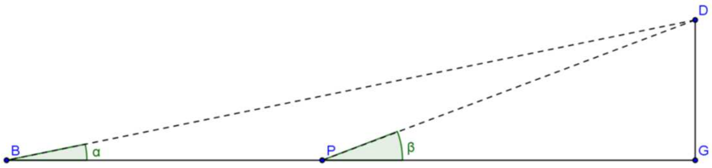
# Extra opgaven: Oplossen van willekeurige driehoeken

1. Als Patrick Goots naar goal trapt van aan de rand van de baklijn, dan ziet hij de goal onder een hoek van $\alpha = 8°24'43"$. Trapt hij vanop de penaltystip dan bedraagt die hoek $\beta = 12°30'24"$. De afstand tussen de baklijn en de penaltystip bedraagt $|BP| = 5,5\,m$. Bereken de hoogte van de goal $|GD|$, op de centimeter nauwkeurig.



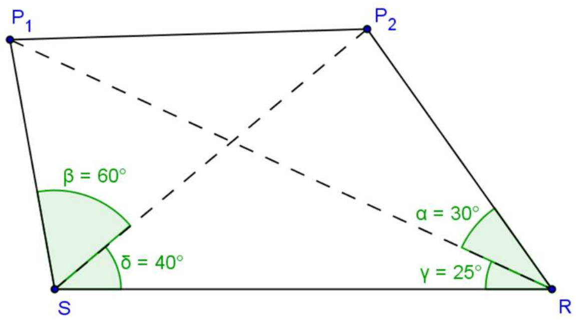

We berekenen eerst in driehoek $\Delta BPD$ de lengte van zijde $[PD]$ met de sinusregel. Daartoe hebben we eerst de hoeken in die driehoek nodig. We berekenen eenvoudig:

- $\widehat{BPD} = 180° - \beta = 167°29'36"$ en
  $\widehat{BDP} = 180° - \alpha - \widehat{BPD} = 180° - 8°24'43" - 167°29'36" = 4°05'41"$
- $\dfrac{|PD|}{\sin\alpha} = \dfrac{|BP|}{\sin\widehat{BDP}} \Leftrightarrow |PD| = \dfrac{5,5.\sin(8°24'43")}{\sin(4°05'41")} \cong 11,268$

In de rechthoekige driehoek kunnen we dan direct de hoogte van het doel $|GD|$ berekenen:

- $|GD| = |PD|.\sin\beta = 11,268.\sin(12°30'24") \cong 2,440$ → Antwoord: De goal is 2,44m hoog.

2. Koffi N'dri Romaric staat te scherp voor goal (onder een hoek $\alpha = 30°$), en besluit daarom een pass te geven naar Moussa Sanogo die minder scherp voor goal staat (onder hoek $\beta = 60°$). De lengte van de pass bedraagt $|RS| = 10\,m$. Verder zijn ook de hoeken $\gamma = 25°$ en $\delta = 40°$ gegeven (zie figuur). Bereken de breedte van de doelmond $|P_1P_2|$, op de millimeter nauwkeurig.




We berekenen eerst met de sinusregel in driehoek $\Delta RP_1S$ de lengte van de zijde $[P_1S]$:

- $\widehat{P_1SR} = \beta + \delta = 60° + 40° = 100°$, en
  $\widehat{SP_1R} = 180° - \widehat{SP_1R} - \gamma = 180° - 100° - 25° = 55°$.
- $\dfrac{|P_1S|}{\sin\gamma} = \dfrac{|RS|}{\sin\widehat{SP_1R}} \Leftrightarrow |P_1S| = \dfrac{10.\sin(25°)}{\sin(55°)} \cong 5,159$

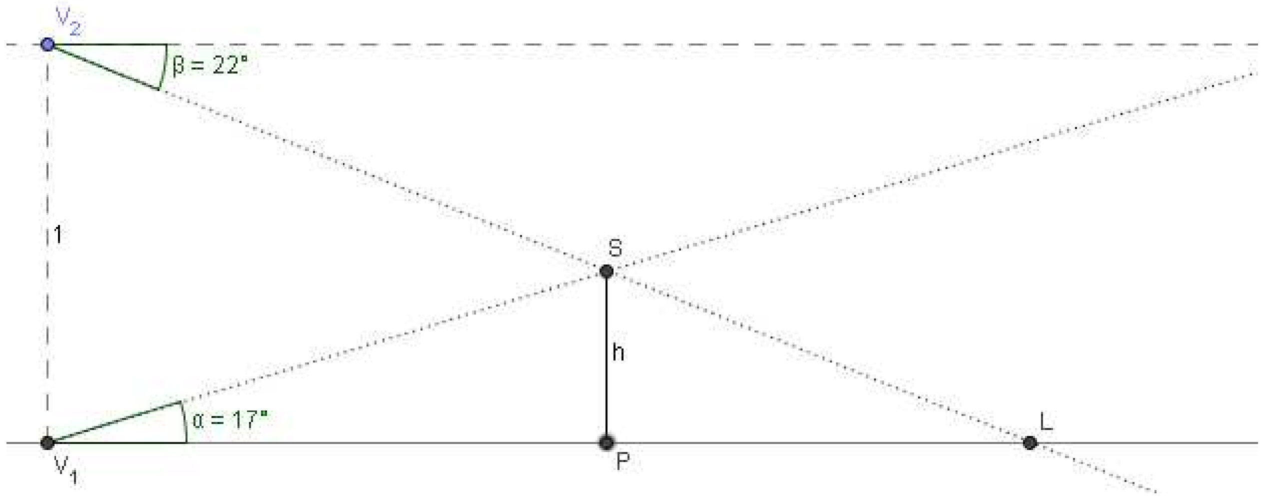
Analoog berekenen we met de sinusregel in driehoek $\Delta RP_2S$ de lengte van de zijde $[P_2S]$:

- $\widehat{P_2RS} = \alpha + \gamma = 30° + 25° = 55°$ en $\widehat{SP_2R} = 180° - \widehat{P_2RS} - \delta = 180° - 55° - 40° = 85°$.
- $\dfrac{|P_2S|}{\sin\widehat{P_2RS}} = \dfrac{|RS|}{\sin\widehat{SP_2R}} \Leftrightarrow |P_2S| = \dfrac{10.\sin(55°)}{\sin(85°)} \cong 8,223$

Dan kunnen we in driehoek $\Delta SP_1P_2$ met de cosinusregel de gevraagde lengte $|P_1P_2|$ berekenen:

- $|P_1P_2|^2 = |P_1S|^2 + |P_2S|^2 - 2.|P_1S|.|P_2S|.\cos\beta \cong 5,159^2 + 8,223^2 - 2.5,159.8,223.\cos 60°$,
  zodat: $|P_1P_2|^2 = 51,811 \Leftrightarrow |P_1P_2| \cong 7,198$ → Antwoord: de breedte van het doel is 7,198m.

3. Vliegtuig $V_1$ stijgt op onder een hoek van $\alpha = 17°$ en vliegtuig $V_2$ (dat exact 1 kilometer boven $V_1$ vliegt) is aan het landen onder een hoek van $\beta = 22°$ (zie figuur).
   - Op welke hoogte $h$ kan er een eventuele botsing gebeuren?
   - Welke afstand $|V_2L|$ moet vliegtuig $V_2$ nog afleggen alvorens het de grond raakt? *(beide op de centimeter nauwkeurig).*




Allereerst is duidelijk dat $\widehat{V_1V_2S} = 68°$, $\widehat{V_2V_1S} = 73°$ en dus $\widehat{V_1SV_2} = 39°$.

- In $\Delta V_1V_2S$ : $\dfrac{|V_1S|}{\sin \widehat{V_1V_2S}} = \dfrac{|V_1V_2|}{\sin \widehat{V_1SV_2}} \Leftrightarrow |V_1S| = \dfrac{|V_1V_2|.\sin \widehat{V_1V_2S}}{\sin \widehat{V_1SV_2}} = \dfrac{1.\sin 68°}{\sin 39°} = 1,47331$
- In $\Delta V_1PS$ : $\sin\alpha = \dfrac{h}{|V_1S|} \Leftrightarrow h = |V_1S|.\sin\alpha = 1,47331.\sin 17° = 0,43075$
- In $\Delta V_1V_2L$ : $\cos \widehat{V_1V_2L} = \dfrac{|V_1V_2|}{|V_2L|} \Leftrightarrow |V_2L| = \dfrac{|V_1V_2|}{\cos \widehat{V_1V_2L}} = \dfrac{1}{\cos 68°} = 2,66947$

Antwoord: de hoogte waarop een botsing kan gebeuren bedraagt 430,75m en de afstand die $V_2$ nog moet afleggen bedraagt 2669,47m.