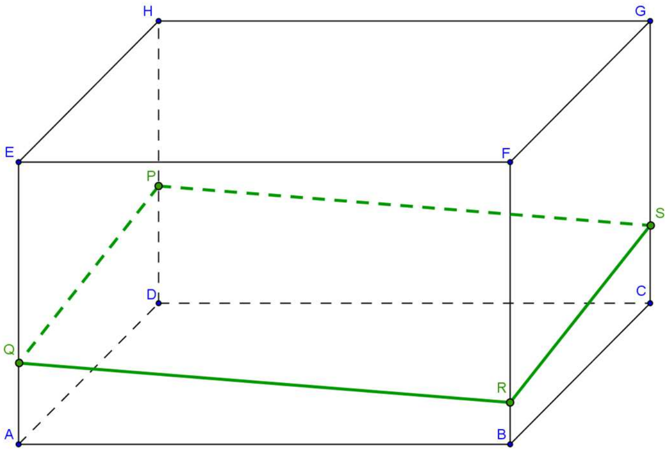
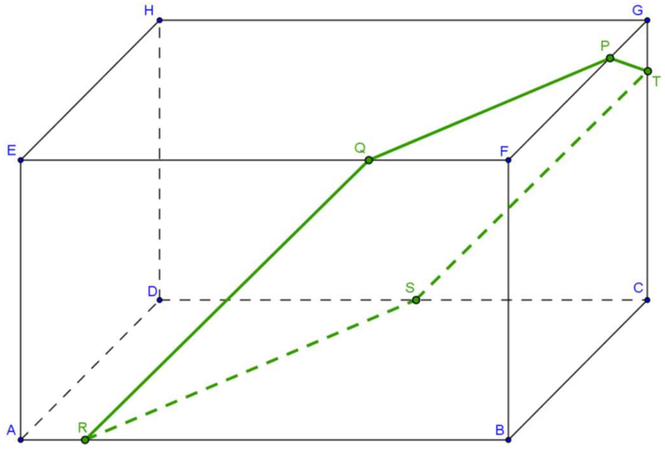
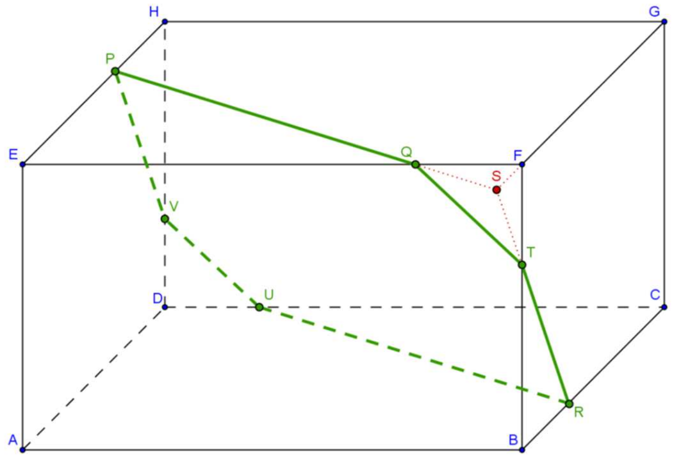
Extra opgaven ruimtemeetkunde

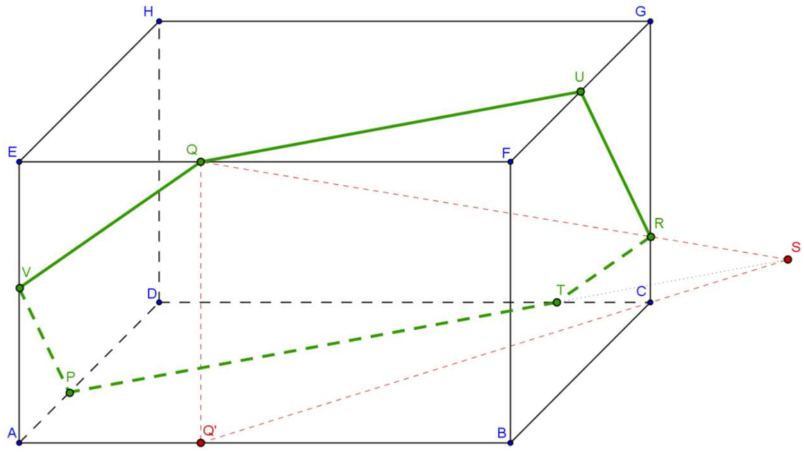
I. Doorsnede van een vlak met een ruimtelichaam

1. Bepaal telkens de doorsnede van de balk met het vlak bepaald door P , Q en R . (★★)



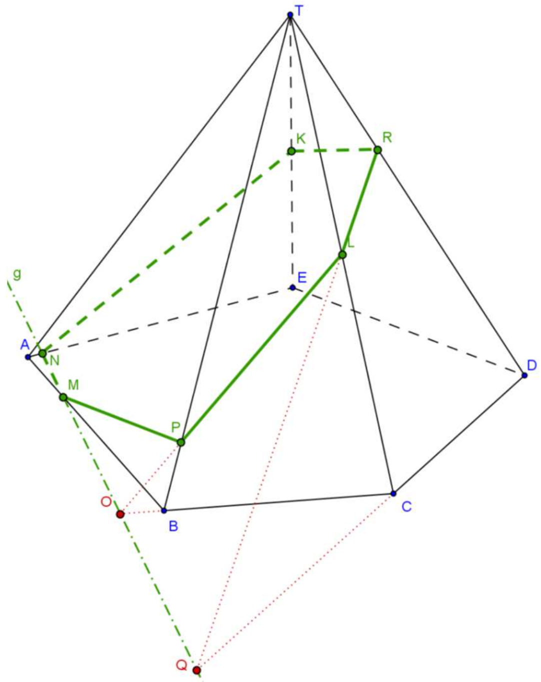




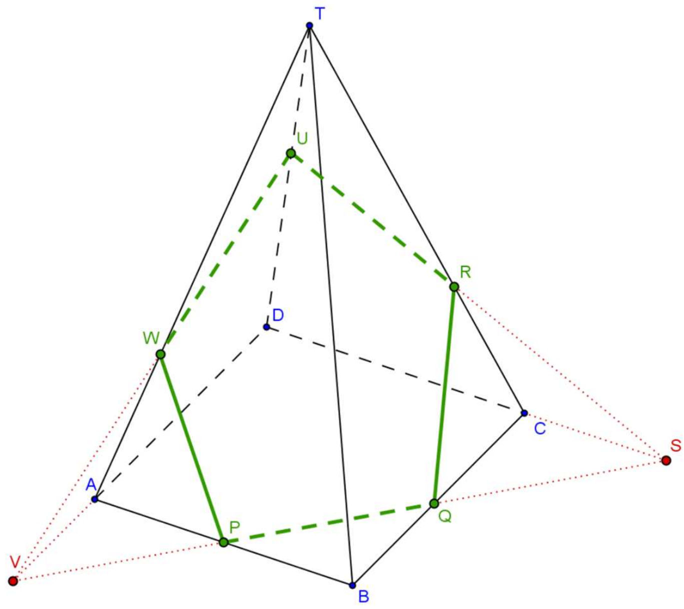


2. Op de figuur hieronder geldt dat K het midden is van $[TE]$ en L het midden is van $[TC]$. Bepaal de doorsnede van de piramide met het vlak KLM . (★★★)

(hint: de snijlijn met het grondvlak is evenwijdig aan KL)

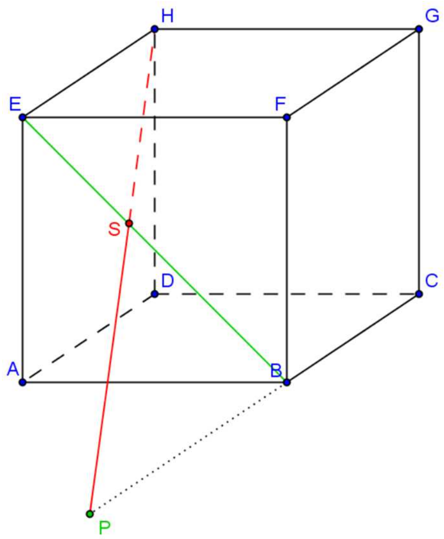


3. Bepaal de doorsede van de piramide met PQR . (★★)

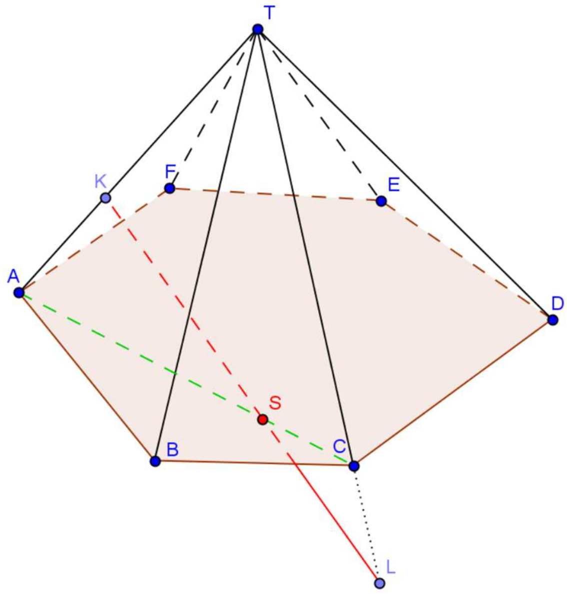


II. Doorboringen van een rechte met een vlak

1. Bepaal het snijpunt van de rechte PH met het voorvlak ABFE van de kubus. Kies daarvoor een gepast hulpvlak. (★★)



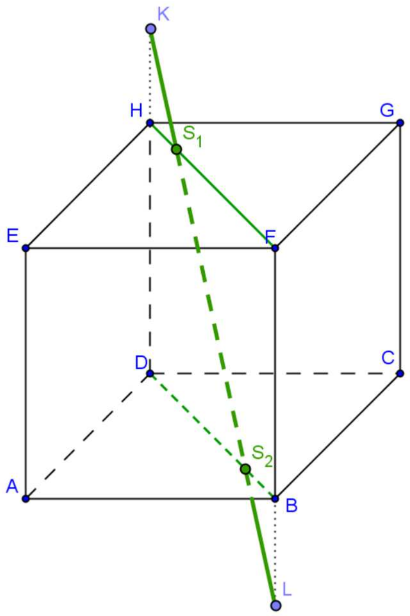
2. Bepaal het snijpunt van de rechte KL met het grondvlak ABCDFE van de piramide. Kies daarvoor een gepast hulpvlak. (★★)



3. Voor de punten K en L geldt $K \in DH$ en $L \in BF$.

Bepaal de snijpunten S_1 en S_2 van het lijnstuk KL met respectievelijk het bovenvlak en het ondervlak van de kubus. (★★)

Teken dan dit lijnstuk $[KL]$ op de figuur, rekening houdend met de zichtbaarheid. (★)



III. Hoeken en afstanden in de ruimte

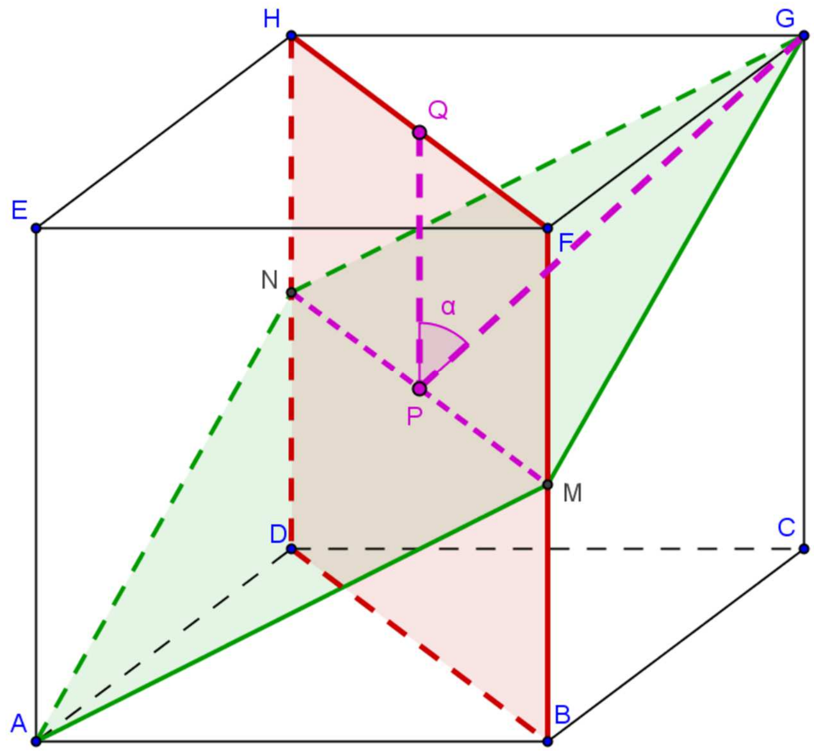
1. In de kubus hiernaast is M het midden van $[BF]$, en N het midden van $[DH]$.

- Teken de snijlijn van de vlakken $AMGN$ en $BFHD$ op de figuur. (★)

  Dit is de rechte MN op de figuur.

- Teken op de figuur een hoek tussen beide vlakken (denk aan de definitie van de hoek tussen twee vlakken). (★★)

  Dit is de hoek α op de figuur. (P is het midden van $[MN]$ en Q is het midden van $[FH]$)



- Bewijs dat de hoek die jij getekend hebt voldoet aan de eisen van de definitie. (★)

  $PQ \perp MN$ want $PQHN$ is een vierkant. en $PG \perp MN$ want $[PG]$ is een zwaartelijn (en dus ook hoogtelijn) op de basis van de gelijkbenige driehoek ΔMNG. $\alpha = \widehat{GPQ}$ is dus de hoek tussen de vlakken.

- Bereken die hoek. (★★)

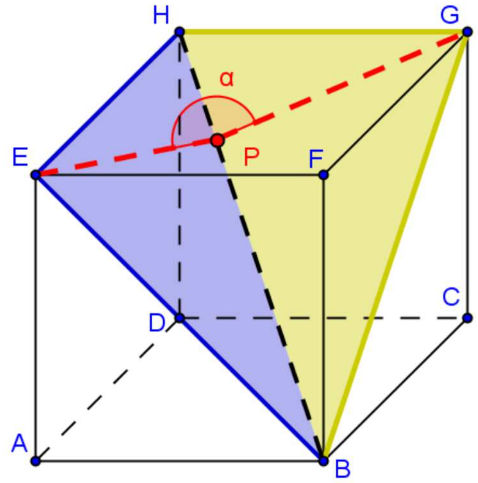
  Noemen we de ribbe van de kubus 1 dan is $|PQ| = \frac{1}{2}$ en $|PG| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dan geldt in de rechthoekige driehoek ΔGPQ dat $\cos\alpha = \cos\widehat{GPQ} = \frac{|PQ|}{|PG|} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, zodat uiteindelijk $\alpha = \widehat{GPQ} \approx 54°44'08"$.

2. Bereken op de vorige figuur de hoek tussen de kruisende rechten GN en FH. (★★)

   We weten dat $FH \parallel MN$ dus $\left(\widehat{GN, FH}\right) = \left(\widehat{GN, MN}\right) = \widehat{GNM} = \widehat{GNP}$. In de rechthoekige driehoek ΔGNP geldt: $\tan\widehat{GNP} = \frac{|GP|}{|NP|} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, dus $\widehat{GNP} \approx 50°46'07"$.

3. Bereken in de kubus hiernaast de hoek tussen de vlakken BHE en BHG. (★★★)

Hint: Neem het punt P op HB zodat $GP \perp BH$ en $EP \perp BH$, zodat $\left(\widehat{BHE, BHG}\right) = \widehat{EPG}$.



De driehoeken ΔBEH en ΔBGH zijn duidelijk rechthoekig en onderling congruent. Het komt er op aan in deze driehoeken de hoogte op de schuine zijde te berekenen.

Noem voor de eenvoud de ribbe van de kubus 1.

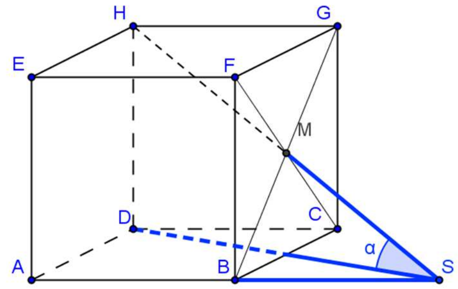
In ΔBEH geldt: $|HE|.|EB| = |BH|.|EP|$, waaruit volgt:

$$|EP| = \frac{|HE|.|EB|}{|BH|} = \frac{1.\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Uit de congruentie volgt natuurlijk dat ook $|GP| = \frac{\sqrt{6}}{3}$. De cosinusregel in ΔEPG geeft:

$$\cos\alpha = \cos\widehat{EPG} = \frac{|EP|^2 + |PG|^2 - |EG|^2}{2.|EP|.|PG|} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 2}{2.\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}} = -\frac{1}{2}$$. De gezochte hoek is dus 120°

4. Op de figuur hiernaast is M het midden van het rechterzijvlak van de getekende kubus.



- Bepaal op de figuur hiernaast waar de rechte HM door het grondvlak van de kubus gaat. (★)

  Dit is punt S op de figuur.

  Het is duidelijk dat zowel HM als AB in het diagonaalvlak $ABGH$ liggen.
- Duid op de figuur de juiste hoek aan die de rechte HM maakt met het grondvlak. (★)

  De loodrechte projectie van $[HS]$ op het grondvlak is $[DS]$, dus de hoek is $\alpha = \widehat{DSH}$.
- Bereken deze hoek. (★★)

  We noemen voor de eenvoud de ribbe van de kubus 1.

  In ΔDAS geldt wegens Pythagoras dat $|DS| = \sqrt{5}$.

  Dan geldt in de rechthoekige driehoek ΔDSH dat :

  $\tan\alpha = \tan\widehat{DHS} = \frac{|DH|}{|DS|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, waaruit onmiddellijk volgt dat $\alpha = 24°05'41''$.