Extra opgaven: ongelijkheden & ligging van de wortels

1. Los de ongelijkheid algebraïsch op: $3x^2 - 2x - 1 \le 2x^2 + 4x - 3$ (★)

De ongelijkheid vereenvoudigen geeft $x^2 - 6x + 2 \le 0$.

Nulpunten: $\Delta = (-6)^2 - 4.2 = 28 \Rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{28}}{2} = 3 \pm \sqrt{7}$

Tekenverloop:

x	$-\infty$	$3-\sqrt{7}$		$3+\sqrt{7}$	$+\infty$
$8x+7$	+	0	-	0	+

$V = \left[3-\sqrt{7}, 3+\sqrt{7}\right]$

2. Los de ongelijkheid algebraïsch op: $\dfrac{(x-3)(-5+6x-x^2)}{x^2-2} \ge 0$ (★★)

$$\begin{array}{l|l} x-3=0 & \qquad\qquad x=3 \\ -x^2+6x-5=0 & nulpunten: x=5 \vee x=1 \\ x^2-2=0 & \qquad\qquad x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2} \end{array}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$		3		5	$+\infty$
$x-3$	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$-x^2+6x-5$	-	-	-	0	+	+	+	+	+	0	-
x^2-2	+	0	-	-	-	0	+	+	+	+	+
Q	+	|	-	0	+	|	-	0	+	0	-

$$\boxed{V = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left[1, \sqrt{2}\right[\cup [3,5]}$$

3. Los het volgende stelsel ongelijkheden algebraïsch op: $\begin{cases} x^2 - 3x \ge -2 \\ \dfrac{1}{2}x + 3 > 0 \\ -2x^2 + 12 > 5x \end{cases}$ (★⋆)

Eerst schrijven we het stelsel in standaardvorm, dan bereken we de nulpunten en stellen we het tekenverloop op:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \ge 0 \\ \dfrac{1}{2}x + 3 > 0 \\ -2x^2 - 5x + 12 > 0 \end{cases}$$

nulpunten:

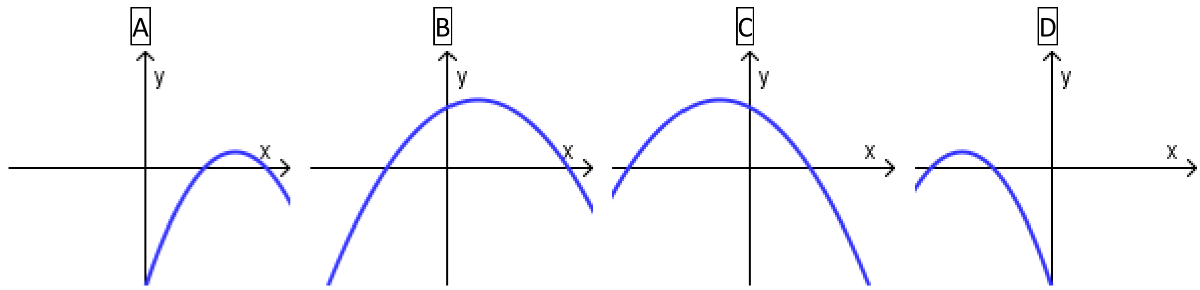
$$\begin{array}{lll} x^2 - 3x + 2 = 0 & \Rightarrow & x = 1 \;\vee\; x = 2 \\ \dfrac{1}{2}x + 3 = 0 & \Rightarrow & x = -6 \\ -2x^2 - 5x + 12 = 0 & \Rightarrow & x = -4 \;\vee\; x = \dfrac{3}{2} \end{array}$$

tekenverloop:

x	$-\infty$	-6		-4		1		$\frac{3}{2}$		2	$+\infty$
x^2-3x+2	+	+	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$\frac{1}{2}x+3$	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$-2x^2-5x+12$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-

$\boxed{V =]-4,1]}$

4. Welke van onderstaande grafieken kan de grafiek zijn van $y = ax^2 + bx + c$, als $a < 0 < b < c$.



Beargumenteer je antwoord! (★★*)

Het juiste antwoord is grafiek $\boxed{\text{B}}$. Hier zijn twee mogelijke verklaringen voor:

Verklaring 1:

Voor som en product geldt: $s = -\frac{b}{a} > 0$ en $p = \frac{c}{a} < 0$. Er zijn dus twee wortels met een verschillend teken waarbij de positieve in absolute waarde groter is dan de negatieve. Dit is enkel bij grafiek $\boxed{\text{B}}$ het geval.

Verklaring 2:

Voor de ligging van de top geldt: $\alpha = -\frac{b}{2a} > 0$, dus de top moet rechts van de y-as liggen. Verder is $c > 0$ en dus moet het snijpunt met de y-as boven de x-as liggen. Dit is enkel bij grafiek $\boxed{\text{B}}$ het geval.

5. Gegeven de vierkantsvergelijking $x^2 + (2m-1)x + m^2 + 3 = 0$, met $m \in \mathbb{R}$.

- Voor welke waarden van m heeft deze vergelijking twee verschillende wortels. (★★)

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2m-1)^2 - 4.1.(m^2+3) = 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 - 12 = -4m - 11$$

Opdat er twee verschillende wortels zouden zijn moet gelden $\Delta > 0$

$$\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4m - 11 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{m < -\frac{11}{4}}$$

6. Gegeven de vierkantsvergelijking $9x^2+mx+m-5=0$, met parameter $m\in\mathbb{R}$.

- Voor welke waarden van m heeft deze vergelijking geen wortels. (★★)

  $\Delta=b^2-4ac=m^2-4.9.(m-5)=m^2-36m+180$ (nulpunten zijn 6 en 30).

  Opdat er geen wortels zouden zijn moet gelden $\Delta<0$

x	$-\infty$		6		30		$+\infty$
Δ		+	0	-	0	+	

  Dus $m\in\left]6,30\right[$

7. Beschouw de vergelijking: $x^2+(2-2m)x+m^2-9=0$ ($m\in\mathbb{R}$ is de parameter).

a. Stel in een duidelijke tabel het tekenverloop op van Δ, S en P.

$\Delta=(2-2m)^2-4.(m^2-9)=4-8m\cancel{+4m^2}\cancel{-4m^2}+36=-8m+40$ (nulpunt: $m=5$)

$S=-(2-2m)=2m-2$ (nulpunt: $m=1$); $P=m^2-9$ (nulpunten $m=-3\vee m=3$)

x	$-\infty$	-3		1		3		5	$+\infty$
Δ	+	+	+	+	+	+	+	0	-
S	-	-	-	0	+	+	+	+	+
P	+	0	-	-	-	0	+	+	+

b. Voor welke waarden van m heeft deze vergelijking 2 verschillende wortels.

Dan moet $\Delta>0$, dus $m\in\left]-\infty,5\right[$

c. Voor welke waarden van m heeft deze vergelijking 2 verschillende negatieve wortels?

Dan moet $\Delta>0$, $S<0$ en $P>0$ dus $m\in\left]-\infty,-3\right[$

Uitdagingsoefeningen: ongelijkheden

8. Bepaal het domein van de functie: $f(x)=\dfrac{\sqrt{5-2x^2-9x}}{3x^2+4x-7}$ (★★⋆)

$$x\in dom\ f\Leftrightarrow\begin{cases}-2x^2-9x+5\geq 0\\3x^2+4x-7\neq 0\end{cases}$$

(De eerste voorwaarde volgt uit het feit dat je de vierkantswortel enkel kan nemen van positieve waarden. De tweede voorwaarde volgt uit het feit dat je niet mag delen door nul)

Nulpunten: $-2x^2-9x+5=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\vee x=-5$; $3x^2+4x-7=0\Leftrightarrow x=1\vee x=-\frac{7}{3}$

x	$-\infty$	-5		$-\frac{7}{3}$		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$-2x^2-9x+5$	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$3x^2+4x-7$	+	+	+	0	-	-	-	0	+

$$\boxed{dom\ f=\left[-5,\frac{-7}{3}\right[\cup\left]\frac{-7}{3},\frac{1}{2}\right]}$$

9. Los de ongelijkheid op: $\left|x^2+2x-17\right|<x+13$ (★★★⋆)

Als het rechterlid negatief of nul is zijn er zowiezo al geen oplossingen – dat geeft dus onze eerste voorwaarde. Naast deze extra voorwaarde gedraagt deze opgave zich alsof er rechts een positieve constante zou zijn (als $c \in \mathbb{R}^+$ geldt $\left|f(x)\right|<c \Leftrightarrow -c<f(x)<c$). In symbolen:

$$\left|x^2+2x-17\right|<x+13 \Leftrightarrow \begin{cases} x+13>0 \\ -x-13<x^2+2x-17<x+13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+13>0 \\ -x-13<x^2+2x-17 \\ x^2+2x-17<x+13 \end{cases}$$

Schrijven we dit stelsel in standaardvorm dan krijgen we:

$$\begin{cases} x+13>0 \\ x^2+3x-4>0 \\ x^2+x-30<0 \end{cases} \qquad \textit{nulpunten:} \qquad \begin{array}{lcl} x+13=0 & \Rightarrow & x=-13 \\ x^2+3x-4=0 & \Rightarrow & x=1 \vee x=-4 \\ x^2+x-30=0 & \Rightarrow & x=5 \vee x=-6 \end{array}$$

tekenverloop:

x	$-\infty$		-13		-6		-4		1		5		$+\infty$
$x+13$		-	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
x^2+3x-4		+	+	+	+	+	0	-	0	+	+	+	
x^2+x-30		+	+	+	0	-	-	-	-	-	0	+	

$\boxed{V=\left]-6,-4\right[\cup\left]1,5\right[}$

Grafisch kunnen we deze ongelijkheid ook oplossen (daarvoor heb je dus wel rekenmachine of computer nodig):