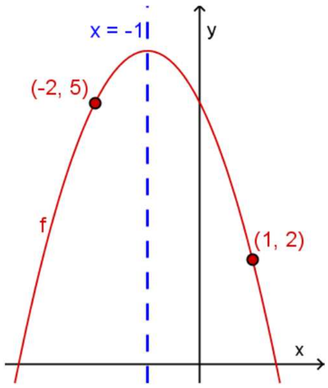
Extra opgaven: tweedegraadsfuncties

1. De grafiek hiernaast stelt een tweedegraadsfunctie voor. Bepaal het functievoorschrift. Je mag enkel gebruik maken van de gegevens die uitdrukkelijk aangegeven zijn. Voor het oplossen van eventuele stelsels mag je de GRM gebruiken. (★★)



Stel $p \leftrightarrow y=a\left(x+1\right)^2+\beta$ (want $\alpha=-1$)

Punt $P\left(-2,5\right)\in p \Leftrightarrow 5=a\left(-2+1\right)^2+\beta \Leftrightarrow a+\beta=5$

Punt $Q\left(1,2\right)\in p \Leftrightarrow 2=a\left(1+1\right)^2+\beta \Leftrightarrow 4\,a+\beta=2$

We lossen het stelsel op: $\begin{cases} a+\beta=5 \\ 4\,a+\beta=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=5-a \\ \beta=2-4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=5-a \\ 5-a=2-4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=6 \\ a=-1 \end{cases}$

De vergelijking van de parabool wordt dus: $p \leftrightarrow y=-\left(x+1^2\right)+6$, of nog eenvoudiger $p \leftrightarrow y=-x^2-2x+5$.

2. Bepaal de snijpunten van de parabolen: $\begin{cases} P_1: \quad y=3x^2+2x-2 \\ P_2: \quad y=-x^2-2x+1 \end{cases}$.

Gelijkstellen geeft: $3x^2+2x-2=-x^2-2x+1 \Leftrightarrow 4x^2+4x-3=0 \overset{\Delta=64}{\Leftrightarrow} x=\frac{1}{2} \vee x=-\frac{3}{2}$

Invullen geeft: $x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}+1=-\frac{1}{4}$ en $x=\frac{-3}{2} \Rightarrow y=-\left(\frac{-3}{2}\right)^2-2\cdot\frac{-3}{2}+1=\frac{7}{4}$

De snijpunten zijn dus $S_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ en $S_2\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right)$

3. Gegeven de parabool $p \leftrightarrow y=2x^2-3x+6$ en het punt $P\left(1,3\right)$. Bepaal de vergelijking van de twee raaklijnen r_1 en r_2 uit het punt P aan de parabool p. Bereken voor één van deze raaklijnen (naar keuze) ook de coördinaat van het raakpunt met de parabool. (★★⋆)

Een rechte r ($r \nparallel y$) door $P\left(1,3\right)$ heeft als vergelijking $y=m\left(x-1\right)+3$, met $m\in\mathbb{R}$ als rico.
Voor de snijpunten geldt: $2x^2-3x+6=m\left(x-1\right)+3 \;\Leftrightarrow\; 2x^2+\left(-3-m\right)x+m+3=0$
Vermits r een raaklijn moet zijn, mag er maar één snijpunt zijn, dus moet gelden: $\Delta=0$!!
$\Delta=\left(-3-m\right)^2-4.2.\left(m+3\right)=9+6m+m^2-8m-24=m^2-2m-15=0$.
De oplossingen zijn ($S=2, P=-15$): $m=5 \vee m=-3$

Als $m=5$ dan wordt de vergelijking: $r_1 \leftrightarrow y=5\left(x-1\right)+3$, of eenvoudiger $y=5x-2$.

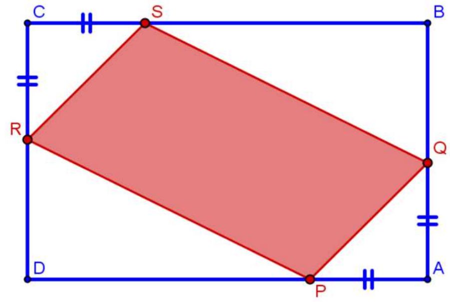
Als $m=-3$ dan wordt de vergelijking: $r_2 \leftrightarrow y=-3\left(x-1\right)+3$, of eenvoudiger $y=-3x+6$.

De raakpunten vind je door het snijpunt van de parabool en de raaklijn te berekenen:

$S_1: \begin{cases} y=2x^2-3x+6 \\ y=5x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases}$, dus hierbij is het raakpunt $S_1\left(2,8\right)$.

$S_2: \begin{cases} y=2x^2-3x+6 \\ y=-3x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=6 \end{cases}$, dus hierbij is het raakpunt $S_2\left(0,6\right)$.

4. Een rechthoek $ABCD$ is $17\,cm$ lang en $11\,cm$ breed. Op zijden $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ en $[DA]$ neemt men respectievelijk de punten P, Q, R en S zodat geldt: $|AP| = |AQ| = |CR| = |CS| = x$.



a) Tussen welke waarden kan de veranderlijke x variëren gezien de probleemstelling?

$x \in]0,11[$, want anders liggen de punten niet meer op de rechthoek.

b) Toon aan dat de oppervlakte van $PQRS$ gegeven wordt door $S = -2x^2 + 28x$.

De oppervlakte van het parallellogram $\square RSQP$ rechtstreeks berekenen is zeer moeilijk, dus gaan we het onrechtstreeks doen door van de grote rechthoek $\square ABCD$ de vier driehoeken ΔRCS, ΔSBQ, ΔQAP en ΔPDR af te trekken.

Dus: $S = 11.17 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{(17-x)(11-x)}{2} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{(17-x)(11-x)}{2} = -2x^2 + 28x$.

(het kan ook sneller door in te zien dat de driehoekjes samen een vierkant met zijde x en een rechthoek met zijden $11-x$ en $7-x$ vormen).

c) Voor welke waarde van x zal deze vierhoek een maximale oppervlakte hebben, en wat is deze maximale oppervlakte? (★★★)

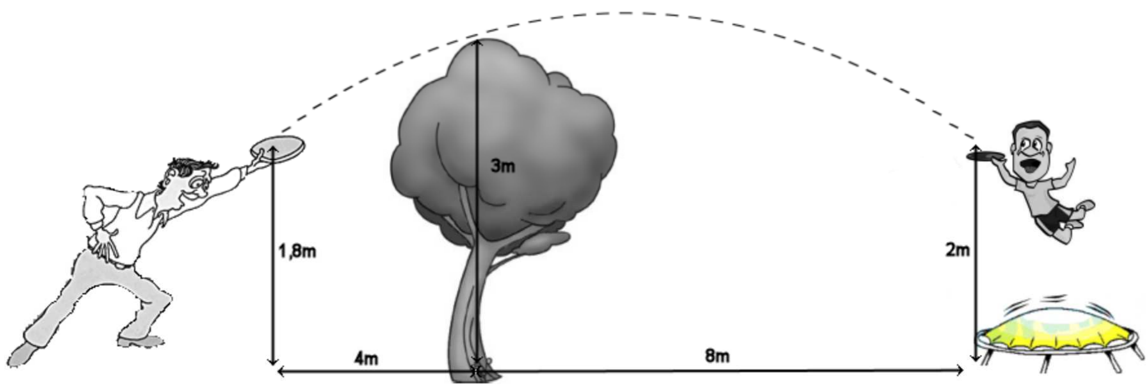
Het maximum van de tweedegraadsfunctie $S = -2x^2 + 28x$, wordt bereikt als $x = \alpha = 7$ (cm), de oppervlakte bedraagt dan 98 (cm²).

5. De vergelijking van een parabool wordt gegeven door $p \leftrightarrow y = mx^2 - 2mx + 3$. Voor welke waarde van m ligt de top van deze parabool op de rechte $r \leftrightarrow y = 5$? (★★⋆)

Anders geformuleerd moet dus $\beta = 5$.

Hier is $\beta = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a} = \dfrac{-4m^2 + 12m}{4m} = -m + 3$, dus moet $m = -2$.

6. Nonkel Bart gooit een frisbee naar zijn neefje Robbe. Hij laat de frisbee los op een hoogte van 1,8m en Robbe vangt hem 12m verder op een hoogte van 2m. De frisbee vliegt rakelings langs een boompje dat op 4m van Bart staat, en 3m hoog is. *(zie figuur)*



Stel het functievoorschrift op van de parabolische baan, die de frisbee beschrijft, kies hierbij eerst zelf een assenstelsel. *Het bekomen stelsel **mag** je oplossen met je rekenmachine.*

Bereken de maximale hoogte van de frisbee. (★★⋆)

Als je als x-as de grond neemt en als y-as de rechte loodrecht op de grond door de boom dan geldt:

- $(-4;1,8)\in f \quad \Leftrightarrow a(-4)^2+b(-4)+c=1,8 \quad \Leftrightarrow 16a-4b+c=1,8$
- $(0;3)\in f \quad \Leftrightarrow a(0)^2+b(0)+c=3 \quad \Leftrightarrow c=3$
- $(8;2)\in f \quad \Leftrightarrow a(8)^2+b(8)+c=2 \quad \Leftrightarrow 64a+8b+c=2$

Dit stelsel oplossen met de GRM: $a=-\frac{17}{480}$, $b=\frac{19}{120}$ en $c=3 \rightarrow f(x)=-\frac{17}{480}x^2+\frac{19}{120}x$.

Hiervoor moet je β berekenen: $\beta=\frac{-b^2+4ac}{4a}=\frac{-\left(\frac{19}{120}\right)^2+4.\left(-\frac{17}{480}\right).3}{4.\left(\frac{-17}{480}\right)}=\frac{6481}{2040}\approx 3,18$

Antwoord: de maximale hoogte die de frisbee bereikt is ongeveer 3,18 m.