Oplossingen extra oefeningen: rijen (leerstof RR, leerstof MR)

1. Beschouw de rij $(u_n) = 3, 5, 9, 17, 33, \ldots$. (★★)

   - Geef de volgende twee termen uit deze rij (u_6 en u_7).
   - Definieer deze rij (je mag kiezen tussen een expliciete of een recursieve definitie).
   - Bereken $\sum_{i=1}^{5}(i+u_i)$.

   ○ $u_6 = 65$ en $u_7 = 129$

   ○ Mogelijkheid 1: expliciet $\rightarrow u_n = 2^n + 1$

   Mogelijkheid 2: recursief $\rightarrow u_1 = 3\,; \quad u_{n+1} = 2.u_n - 1$

   Mogelijkheid 3: recursief $\rightarrow u_1 = 3\,; \quad u_{n+1} = u_n + 2^n$

   ○ $\sum_{i=1}^{5}(i+u_i) = (1+u_1)+(2+u_2)+(3+u_3)+(4+u_4)+(5+u_5)$

   $= (1+3)+(2+5)+(3+9)+(4+17)+(5+33) = 82$

2. Gegeven: $(-5)+(-3)+(-1)+1+3+\ldots+u_n = 475$. (★★)

   Waaraan is de term u_n gelijk? Uit hoeveel termen bestaat deze som?

   Het is een R.R. dus $s_n = \dfrac{n.(u_1+u_n)}{2} = \dfrac{n.(-5-5+(n-1).2)}{2} = -6n+n^2$.

   De vergelijking wordt dus: $-6n+n^2 = 475 \Leftrightarrow n^2-6n-475 = 0 \Leftrightarrow n = -19 \ \vee \ n = 25$.

   Vermits $n \in \mathbb{N}$ is dus $n = 25$ en dan is $u_n = -5+24.2 = 43$.

3. ***(toets 2008-2009)*** Beschouw de som $S = -214-210-206-\ldots+218+222+226$ \m/ (★★)

   - Bereken S.
   - Schrijf deze som met het Σ-teken.
   - Op de hoeveelste plek staat de term 2 ?

   ○ De algemene term van de rij is $u_n = u_1 + (n-1).v = -214+(n-1).4 = -218+4n$.

   Het aantal termen vinden we dus door te stellen $226 = -218+4n \ \Leftrightarrow \ n = 111$.

   De som is dan: $S = \dfrac{n(u_1+u_n)}{2} = \dfrac{111(-214+226)}{2} = \boxed{666}$

   ○ We hebben alle gegevens al die we nodig hebben, dus $S = \sum_{i=1}^{111}(-218+4i)$

   ○ We berekenen: $-218+4n = 2 \ \Leftrightarrow \ n = 55$, dus de term 2 staat op de 55[e] plaats.

4. Bepaal de som van de eerste 55 termen van de rij $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{4}, \ldots$ (★★)

Alles op gelijke noemer zetten geeft: $-\frac{4}{20}, -\frac{1}{20}, \frac{2}{20}, \frac{5}{20}, \ldots$ het is dus een R.R. met $v = \frac{3}{20}$.

$$s_{55} = 55.\frac{u_1 + u_{55}}{2} = 55.\frac{u_1 + u_1 + 54.v}{2} = 55.\frac{\frac{-1}{5} + \frac{-1}{5} + 54.\frac{3}{20}}{2} = 211{,}75.$$

De expliciete definitie van deze rij is: $u_n = \frac{-1}{5} + (n-1).\frac{3}{20} = -\frac{7}{20} + n.\frac{3}{20} = \frac{-7+3n}{20}$.

In Σ-notatie is de som dus gelijk aan: $s_{55} = \sum_{i=1}^{55}\left(\frac{-7+3n}{20}\right)$.

5. Bereken tot op 2 cijfers na de komma nauwkeurig: $245.\sum_{k=18}^{37}(-0{,}9)^k$. (★*)

$$245.\sum_{k=18}^{37}(-0{,}9)^k = 245.\underbrace{\left((-0{,}9)^{18} + (-0{,}9)^{19} + \ldots + (-0{,}9)^{37}\right)}_{\text{M.R. met } q=-0{,}9 \text{ en } 20 \text{ termen}} = 245.\left((-0{,}9)^{18}.\frac{(-0{,}9)^{20} - 1}{-0{,}9 - 1}\right) \approx 17$$

6. Bepaal x en y zodat de rij $y - x,\quad 2x+3,\quad 11,\quad 7x+1$ een rekenkundige rij vormt. (★*)

Kijk je eerst naar de laatste drie termen, dan moet $11 = \frac{2x+3+7x+1}{2} \Leftrightarrow x = 2$

Dan wordt de rij $y-2,\quad 7,\quad 11,\quad 15$ en dus moet $y - 2 = 3 \Leftrightarrow y = 5$.

7. Vijf termen vormen een rekenkundige rij. De som van de eerste en de laatste term is 4, en het product van de middelste drie termen is –24. Wat zijn de 5 termen van deze rij? (★★*)

Noem die termen $a-2v$, $a-v$, a, $a+v$ en $a+2v$ dan geldt:

$$\begin{cases}(a-2v)+(a+2v)=4\\(a-v).a.(a+v)=-24\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\(2-v).2.(2+v)=-24\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\v^2=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\v=4 \text{ of } v=-4\end{cases}$$

De 5 termen zijn dus –6, -2, 2, 6 en 10.

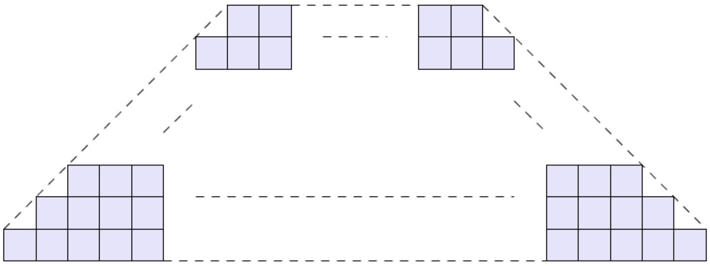
8. Van een rekenkundige rij (u_n) weten we dat de som van de eerste 3 termen 12 is, en dat de termen u_1, u_2 en u_6 een meetkundige rij vormen. Wat zijn de eerste 7 termen van deze rij? (★★★)

$$\begin{cases}u_1+u_2+u_3=12\\u_2^2=u_1.u_6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1+u_1+v+u_1+2v=12\\(u_1+v)^2=u_1.(u_1+5v)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1=4-v\\(4-v+v)^2=(4-v).(4-v+5v)\end{cases}.$$

Na vereenvoudiging wordt de tweede vergelijking: $4v^2 - 12v = 0 \Leftrightarrow v = 0 \vee v = 3$.

De eerste 6 termen van de gevraagde rij zijn dus: $1, 4, 7, 10, 13, 16$.

9. 10000 kubussen, met een ribbe van 5 cm, worden gestapeld in de vorm van een trapezium op een wijze zoals voorgesteld in de figuur. (★★*)
   - Wat zal de hoogte zijn van de constructie als men aan de basis begint met 204 blokken?
   - Hoeveel blokken liggen er dan op de bovenste laag?



   - Het aantal blokken op een rij vormt een rekenkundige rij met $u_1 = 204$; $s_n = 10000$; $v = -2$

     Wat je niet kent in deze rij is het aantal termen (n), wat overeenkomt met het aantal rijen blokken.

     $$s_n = n\left(\frac{u_1 + u_n}{2}\right) = n\left(\frac{u_1 + u_1 + (n-1)v}{2}\right) = n\left(\frac{408 + (n-1).(-2)}{2}\right) = n\left(\frac{410 - 2n}{2}\right) = 205n - n^2$$

     Dus dit geeft de vierkantsvergelijking $n^2 - 205n + 10000 = 0$ met oplossingen $n = 80$ en $n = 125$ waarvan enkel $n = 80$ mogelijk is (zie volgende vraag). De hoogte bedraagt dus 4m.

   - Dit is eigenlijk de laatste term in de rij, dus u_n.

     In het geval $n = 80 \rightarrow u_{80} = u_1 + 79.v = 204 + 79.(-2) = 46$. Op de bovenste rij 46 blokken.

     In het geval $n = 125 \rightarrow u_{125} = u_1 + 124.v = 204 + 124.(-2) = -44$, wat niet mogelijk is.

10. In de rij met expliciet voorschrift $u_n = 19n - 100$ is één van de termen gelijk aan de som van de eerste 20 termen van deze rij. De hoeveelste term is dit? (★★)

$$s_{20} = \overbrace{-81 - 62 - 43 - ... + 280}^{RR} = 20.\frac{-81 + 280}{2} = 1990.$$

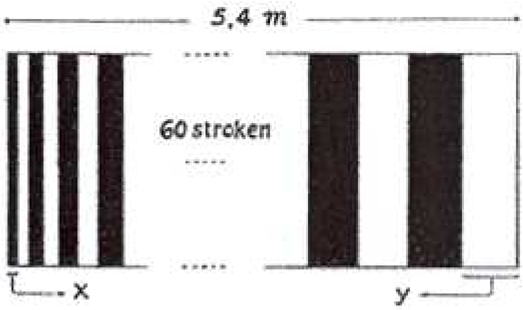
$$u_n = 1990 = 19n - 100 \Leftrightarrow n = 110.$$

Antwoord: de 110^e^ term is gelijk aan de som van de eerste 20 termen.

11. Bepaal het rekenkundige en het meetkundige gemiddelde van 14 en 56. (*)

$$RG = \frac{14 + 56}{2} = 35, \quad MG = \sqrt{14.56} = 28$$

12. Op een muur van 5,4m breed wil men 60 strepen schilderen, afwisselend wit en zwart.
Elke volgende streep moet 2mm breder zijn dan de vorige.
Bereken de breedte van de eerste streep (x), en van de laatste streep (y).(★★)



De breedtes van de strepen vormen een rekenkundige rij met $n = 60$ *termen, verschil* $v = 2$ *en als som* $s_n = 5400$ *(want* $5,4m = 5400mm$ *). Zo vinden we:*

$$s_{60} = 5400 \Leftrightarrow n.\frac{u_1 + u_n}{2} = 5400 \Leftrightarrow 60.\frac{u_1 + u_1 + 59.2}{2} = 5400 \Leftrightarrow u_1 = 31,$$

en dus ook $u_{60} = 31 + 2.59 = 149$.

Antwoord: De eerste streep moet 31 mm breed zijn, de laatste streep 149 mm breed.

13. Er komt een nieuw spel op TV: *'Euro-jackpot'*. Het gaat als volgt: als je de eerste vraag juist beantwoordt, krijg je €0,01. Als je de tweede vraag juist beantwoordt krijg je €0,02 (en heb je dus in totaal al €0,03). Als je de derde vraag goed beantwoordt krijg je €0,04 (in totaal al €0,07)… de bedragen per vraag worden telkens verdubbeld. Clement doet mee en beantwoordt 20 vragen op rij juist. Hoeveel € heeft Clement dan in totaal gewonnen ? (★⋆)

Clement wint $\underbrace{0,01 + 0,02 + 0,04 + \ldots}_{\text{M.R. met } q=2 \text{ en } 20 \text{ termen}} = 0,01\frac{2^{20} - 1}{2 - 1} = 10485,75$.

Clement wint dus € 10485,75.

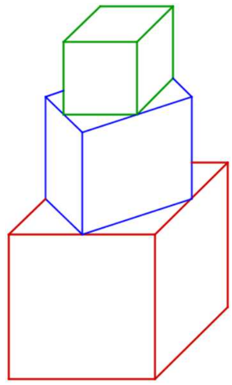
14. Bereken $\sum_{k=1}^{10}\left(1 + 2^k - 3k\right)$. (★★⋆)

$$\sum_{k=1}^{10}\left(1 + 2^k - 3k\right) = \sum_{k=1}^{10} 2^k + \sum_{k=1}^{10}\left(1 - 3k\right) = \overbrace{\left(2 + 4 + 8 + \ldots + 1024\right)}^{MR} + \overbrace{\left(-2 - 5 - 8 - \ldots - 29\right)}^{RR}.$$

en dus is $\sum_{k=1}^{10}\left(1 + 2^k - 3k\right) = 2.\frac{2^{10} - 1}{2 - 1} + 10.\frac{-2 - 29}{2} = 2046 - 155 = 1891$.

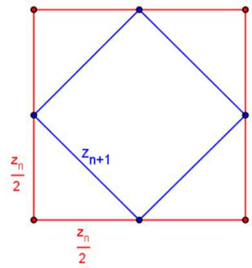
15. Robbe maakt een toren blokjes op de manier zoals hiernaast afgebeeld. De hoekpunten van het ondervlak van een kubus vallen altijd samen met de middens van de ribben van het bovenvlak van de kubus waar hij opstaat (zie figuur). (★★★*)

De onderste kubus heeft een ribbe van 6 cm lang.



- Toon aan dat de ribbe van de tweede kubus $3\sqrt{2}$ cm is.
- Bereken de ribbe van de derde kubus.
- Als Robbe op deze manier blijft verder bouwen, hoe hoog zou een toren dan zijn met 10 blokken?
- Bereken het volume van die toren met 10 blokken.
- *Bonus: hoe hoog is de toren mocht Robbe zo oneindig veel blokjes stapelen!?*

o We bekijken de structuur van twee opeenvolgende kubussen in bovenaanzicht (zie figuur hiernaast). Passen we Pythagoras toe, dan vinden we



$$z_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{z_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{z_n}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{z_n^2}{2}} = \frac{z_n}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot z_n .$$

De zijden vormen dus een meetkundige rij met quotiënt $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

De ribbe van de tweede kubus is dus $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} z_1 = 3\sqrt{2}$.

o De ribbe van de derde kubus is $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} z_2 = 3$

o Om de hoogte van die toren te berekenen moeten we de som van de eerste 10 ribben maken: $s_{10} = u_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 6 \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1} \approx 19,85$

o Ook de volumes van de opeenvolgende kubussen vormen een MR, want uit $z_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot z_n$ volgt onmiddellijk ook dat $z_{n+1}^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot z_n\right)^3 \Leftrightarrow z_{n+1}^3 = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot z_n^3$.

De som van de volumes is dus $s_{10} = u_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 216 \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{10} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{4} - 1} \approx 334,12$