Voorbeeldoplossingen onopgeloste oefeningen rijen uit de klas

18. De natuurlijke getallen worden op de volgende manier in een driehoek geplaatst:

1				
2	3			
4	5	6		
7	8	9	10	
11	12	13	14	15
...				

Wat is de som van de getallen op de n-de rij?

(Finalevraag VWO 2007)

Op de n-de rij staan er n opeenvolgende getallen.

Het laatste getal op de n-de rij is $1+2+3+...+n=\dfrac{n(1+n)}{2}=\dfrac{n^2+n}{2}$ (zie ook oefening 17).

Het eerste getal op de n-de rij is één meer dan het laatste getal van de vorige rij, dit is dus:

$$\frac{(n-1)^2+n-1}{2}+1=\frac{n^2-2n+1+n-1+2}{2}=\frac{n^2-n+2}{2}.$$

De som van de getallen op de n-de rij is dan: $s=n\cdot\dfrac{\frac{n^2-n+2}{2}+\frac{n^2+n}{2}}{2}=n\cdot\dfrac{n^2+1}{2}=\dfrac{n^3+n}{2}$.

25. Gegeven is een meetkundige rij x, y, z (met $x\neq y$). Bepaal het quotiënt van deze rij als je weet dat $x, 2y, 3z$ een rekenkundige rij is. *(VWO 1994)*

Noem de termen $x=\dfrac{y}{q}$, y en $z=yq$. Dan wordt de rekenkundige rij dus $\dfrac{y}{q}, 2y, 3yq$.

Hieruit volgt dan dat:

$$2y=\frac{\frac{y}{q}+3yq}{2}\Leftrightarrow 4y=\frac{y}{q}+3yq\Leftrightarrow 3yq^2-4yq+y=0\Leftrightarrow y\left(3q^2-4q+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y=0\ \vee\ 3q^2-4q+1=0\Leftrightarrow \cancel{y=0}\vee \cancel{q=1}\vee q=\frac{1}{3}$$

28. $x+18, x+4, x-8$ zijn de eerste drie termen van een meetkundige rij. Wat is het quotiënt van deze rij?

$$(x+4)^2=(x+18)\cdot(x-8)\Leftrightarrow x^2+8x+16=x^2+18x-8x-144\Leftrightarrow x=80$$

29. x, y, z is een meetkundige rij met als som van de termen 64. Bepaal deze termen als je weet dat y, x, z een rekenkundige rij is (met $x\neq y$).

Noem de termen $x=\dfrac{y}{q}$, y en $z=yq$. Dan wordt het tweede gegeven:

$$\frac{y}{q}=\frac{y+yq}{2}\Leftrightarrow 2y=yq+yq^2\Leftrightarrow yq^2+yq-2y=0\Leftrightarrow y\left(q^2+q-2\right)=0\Leftrightarrow \cancel{y=0}\vee\cancel{q=1}\vee q=-2$$

In combinatie met het eerste gegeven geeft dit:

$$x+y+z=64\Leftrightarrow -\frac{y}{2}+y-2y=64\Leftrightarrow -\frac{3}{2}y=64\Leftrightarrow y=-\frac{128}{3}.$$

De drie termen zijn dus $x=\dfrac{64}{3}$, $y=-\dfrac{128}{3}$ en $z=\dfrac{256}{3}$

30. 11 verschillende termen vormen een rekenkundige rij met som 110. De derde, eerste en laatste term vormen (in die volgorde) een meetkundige rij. Bepaal deze rij.

$$\begin{cases} s_{11}=110 \\ u_3, u_1, u_{11} : MR \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11\cdot\dfrac{u_1+u_1+10v}{2}=110 \\ u_1{}^2=u_3\cdot u_{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=10-5v \\ u_1{}^2=(u_1+2v)\cdot(u_1+10v) \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} u_1=-5 \\ v=3 \end{cases}$$

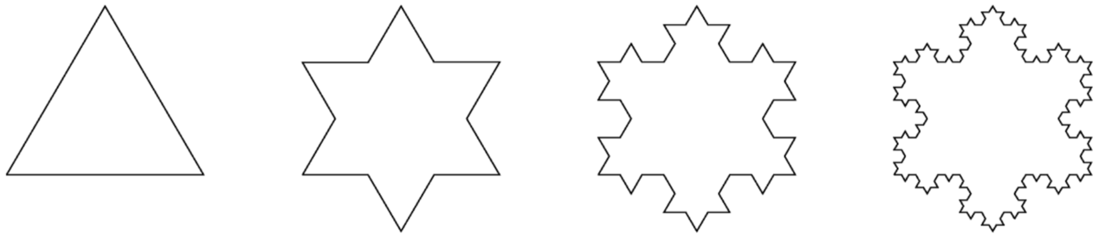
$$*: (10-5v)^2=(10-3v)\cdot(10+5v) \Leftrightarrow 100-100v+25v^2=100-30v+50v-15v^2 \Leftrightarrow 40v^2-120v=0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{v=0} \vee v=3$$

De rij is dus $(u_n)=-5,-2,1,4,7,10,13,16,19,22,25$

32. De *sneeuwvlok van Koch* is een meetkundige figuur die een fractaal wordt genoemd. Hij wordt opgebouwd door op een basisfiguur steeds dezelfde constructie toe te passen.

Op de figuur hieronder zie je de eerste 4 stappen van deze constructie toegepast:



stap 1 *stap 2* *stap 3* *stap 4*

De omtrek van de gelijkzijdige driehoek waar de constructie mee start is $9\ cm$.

a. Bepaal de omtrek van de sneeuwvlok na 2, 3 en 4 stappen.

Stap	Aantal zijden	Lengte per zijde (in cm)	Omtrek (in cm)
1	3	3	9
2	12	1	12
3	48	$1/3$	16
4	192	$1/9$	$64/3$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
	M.R. met $q=4$	M.R. met $q=1/3$	M.R. met $q=4/3$

b. Toon aan dat de omtrek na 78 stappen ongeveer de afstand van de aarde tot de maan is.

Uit de tabel hierboven volgt dat de omtrek een meetkundige rij is met eerste term $P_1=9$ en quotiënt $q=4/3$.

Dus na 78 stappen is de omtrek $P_{78}=9\cdot(4/3)^{77}\approx 37542676247{,}6\ cm \approx 375426{,}8\ km$. Dit is inderdaad ongeveer de afstand van hier tot de maan (bron).

c. Bewijs dat de figuur na 78 stappen nog altijd niet groter is dan $7\ cm^2$.

De oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek met zijde z wordt gegeven door $S_\Delta=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot z^2$

(Bewijs deze formule eventueel zelf eens met behulp van de stelling van Pythagoras).

De oppervlakte van de sneeuwvlok van Koch wordt dus gegeven door (in cm²):

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 3^2+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2+12\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+48\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2+\ldots$$

$$=\frac{9\sqrt{3}}{4}+\underbrace{\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{27}+\ldots}_{M.R.\ met\ q=\frac{4}{9}\ en\ 77\ termen}=\frac{9\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^{77}-1}{\frac{4}{9}-1}\approx 6{,}23538$$