



**ÓSCAR
ROMERO
COLLEGE**

samen bouwen aan je toekomst

Parate kennis wiskunde

(bij aanvang van het vierde middelbaar)



**"I forgot to make a back-up copy of my brain,
so everything I learned last semester was lost."**

© Sven Mettepenningen

Dit document is bedoeld als samenvatting van wat als parate kennis wordt aangenomen bij aanvang van het tweede jaar van de tweede graad ASO voor richtingen met een major wiskunde.

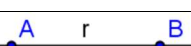
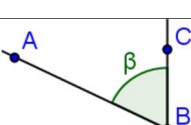
1. TAALVAARDIGHEID BINNEN WISKUNDE

a) Begrippen uit de getallenleer

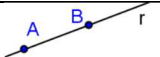
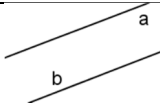
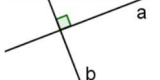
Bewerking	Notatie	Voorbeeld	Benaming
Som	+	$3 + 5 = 8$	3 en 5 zijn termen, 8 is de som
Verschil	–	$9 - 5 = 4$	9 en 5 zijn termen, 4 is het verschil
Product	. of $\times$	$2 \cdot 7 = 14$	2 en 7 zijn factoren, 14 is het product
Deling	: of $\div$ of $\frac{\dots}{\dots}$	$\frac{7}{2} = 3,5$	7 is het deeltal, 2 is de deler, 3,5 is het quotiënt.
Kwadratering	$\dots^2$	$4^2 = 16$	4 is het grondtal, 2 is de exponent, 16 is het kwadraat.
Machtsverheffing	$\dots^n$	$3^5 = 243$	3 is het grondtal, 5 is de exponent, 243 is de macht.
Worteltrekking	$\sqrt{}$	$\sqrt{81} = 9$	81 is het grondtal, 9 de vierkantswortel

b) Begrippen uit de meetkunde

Meetkundige entiteiten

Begrip	Grafisch	Woorden & symbolen
Punt		Het punt A
Lijnstuk		Het lijnstuk $[AB]$
Halfrechte		De halfrechte $[AB$
Rechte		De rechte AB of rechte r
Hoek		De hoek β of $\hat{B}$ of $\widehat{ABC}$

Ligging

Grafisch	Woorden & symbolen
	A ligt op r , in symbolen: $A \in r$
	$[AB]$ is een deel van r , in symbolen: $[AB] \subset r$
	a en b zijn evenwijdig, in symbolen: $a \parallel b$ of $a // b$
	a staat loodrecht op b , in symbolen $a \perp b$

c) Instructietaal

Schetsen

- Binnen wiskunde betekent schetsen iets in grote lijnen tekenen om een idee te krijgen van een gegeven situatie. Je maakt gebruik van de gegevens, een definitie, eigenschappen, ...
- Een schets hoeft helemaal niet nauwkeurig te zijn. Het geeft je enkel een eerste indruk.
- Om te schetsen volstaat een potlood. Je hebt geen lat, passer of geodriehoek nodig.

Tekenen

- Binnen wiskunde betekent tekenen een nauwkeurige voorstelling maken van een situatie.
- De nauwkeurigheid is afhankelijk van het meetinstrument. Zo teken je een lijnstuk op één millimeter nauwkeurig en teken je een hoek op één graad nauwkeurig.
- Om te tekenen gebruik je potlood en geodriehoek, en om cirkels te tekenen een passer.

Construeren

- Binnen wiskunde betekent construeren in tekening brengen, met passer en liniaal.
- Als de constructie goed is uitgevoerd zou dit moeten leiden tot een nauwkeurige tekening.
- Je maakt gebruik van potlood, passer en liniaal. Bij constructies wordt er zo weinig mogelijk (lieft niet – op het gegeven na) gemeten.

Definiëren

- Het duidelijk omschrijven van een nieuw begrip met behulp van reeds gekende begrippen. Dit kan zowel in woorden als in symbolen.

Bewijzen

- Argumenteren waarom een bepaalde vaststelling waar is. Bij het opstellen van een bewijs kun je steunen op alle eerder geziene begrippen, definities, eigenschappen, stellingen, ...

d) Symbolen en afkortingen

Symbool	Betekenis
=	Is gelijk aan
≠	Is niet gelijk aan
≈	Is bij benadering
<	Is kleiner dan
>	Is groter dan
≤	Is kleiner dan of gelijk aan

Symbool	Betekenis
≥	Is groter dan of gelijk aan
...	De absolute waarde van
... ⁻¹	Het omgekeerde van
^ ...	De hoek
~	Is gelijkvormig met
≡	Is congruent met

e) Elementaire verzamelingenleer

Gekende verzamelingen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, dit noemen we de *natuurlijke getallen*.

$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$, dit noemen we de *gehele getallen*.

$\mathbb{Q} = \{z/n \mid z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0\}$, dit noemen we de *rationale getallen* (ook wel breuken genoemd).

$\mathbb{R}$, dit noemen we de *reële getallen* (bvb.: $0, 1, \frac{2}{5}, \pi, \sqrt{3}, \dots$).

Een onderindex 0 bij een verzameling wil zeggen dat we het getal 0 weglaten uit de verzameling. Een bovenindex + of – wil zeggen dat we enkel de positieve respectievelijk negatieve getallen bekijken.

Kwantoren

$\forall$	Deze kwantor betekent ‘voor alle ...’. Hij duidt aan dat een eigenschap geldt voor alle elementen uit een bepaalde verzameling.
$\exists$	Deze kwantor betekent ‘er bestaat ...’ of ‘er bestaan ...’. Hij duidt aan dat er uit een bepaalde verzameling altijd een element kan gevonden worden zodat een bepaalde eigenschap geldt.

Voorbeeld: Het feit dat elk rationaal getal kan geschreven worden als een breuk van gehele getallen kan in symbolen geschreven worden als $\forall q \in \mathbb{Q} : \exists z_1, z_2 \in \mathbb{Z} : q = z_1/z_2$.

Logische operatoren

symbool	betekenis	gebruik
$\wedge$	<i>en</i>	Eist dat twee uitspraken samen gelden
$\vee$	<i>of</i>	Eist dat één van twee uitspraken geldt (of alle twee)
$\neg$	<i>niet</i>	Eist dat een uitspraak niet geldt
$\Rightarrow$	<i>waaruit volgt</i>	Als uit een uitspraak een andere volgt (voldoende voorwaarde)
$\Leftarrow$	<i>als</i>	Als uit een uitspraak een andere volgt (nodige voorwaarde)
$\Leftrightarrow$	<i>als en slechts als</i>	Als twee uitspraken elkaar impliceren

Enkele voorbeelden:

- $\forall a, b \in \mathbb{R} : a = -b \Rightarrow a^2 = b^2$
- $\forall m, n \in \mathbb{N} : m > n \Leftrightarrow m^2 > n^2$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : \frac{ab}{c} = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0) \wedge (\neg(c = 0))$

f) Letters uit het Griekse alfabet

Symbool	Lees
α	alfa
β	beta

Symbool	Lees
γ	gamma
δ	delta

Symbool	Lees
ε	epsilon
π	pi

g) Lengte-, oppervlakte- en volumematen

Lengtematen

Naam	kilometer	hectometer	decameter	meter	decimeter	centimeter	millimeter
Afkorting	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
Betekenis	1000 m	100 m	10 m	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m

Oppervlaktematen

Afkorting	km ²	hm ²	dam ²	m ²	dm ²	cm ²	mm ²
Betekenis	1000000 m ²	10000 m ²	100 m ²	1 m ²	0,01 m ²	0,0001 m ²	0,000001 m ²
Alternatief		ha (hectare)	a (are)	Ca (centiare)			

Volumematen

Afkorting	dam ³	m ³	dm ³	cm ³
Betekenis	1000 m ³	1 m ³	0,001 m ³	0,000001 m ³
Alternatief			l (liter)	

2. GETALLENLEER

a) Tekenregels

Som en verschil	Product en quotiënt
$a + (+b) = a + b$	$(+a) \cdot (+b) = a \cdot b \quad \frac{+a}{+b} = \frac{a}{b}$
$a - (+b) = a - b$	$(-a) \cdot (+b) = -a \cdot b \quad \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$
$a + (-b) = a - b$	$(+a) \cdot (-b) = -a \cdot b \quad \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$
$a - (-b) = a + b$	$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

b) Machtsverheffing

Definitie

- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}^{n \text{ factoren}}$
- $\forall a \in \mathbb{R}_0 : a^0 = 1$ (merk op dat 0^0 niet gedefinieerd is).
- $\forall a \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{N} : a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Rekenregels

$$\begin{array}{ll}
 \forall a \in \mathbb{R}_0, \forall m, n \in \mathbb{Z} : & a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\
 \forall a \in \mathbb{R}_0, \forall m, n \in \mathbb{Z} : & \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\
 \forall a \in \mathbb{R}_0, \forall m, n \in \mathbb{Z} : & (a^m)^n = a^{m \cdot n}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 \forall a, b \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{Z} : & (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \\
 \forall a, b \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{Z} : & \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\
 \forall a, b \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{Z} : & \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n
 \end{array}$$

c) Vierkantswortels en derdemachtswortels

Definitie

Een *vierkantswortel* van een reëel getal is een reëel getal waarvan het kwadraat gelijk is aan het gegeven getal. Enkel positieve getallen hebben dus vierkantswortels. De notatie $\sqrt{}$ wordt gebruikt voor de positieve vierkantswortel. Toegepast geeft dit dat -3 een vierkantswortel is van 9, maar dat $\sqrt{9} = 3$ en $\sqrt{9} \neq -3$. Als er in een context sprake is van *de* vierkantswortel dan gaan we er van uit dat de positieve wordt bedoeld!

Een *derdemachtswortel* van een reëel getal is een reëel getal waarvan de derdemacht gelijk is aan het gegeven getal. Elk reëel getal r heeft een unieke derdemachtswortel, die we noteren met $\sqrt[3]{r}$.

Rekenregels

$$\begin{array}{lcl} \forall a \in \mathbb{R}^+ : & (\sqrt{a})^2 = a & \forall a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}_0^+ : \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \\ \forall a \in \mathbb{R}^+ : & \sqrt{a^2} = a & \forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \\ & & \forall a \in \mathbb{R}^- : \quad \sqrt{a^2} = -a \end{array}$$

d) Volgorde van bewerkingen

- 1) Berekeningen tussen de haakjes moeten altijd eerst worden uitgevoerd.
- 2) Dan machtsverheffing en de vierkantsworteltrekking uitvoeren.
- 3) Dan vermenigvuldiging en de deling uitvoeren in de volgorde waarin ze voorkomen.
- 4) Tot slot optellingen en aftrekkingen uitvoeren in de volgorde waarin ze voorkomen.

Voorbeeld: $90 : 3^2 - \sqrt{49} + (12 - 10)^3 \cdot 5 \stackrel{1)}{=} 90 : 3^2 - \sqrt{49} + 2^3 \cdot 5 \stackrel{2)}{=} 90 : 9 - 7 + 8 \cdot 5 \stackrel{3)}{=} 10 - 7 + 40 \stackrel{4)}{=} 43$

e) Eigenschappen van bewerkingen

Eigenschap	In symbolen
1. Commutativiteit van de optelling	$\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$
2. Commutativiteit van de vermenigvuldiging	$\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$
3. Associativiteit van de optelling	$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) + c = a + (b + c)$
4. Associativiteit van de vermenigvuldiging	$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
5. Elk getal heeft een (uniek) tegengestelde	$\forall a \in \mathbb{R} : \exists (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$
6. Elk getal verschillend van nul heeft een (uniek) omgekeerde	$\forall a \in \mathbb{R}^0 : \exists a^{-1} \in \mathbb{R}^0 : a \cdot a^{-1} = 1$
7. Het getal 0 is het neutraal element van de optelling	$\forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$
8. Het getal 1 is het neutraal element van de vermenigvuldiging	$\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$
9. Distributiviteit van de vermenigvuldiging t.o.v. de optelling	$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

- De eigenschappen 1, 3, 5, 7 impliceren dat $\mathbb{R}, +$ een *commutatieve groep* is.
- De eigenschappen 2, 4, 6, 8 impliceren dat $\mathbb{R}_0, \cdot$ een *commutatieve groep* is.
- Alle eigenschappen samen impliceren dat $\mathbb{R}, +, \cdot$ een *veld* is.

f) Evenredigheden

- Twee grootheden zijn *recht evenredig* als hun verhouding constant is.
- Twee grootheden zijn *omgekeerd evenredig* als hun product constant is.

g) Merkwaardige producten / ontbinden in factoren

- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
- $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

h) Vergelijkingen van de eerste graad

Een vergelijking mag je als volgt manipuleren:

- Bij beide leden eenzelfde getal optellen (of ervan aftrekken).
- Beide leden vermenigvuldigen met (of delen door) een *van nul verschillend* getal.

Algemeen ken je ook het nulpunt van een eerstegraadsfunctie: $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$ (met $a \neq 0$).

i) Ongelijkheden van de eerste graad

Een ongelijkheid mag je als volgt manipuleren:

- Bij beide leden eenzelfde getal optellen (of ervan aftrekken).
- Beide leden vermenigvuldigen met (of delen door) een *strikt positief* getal.
- Beide leden vermenigvuldigen met (of delen door) een *strikt negatief* getal, ermee rekening houdend dat dan het teken omdraait.

j) Stelsels vergelijkingen van de eerste graad

De substitutiemethode

Hierbij bereken je uit één vergelijking een onbekende en substitueert wat je vindt in de andere vergelijking(en).

$$\text{Voorbeeld: } \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 4y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(4y - 9) + 3y = 4 \\ x = 4y - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y = 22 \\ x = 4y - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}.$$

De combinatiemethode

Hierbij maak je een lineaire combinatie van twee vergelijkingen om zo een onbekende te elimineren.

$$\text{Voorbeeld: } \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 4y = -9 \end{cases} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{array} \right| \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y = 22 \\ 11x = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}.$$

3. REELE FUNCTIES

a) Eerstegraadsfuncties

Definitie

Eerstegraadsfuncties zijn functies van de vorm $f(x) = ax + b$, met $a \in \mathbb{R}_0$ en $b \in \mathbb{R}$.

De grafiek ervan is een rechte. Hierbij noemen we a de *richtingscoëfficiënt* ('rico') en b de *intercept*.

De richtingscoëfficiënt a bepaalt hoe steil de rechte stijgt ($a > 0$) of daalt ($a < 0$). Op de grafiek is dit de verticale toename (of afname) bij een horizontale toename van één eenheid.

De intercept b geeft het snijpunt met de y -as, namelijk $(0, b)$.

Bespreking

Het *nulpunt* (snijpunt met de x -as) van een eerstegraadsfunctie $f(x) = ax + b$ vind je door de bijhorende vergelijking $ax + b = 0$ op te lossen. Het nulpunt is dus $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$.

Het *tekenverloop* is een duidelijke tabel waarin je aangeeft wat het teken van de functiewaarden is.

Het *verloop of stijgen en dalen* van een functie is een duidelijke tabel waarin je aangeeft waar de functie stijgend en dalend is. Voor een eerstegraadsfunctie is dat uiteraard zeer eenvoudig.

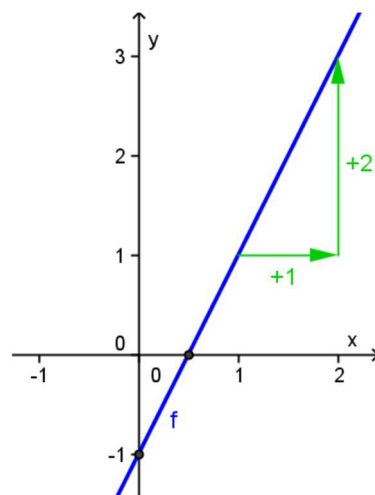
Voorbeeld: We bespreken de eerstegraadsfunctie $f(x) = 2x - 1$.

- Snijpunt met de x -as (nulpunt): $(1/2, 0)$.
- Snijpunt met de y -as: $(0, -1)$.
- Tekenverloop:

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

- Stijgen en dalen:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$

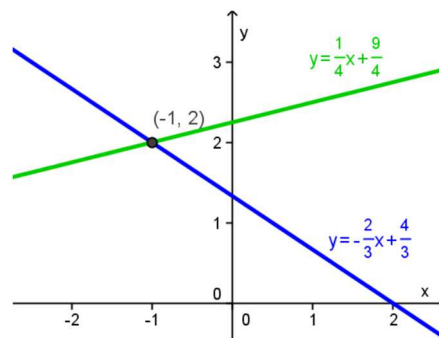


Stelsels grafisch oplossen

Een stelsel van twee lineaire vergelijkingen kan je ook grafisch oplossen (met of zonder rekenmachine).

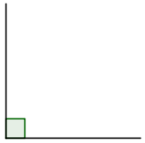
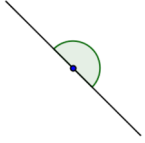
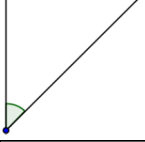
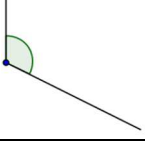
Voorbeeld:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 4y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4} \end{cases}.$$

Op de grafiek lees je af:
$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

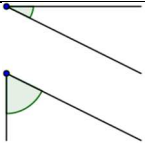
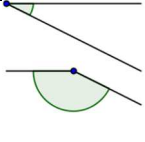
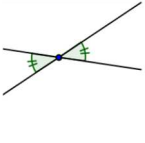
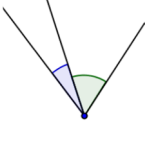
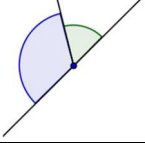


4. MEETKUNDE

a) Soorten hoeken

Hoek	Figuur	Beschrijving
Rechte hoek		Een rechte hoek is een hoek van 90°
Gestreckte hoek		Een gestreckte hoek is een hoek van 180°
Nulhoek		Een nulhoek is een hoek van 0°
Scherpe hoek		Een scherpe hoek is een hoek tussen 0° en 90°
Stompe hoek		Een stompe hoek is een hoek tussen 90° en 180°

b) Verwante hoeken

Verwantschap	Figuur	Beschrijving
Complementaire hoeken		Complementaire hoeken zijn hoeken waarvan de som 90° is
Supplementaire hoeken		Supplementaire hoeken zijn hoeken waarvan de som 180° is
Overstaande hoeken		Overstaande hoeken zijn hoeken met hetzelfde hoekpunt waarvan de benen in elkaars verlengde liggen
Aanliggende hoeken		Aanliggende hoeken zijn hoeken met hetzelfde hoekpunt waarvan twee benen samenvallen, en die aan weerszijden van het gemeenschappelijke been liggen
Nevenhoeken		Nevenhoeken zijn hoeken die aanliggend en supplementair zijn

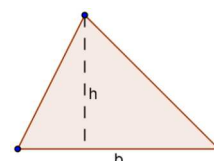
Speciale rechten (in een driehoek)

Soort rechte	Figuur	Beschrijving
middelloodlijn		De middelloodlijn van een lijnstuk is de rechte die loodrecht staat op dat lijnstuk en door het midden ervan gaat.
Bissectrice		De bissectrice van een hoek is de rechte die die hoek in twee gelijke delen deelt.
Hoogtelijn (in Δ)		Een hoogtelijn in een driehoek is een rechte die door een hoekpunt gaat en loodrecht staat op de overstaande zijde van dat hoekpunt
Zwaartelijn (in Δ)		Een zwaartelijn in een driehoek is een rechte die door een hoekpunt gaat en door het midden gaat van de overstaande zijde van dat hoekpunt

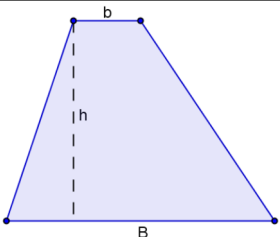
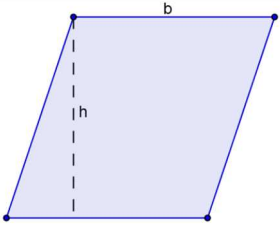
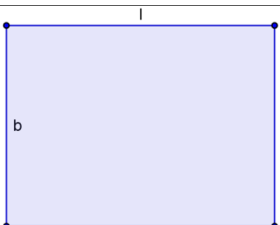
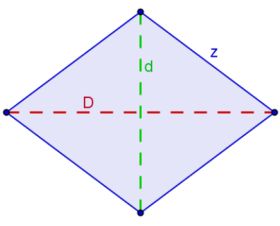
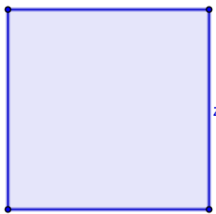
c) Soorten driehoeken

Soort driehoek	Figuur	Beschrijving
Rechthoekige driehoek		Een rechthoekige driehoek is een driehoek waarvan één hoek recht is.
Scherphoekige driehoek		Een scherphoekige driehoek is een driehoek met drie scherpe hoeken
Stomphoekige driehoek		Een stomphoekige driehoek is een driehoek met één stompe hoek
Gelijkbenige driehoek		Een gelijkbenige driehoek is een driehoek met twee gelijke zijden (en dus ook twee gelijke hoeken)
Gelijkzijdige driehoek		Een gelijkzijdige driehoek is een driehoek met drie gelijke zijden (en dus ook drie gelijke hoeken)

Voor alle driehoeken geldt de oppervlakteformule: $A = \frac{b \cdot h}{2}$



d) Soorten vierhoeken

Soort vierhoek	Figuur	Beschrijving, omtrek en oppervlakte
Trapezium		Een trapezium is een vierhoek met één paar evenwijdige zijden. $A = \frac{B+b}{2} \cdot h$; $P = \text{som der zijden}$.
Parallelogram		Een parallelogram is een vierhoek met twee paar evenwijdige zijden. $A = b \cdot h$; $P = \text{som der zijden}$. Fig.: ★ Overstaande hoeken zijn gelijk. ★ Overstaande zijden zijn even lang. ★ Diagonalen snijden elkaar middendoor.
Rechthoek		Een rechthoek is een vierhoek met 4 rechte hoeken. $A = l \cdot b$; $P = 2 \cdot (l + b)$. Fig.: ★ Eigenschappen parallelogram blijven gelden! ★ Diagonalen zijn even lang.
Ruit		Een ruit is een vierhoek met 4 zijden die even lang zijn. $A = \frac{D \cdot d}{2}$; $P = 4z$. Fig.: ★ Eigenschappen parallelogram blijven gelden! ★ Diagonalen staan loodrecht op elkaar.
Vierkant		Een vierkant is een vierhoek met 4 even lange zijden en 4 rechte hoeken. $A = z^2$; $P = 4z$. Fig.: ★ Eigenschappen parallelogram en ruit gelden!

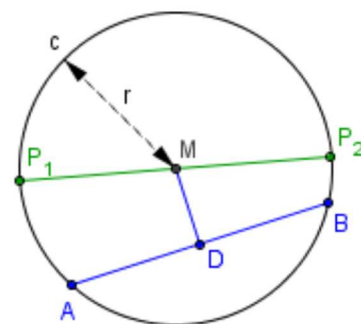
e) De cirkel

Een *cirkel* is een verzameling punten die op vaste afstand (de straal) van een gegeven punt (het middelpunt) liggen.

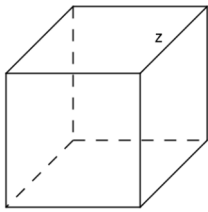
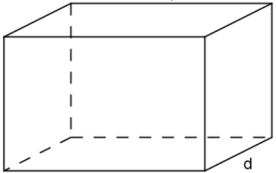
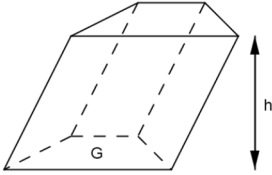
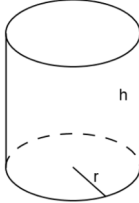
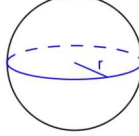
Een *koorde* is een lijnstuk dat twee punten die op de cirkel liggen verbindt. Het lijnstuk dat het midden van een koorde verbindt met het middelpunt van de cirkel, noemen we het *apothema* van die koorde. Een *diameter* is een koorde die door het middelpunt gaat (de lengte ervan noemen we ook de diameter d van de cirkel). Een rechte door het middelpunt noemen we een *middellijn* van de cirkel.

Verder geldt: $A = \pi \cdot r^2$ en $P = 2\pi \cdot r$ (met $\pi \approx 3,14159265\dots$).

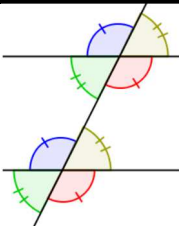
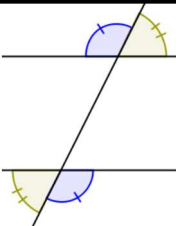
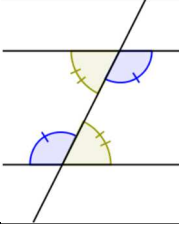
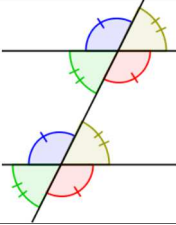
Vbn.: Op de figuur is dus $[AB]$ een koorde, met bijhorend apothema $[MD]$, en is $[P_1P_2]$ een diameter.



f) Ruimtefiguren

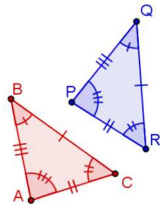
Ruimtefiguur	Figuur	Oppervlakte	Volume
Kubus		$A = 6z^2$	$V = z^3$
Balk		$A = 2 \cdot (ld + dh + hl)$	$V = lhd$
Prisma		$A = \text{som der zijvlakken}$	$V = A_G \cdot h$
Cilinder		$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$	$V = \pi r^2 h$
Bol		$A = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

g) Twee evenwijdige rechten en een snijlijn

Figuur	Betekenis	Figuur	Betekenis
	Overeenkomstige hoeken zijn gelijk (op de figuur hoeken met dezelfde kleur). Ook overstaande hoeken zijn gelijk (rood-blauw en geel-groen).		Verwisselende buitenhoeken zijn gelijk (op de figuur hoeken met dezelfde kleur).
	Verwisselende binnenhoeken zijn gelijk (op de figuur hoeken met dezelfde kleur).		Binnenhoeken (en buitenhoeken) aan dezelfde kant van de snijlijn zijn supplementair (op de figuur groen-blauw en rood-geel).

Deze eigenschappen worden vaak ook omgekeerd gebruikt in de meetkunde om aan te tonen dat twee rechten evenwijdig zijn.

h) Congruente driehoeken



Twee driehoeken zijn congruent als en slechts als alle overeenkomstige hoeken en zijden gelijk zijn. In symbolen:

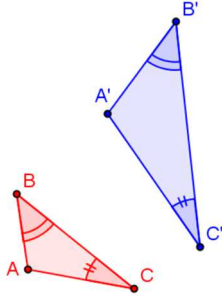
$$\Delta ABC \cong \Delta PQR \Leftrightarrow \begin{cases} |AB| = |PQ| & \hat{A} = \hat{P} \\ |BC| = |QR| & \hat{B} = \hat{Q} \\ |CA| = |RP| & \hat{C} = \hat{R} \end{cases}$$

Kenmerk	Figuur	In woorden
ZZZ		Twee driehoeken zijn congruent als hun overeenkomstige zijden even lang zijn.
ZHZ		Twee driehoeken zijn congruent als twee paar overeenkomstige zijden en hun ingesloten hoek gelijk zijn.
HZH		Twee driehoeken zijn congruent als twee paar overeenkomstige hoeken en hun ingesloten zijde gelijk zijn.

i) Gelijkvormige driehoeken

De drie gelijkvormigheidskenmerken

Kenmerk	Figuur	In symbolen
$\frac{Z}{Z} \frac{Z}{Z} \frac{Z}{Z}$		$\frac{ AB }{ A'B' } = \frac{ BC }{ B'C' } = \frac{ CA }{ C'A' } \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$
$\frac{Z}{Z} H \frac{Z}{Z}$		$\frac{ BC }{ B'C' } = \frac{ CA }{ C'A' } \wedge \hat{C} = \hat{C}' \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

HH		$\widehat{B} = \widehat{B'} \wedge \widehat{C} = \widehat{C'} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$
----	---	--

De schaalfactor

Zijn twee driehoeken gelijkvormig ($\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$) dan noemen we de constante verhouding van hun

zijden ook wel eens de *schaa factor* ($\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|C'A'|}{|CA|} = k$).

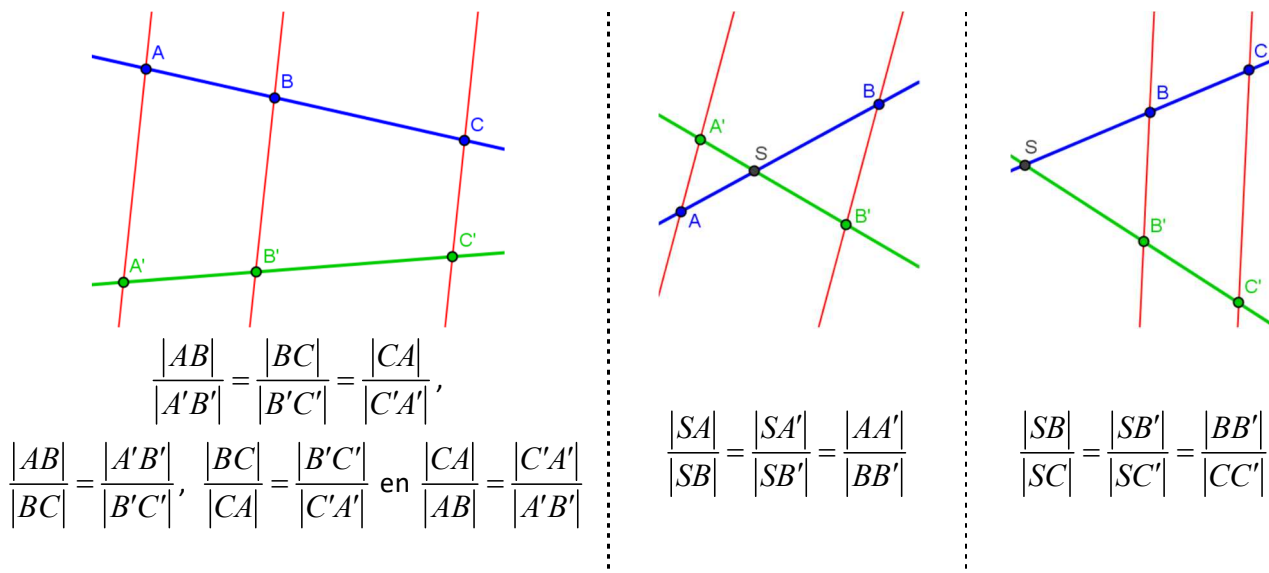
Belangrijk om weten is dat de verhouding van de oppervlaktes dan gelijk is aan k^2 . (Dus $\frac{A_{\Delta A'B'C'}}{A_{\Delta ABC}} = k^2$)

Zijn twee ruimtefiguren gelijkvormig met schaa factor k , dan is de verhouding van hun volumes k^3 .

j) De stelling van Thales

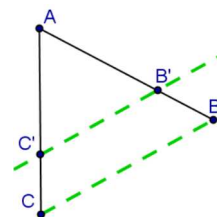
De stelling van Thales zegt: “Bij evenwijdige projectie van een rechte op een andere rechte blijft de verhouding van lijnstukken behouden”.

Op een figuur vertaalt deze stelling zich op drie manieren (rode rechten zijn evenwijdig:

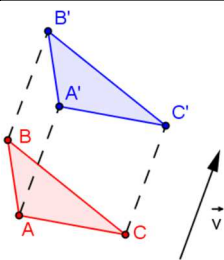
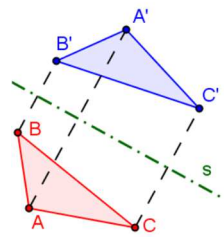
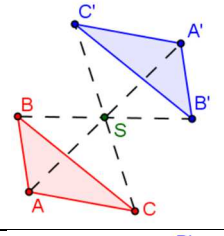
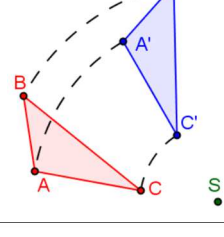
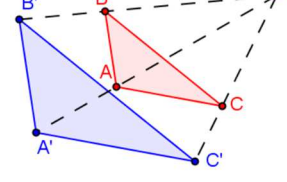


Ook hier geldt de omgekeerde eigenschap. De bekendste variant is de volgende:
 “Als een rechte twee zijden van een driehoek in evenredige stukken verdeelt, dan is die rechte evenwijdig met de derde zijde.”

In symbolen: $\frac{|AB|}{|AB'|} = \frac{|AC|}{|AC'|} \Rightarrow BC \parallel B'C'$



k) Meetkundige transformaties

Kenmerk	Figuur	Opmerkingen
Verschuiving		Bij een verschuiving krijg je altijd een vector $\vec{v}$ gegeven. Deze bepaalt de richting, zin en lengte van de verschuiving. Verschuivingen beelden figuren af op congruente figuren. Lengtes en hoekgroottes blijven bewaard.
Spiegeling		Bij een spiegeling krijg je altijd de spiegelas gegeven. Spiegelingen beelden figuren af op congruente figuren. Lengtes en hoekgroottes blijven bewaard.
Puntspiegeling		Bij een puntspiegeling krijg je altijd het spiegelpunt gegeven. Puntspiegelingen beelden figuren af op congruente figuren. Lengtes en hoekgroottes blijven bewaard.
Draaiing		Bij een draaiing krijg je altijd een centrum gegeven, alsook een draairichting en hoek waaronder gedraaid wordt (in het voorbeeld is het centrum S, en de draaihoek 50° in wijzerzin). Draaiingen beelden figuren af op congruente figuren. Lengtes en hoekgroottes blijven bewaard.
Homothetie		Bij een homothetie krijg je altijd een centrum en een schaalfactor gegeven (in het voorbeeld is het centrum S en schaalfactor 1,5). Homothetieën beelden figuren af op gelijkvormige figuren. Lengtes worden vermenigvuldigd met de schaalfactor, hoekgroottes blijven bewaard.

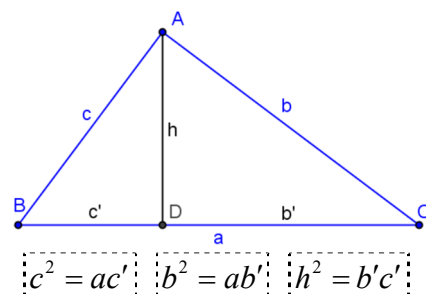
l) De stelling van Pythagoras

De projectiestellingen

Stel dat $\triangle ABC$ rechthoekig is in A , en noem D het voetpunt van A op $[BC]$, dan gelden de volgende stellingen:

$$|AB|^2 = |BD| \cdot |BC|, |AC|^2 = |CD| \cdot |CB| \text{ en } |AD|^2 = |DB| \cdot |DC|.$$

Noteren we (zoals meestal): $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AD| = h$, $|BD| = c'$ en $|CD| = b'$, dan krijg je de formules die onder de figuur staan. Deze formules staan bekend als de projectiestellingen.

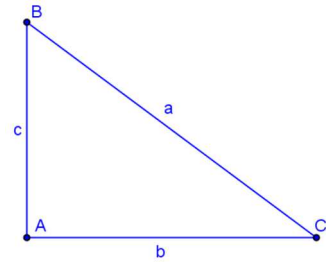


De stelling van Pythagoras

In een rechthoekige driehoek geldt: de som van de kwadraten van de rechthoekszijden is gelijk aan het kwadraat van de schuine zijde.

In symbolen: Als in $\triangle ABC$ geldt dat $\hat{A} = 90^\circ$ dan is $a^2 = b^2 + c^2$.

Ook omgekeerd geldt de stelling: als in een driehoek geldt dat het kwadraat van een zijde gelijk is aan de som van de kwadraten van de andere zijden, dan is deze driehoek rechthoekig.



Driehoeksmeting in rechthoekige driehoeken

In een rechthoekige driehoek definiëren we sinus, cosinus en tangens van een scherpe hoek α als volgt:

- | |
|--|
| <ul style="list-style-type: none">• $\sin \alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$• $\cos \alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$• $\tan \alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$ |
|--|

Hieruit volgt dat voor elke scherpe hoek α geldt: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ en $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

5. ANALYTISCHE MEETKUNDE

Cartesische vergelijking van een rechte

Elke rechte in het (x,y) -vlak kan je voorstellen met een lineaire vergelijking: $r \leftrightarrow ux + vy + w = 0$. Hierbij zijn u en v niet beide nul. In deze notatie lees je ' $\leftrightarrow$ ' als: "heeft als vergelijking".

We onderscheiden 3 gevallen:

- $u = 0 \wedge v \neq 0$: De rechte is evenwijdig met de x-as en heeft ook als vergelijking $y = a$.
- $u \neq 0 \wedge v = 0$: De rechte is evenwijdig met de y-as en heeft ook als vergelijking $x = b$.
- $u \neq 0 \wedge v \neq 0$: De rechte snijdt beide assen, we noemen $m = -\frac{u}{v}$ de richtingscoëfficiënt.

Een rechte bepalen door twee punten of door een punt met gegeven richtingscoëfficiënt

De vergelijking van de rechte door $P_1(x_1, y_1)$ en $P_2(x_2, y_2)$ is $r \leftrightarrow y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$. Hierbij is

de richtingscoëfficiënt $m_r = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

De rechte met richtingscoëfficiënt m door $P_1(x_1, y_1)$ heeft vergelijking: $r \leftrightarrow y = m(x - x_1) + y_1$.

Het midden en de lengte van een lijnstuk

Het midden van het lijnstuk $[P_1P_2]$, met $P_1(x_1, y_1)$ en $P_2(x_2, y_2)$ is het punt $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

De lengte van dit lijnstuk wordt gegeven door $|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

6. Statistiek

Centrummaten

- Modus: het meest voorkomend element.
- Mediaan: het middelste getal van een aantal geordende getallen. Dit wordt vaak genoteerd met Me .
- Gemiddelde: het getal, gevonden door de som van alle getallen te delen door het aantal. Dit wordt vaak genoteerd als $\bar{x}$.

Spreidingsmaten.

- De kwadratische afwijking van een gegeven x_i ten opzichte van het gemiddelde $\bar{x}$ is het getal $(x_i - \bar{x})^2$.
- De variantie is het gemiddelde van de kwadratische afwijkingen van de gegevens ten opzichte van $\bar{x}$.
- De standaardafwijking is de vierkantswortel van de variantie.