Opmerking: je maakt deze opgaven best zonder de hulp van je rekenmachine (op de toets zal dit ook niet toegelaten zijn).

1. Beschouw de functie $f : x \to \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$. (★⋆)

   a. Is deze functie even, oneven of geen van beide? Toon dit aan!

   $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{\sqrt{(-x)^2+1}} = \dfrac{-x^3}{\sqrt{x^2+1}} = -f(x)$, dus de functie is oneven!

   b. Welke symmetrie vertoont de grafiek van deze functie?

   Symmetrie om de oorsprong!

2. Is de functie $f : x \to \dfrac{3-2x}{6x-9}$ een homografische functie? ***Verklaar!*** (★)

   $f(x) = \dfrac{-2x+3}{6x-9}$

   $ad - bc = -2.(-9) - 3.6 = 0$, dus is het geen homografische functie!

3. Beschouw de functie $f : x \to \dfrac{-4x+10}{x-3}$. Geef aan hoe je de grafiek van f bekomt uit die van de hyperbool met functievoorschrift $h : x \to \dfrac{1}{x}$, benoem ook de transformaties. (★★⋆)

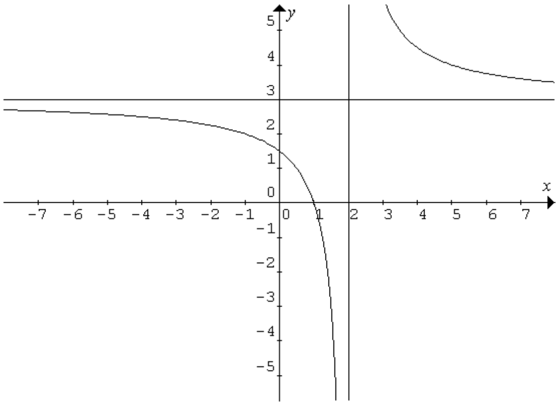
   $f(x) = \dfrac{-4(x-3)-2}{x-3} = -4 - \dfrac{2}{x-3}$

   $f_0(x) = \dfrac{1}{x} \xrightarrow{\vec{v}(3,0)} f_1(x) = \dfrac{1}{x-3} \xrightarrow{S_x} f_2(x) = -\dfrac{1}{x-3} \xrightarrow{u_y(2)} f_3(x) = -\dfrac{2}{x-3} \xrightarrow{\vec{v}(0,-4)} f_4(x) = -4 - \dfrac{2}{x-3}$

4. Vul de volgende tabel aan: *(je mag dat op dit blad doen)* (★)

1.	$x \to \sqrt[3]{x}$	
2.	$x \to \sqrt[3]{x+3}$	De grafiek wordt met 3 eenheden naar links geschoven
3.	$x \to \sqrt[3]{-x+3}$	De grafiek wordt gespiegeld om de y-as.
4.	$x \to \sqrt[3]{-x+3} - 2$	De grafiek wordt met 2 eenheden naar onder geschoven.
5.	$x \to 4.\sqrt[3]{-x+3} - 8$	De grafiek wordt met factor 4 uitgerokken langs de y-as.

5. Stel het functievoorschrift op van de hiernaast getekende hyperbool, die door het punt $(1,0)$ gaat. De twee getekende rechten zijn de horizontale asymptoot ($y=3$) en de verticale asymptoot ($x=2$) van deze functie. (★)



Optie 1:
Nulpunt $n=1$, pool $p=2$ en de horizontale asymptoot is $r=\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$

Dus $f(x)=3\cdot\frac{x-1}{x-2}=\frac{3x-3}{x-2}$.

Optie 2:

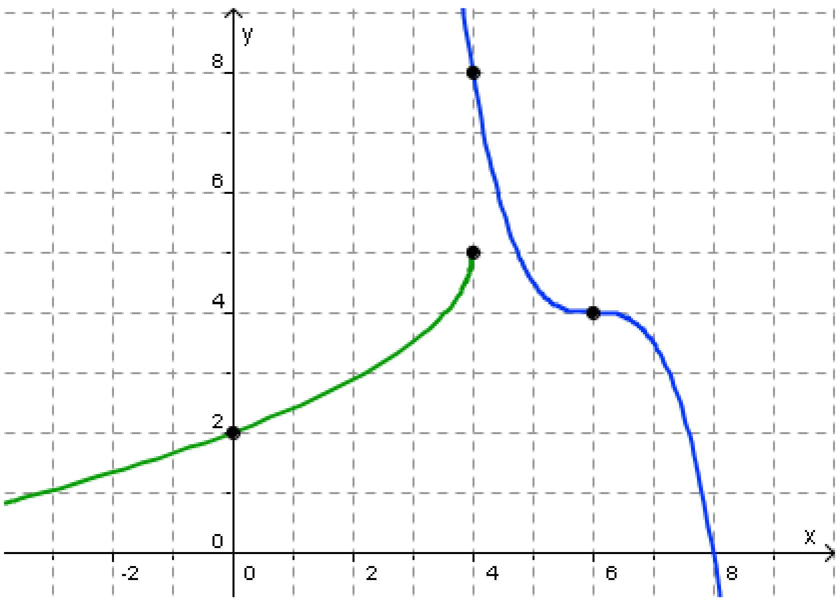
De hyperbool is bekomen door transformaties uit te voeren op de standaardhyperbool $f_0(x)=\frac{1}{x}$.

Er is niet gespiegeld, misschien verticaal gerekt met factor a en aan de asymptoten kan je zien dat er verschoven is volgens $\vec{v}(2,3)$.

Dus $f(x)=\frac{a}{x-2}+3$. Verder geldt: $(1,0)\in f \Leftrightarrow 0=\frac{a}{1-2}+3 \Leftrightarrow a=3$ zodat $f(x)=\frac{3}{x-2}+3$.

Op gelijke noemer zetten geeft $f(x)=\frac{3}{x-2}+\frac{3(x-2)}{x-2}=\frac{3x-3}{x-2}$.

6. Op de figuur hieronder zie je de grafieken getekend van de twee functies f_1 en f_2. Ze zijn bekomen door elementaire transformaties toe te passen op de functies $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$ of $f(x)=x^3$. Stel hun functievoorschriften op. (★★*)



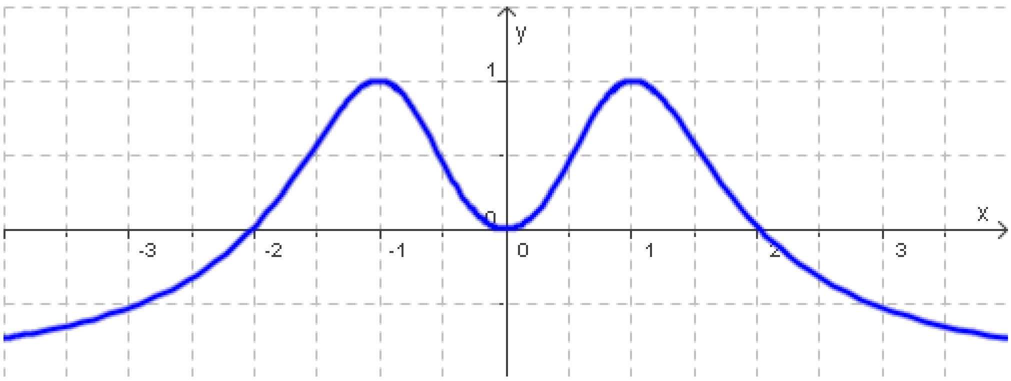
f_1 is bekomen door $f(x)=\sqrt{x}$ te spiegelen om de oorsprong, en te verschuiven volgens $\vec{v}(4,5)$. De rekfactor noemen we a. Dus $f_1(x)=-a\sqrt{-(x-4)}+5$.

$P(0,2)\in f_1 \Leftrightarrow -a\sqrt{-(0-4)}+5=2 \Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$. Het voorschrift is $\boxed{f_1(x)=-\frac{3}{2}\sqrt{-(x-4)}+5}$.

f_2 is bekomen door $f(x)=x^3$ te spiegelen om de x-as, en te verschuiven volgens $\vec{v}(6,4)$. De rekfactor noemen we a. Dus $f_2(x)=-a(x-6)^3+4$.

$P(4,8)\in f_2 \Leftrightarrow -a(4-6)^3+4=8 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$. Het voorschrift is $\boxed{f_2(x)=-\frac{1}{2}(x-6)^3+4}$.

7. Bespreek aan de hand van de grafiek het domein, het beeld, het tekenverloop, en het stijgen en dalen van deze functie: (*)



Tekenverloop:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	+	0	-	

Stijgen en dalen:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		↗	MAX (1)	↘	MIN (0)	↗	MAX (1)	↘	

Domein en beeld:

$dom\ f = \mathbb{R}$ en $bld\ f =]-\infty, 1]$

8. Bepaal algebraïsch het domein van de functie $f : x \rightarrow \dfrac{7x - \sqrt{21 + 4x - x^2}}{\sqrt{4x^2 - 7x - 2}}$. (★★*)

$$x \in dom\ f \Leftrightarrow \begin{cases} 21 + 4x - x^2 \geq 0 & \Big| \ nulpunten: \ -3 \ en \ 7 \\ 4x^2 - 7x - 2 > 0 & \Big| \ nulpunten: \ -1/4 \ en \ 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-3		$-1/4$		2		7	$+\infty$
$21 + 4x - x^2$	-		0	+	+	+	+	+	0	-
$4x^2 - 7x - 2$	+		+	+	0	-	0	+	+	+

$V = [-3, -1/4[\cup]2, 7]$