# Extra opgaven tweedegraadsvergelijkingen en toepassingen

1. Los de vergelijkingen op zonder gebruik te maken van de discriminant: (★)

- $25-4x^2=0$

$\Leftrightarrow x^2=\frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow x=\frac{5}{2} \vee x=-\frac{5}{2}$

$V=\left\{\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right\}$

- $\frac{2}{3}x^2=\frac{5}{2}x$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x^2-\frac{5}{2}x=0$

$\Leftrightarrow 4x^2-15x=0$

$\Leftrightarrow x(4x-15)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee 4x-15=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{15}{4}$

$V=\left\{0,\frac{15}{4}\right\}$

2. Los de volgende vergelijkingen op met behulp van de regel van 'som en product': (★)

- $2x^2+12x=14$

$\Leftrightarrow x^2+6x-7=0$

$\overset{S=-6,\, P=-7}{\Leftrightarrow} \quad x=-7 \vee x=1$

$V=\{-7;1\}$

- $3x^2-6x-45=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x-15=0$

$\overset{S=2,\, P=-15}{\Leftrightarrow} \quad x=5 \vee x=-3$

$V=\{5,-3\}$

3. Los de volgende vierkantsvergelijkingen op: (★★*, ★, ★*)

$x+9=\frac{3x^2-2x-5}{x+1}$ $\quad \boxed{B.V.: x\neq -1}$

$\Leftrightarrow (x+9)(x+1)=3x^2-2x-5$

$\Leftrightarrow x^2+10x+9=3x^2-2x-5$

$\Leftrightarrow 2x^2-12x-14=0$

$\Leftrightarrow x^2-6x-7=0$

$\overset{S=6,\, P=-7}{\Leftrightarrow} x=7 \quad \vee \quad \cancel{x=-1}$

$V=\{7\}$

$x(x-2)=2$

$\Leftrightarrow x^2-2x-2=0$

$\Delta=12$

$\Leftrightarrow x=\frac{2-\sqrt{12}}{2} \vee x=\frac{2+\sqrt{12}}{2}$

$\Leftrightarrow x=1-\sqrt{3} \quad \vee \quad x=1+\sqrt{3}$

$V=\left\{1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\right\}$

$(x^2-1)(x^2+1)=5(7-x^2)$

$\Leftrightarrow x^4-1=35-5x^2$

$\Leftrightarrow x^4+5x^2-36=0$

stel $x^2=q$

$\Leftrightarrow q^2+5q-36=0$ $\qquad V=\{-2;2\}$

$\overset{S=-5,\, P=-36}{\Leftrightarrow} q=-9 \vee q=4$

$\Leftrightarrow x^2=-9 \vee x^2=4$

$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=2$

4. Los de volgende vergelijkingen op: (★*,★*,★★*)

- $x^2-5kx+(6k^2+k-1)=0$

$\Delta=(-5k)^2-4.1.(6k^2+k-1)=k^2-4k+4=(k-2)^2$

$\Leftrightarrow x=\frac{5k\pm(k-2)}{2}$ $\nearrow \frac{6k-2}{2}=3k-1$ ; $\searrow \frac{4k+2}{2}=2k+1$

$\boxed{V=\{3k-1,2k+1\}}$

- $\dfrac{3x-1}{x+2}-1=\dfrac{2x-8}{x-3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x-1}{\cancel{x+2}}.\cancel{(x+2)}(x-3)-1.(x+2)(x-3)=\dfrac{2x-8}{\cancel{x-3}}.(x+2)\cancel{(x-3)}$

$\Leftrightarrow 3x^2-9x-x+3-x^2+3x-2x+6=2x^2+4x-8x-16$

$\Leftrightarrow -5x=-25 \Leftrightarrow x=5 \qquad \boxed{V=\{5\}}$

- $x^2-4x+\dfrac{8}{x^2-4x+3}=6$

$\Leftrightarrow t+\dfrac{8}{t+3}=6 \quad \left(met\ t=x^2-4x \ \boxed{BV.: t\neq -3}\right)$

$\Leftrightarrow t(t+3)+8=6(t+3)$

$\Leftrightarrow t^2-3t-10=0$

$\overset{S=3}{\underset{P=-10}{\Leftrightarrow}} \ t=5 \vee t=-2$

$\Leftrightarrow x^2-4x=5 \vee x^2-4x=-2$

$\Leftrightarrow \underbrace{x^2-4x-5=0}_{S=4;\ P=-5} \vee \underbrace{x^2-4x+2=0}_{\Delta=8}$

$\Leftrightarrow x=5 \vee x=-1 \vee x=2+\sqrt{2} \vee x=2-\sqrt{2}$

$V=\left\{5,-1,2+\sqrt{2},2-\sqrt{2}\right\}$

5. In *"The Da Vinci Code"* van schrijver *Dan Brown* speelt $\varphi$ *(phi*, de *gulden snede)* een belangrijke rol. Voor dit positieve getal geldt $\dfrac{1}{\varphi}=\varphi-1$ . Bereken de exacte waarde van $\varphi$. (★★⋆)

$\varphi-1=\dfrac{1}{\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^2-\varphi-1=0 \qquad \boxed{BV: \varphi\neq 0}$

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4.1.(-1)=5 \quad \Rightarrow \quad \varphi=\dfrac{-b+\Delta}{2a}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *of* $\cancel{\varphi=\dfrac{-b-\Delta}{2a}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}\ (\varphi>0)$

*Antwoord: De exacte waarde van* $\varphi$ *is* $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

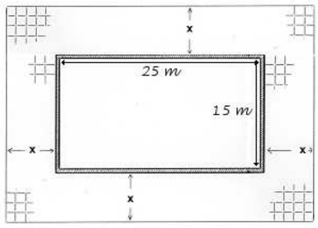
6. Vereenvoudig de breuk $\dfrac{x^4+x^3-6x^2}{2x^2+5x-3}$. (★★⋆)

*teller:* $x^4+x^3-6x^2=x^2\underbrace{\left(x^2+x-6\right)}_{wortels\ 2\ en\ -3}=x^2(x-2)(x+3)$

*noemer:* $\underbrace{2x^2+5x-3}_{wortels\ \frac{1}{2}\ en\ -3}=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x+3)=(2x-1)(x+3)$

*zo vinden we:* $\dfrac{x^4+x^3-6x^2}{2x^2+5x-3}=\dfrac{x^2(x-2)\cancel{(x+3)}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)\cancel{(x+3)}}=\dfrac{x^2(x-2)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{x^3-2x^2}{2x-1}$

7. Rond een zwembad dat 25 m lang is en 15 m breed wil men langs alle kanten een even brede strook tegeltjes aanleggen (zie figuur).
De betegeling kost €40 per m².
Wat is de maximale breedte die men zich kan veroorloven als het beschikbare budget €7040 is? (★★)




K.v.o.: $x$ is de maximale breedte van de strook
Geg.: Zie figuur
Gevr.: $x = ?$
Opl.: De oppervlakte van de strook bedraagt: $(25+2x)(15+2x)-25.15 = 4x^2+80x$.

De oppervlakte die men zich kan veroorloven is $\dfrac{€\ 7040}{€\ 40/m^2} = 176\ m^2$.

Dus $4x^2+80x = 176 \Leftrightarrow x^2+20x-44=0 \Leftrightarrow x=2 \ \vee\ \cancel{x=-22}$.
Antw.: De maximale breedte voor het terras bedraagt 2m.

8. Ontbind $4x^2+(5m+6)x+(m^2-4)$ in factoren. (★★★)

$\Delta = (5m+6)^2 - 4.4.(m^2-4) = 25m^2+60m+36-16m^2+64 = 9m^2+60m+100 = (3m+10)^2$

De wortels zijn $x = \dfrac{-(5m+6)+(3m+10)}{2.4} = \dfrac{-2m+4}{8} = \dfrac{-m+2}{4}$ en $x = \dfrac{-(5m+6)-(3m+10)}{2.4} = -m-2$.

De ontbinding is dus: $4x^2+(5m+6)x+(m^2-4) = 4\left(x-\dfrac{-m+2}{4}\right)(x-(-m-2)) = (4x+m-2)(x+m+2)$

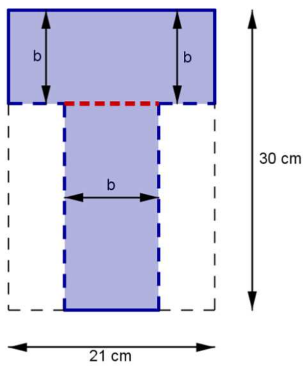
9. Op een schoolbord vind je het onderstaande. De lege vakjes zijn jammer genoeg onleesbaar. Vul in: (★⋆)

Los op: $2x^2 - \boxed{9}\,x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3 \ \vee\ x = \boxed{3/2}$

We kennen het product van de wortels, $P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{9}{2}$. Eén wortel is $3$, dus moet de andere $\dfrac{3}{2}$ zijn. De som is dan ook $\dfrac{9}{2}$, dus $b = -9$.

10. ***(Toets '09-'10)*** Uit een A4-blad (21 cm x 30 cm) wil men een letter 'T' knippen op de manier zoals aangeduid op de figuur.
Hoe breed ($b$) moet men de letter maken opdat zijn totale oppervlakte de helft zou zijn van het gegeven A4-blad?
Rond je antwoord af op de millimeter nauwkeurig. (★★)




K.v.o.: $b$ is de breedte van de letter
Geg.: De letter bestaat uit 2 rechthoeken. Zijn oppervlakte is dus: $T = 21.b + (30-b).b = -b^2+51b$.
Anderzijds moet de oppervlakte gelijk zijn aan de helft van het A4-blad, dus: $T = \dfrac{1}{2}.21.30 = 315$.
Gevr.: de breedte van de letter $b$.

Opl.: $-b^2+51b = 315 \Leftrightarrow -b^2+51b-315 = 0 \overset{\Delta=1341}{\Leftrightarrow} b = \dfrac{-51\pm\sqrt{1341}}{-2}$ $\nearrow \approx 7{,}2$ $\searrow \approx 43{,}8$

Antw.: De letter moet 7,2 cm breed zijn.