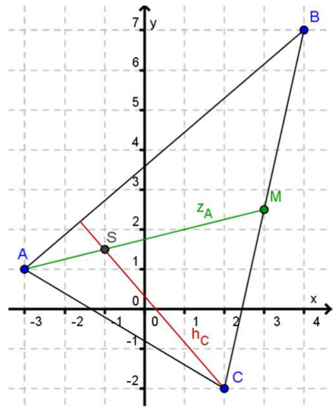
Voorbeeldoplossing toets: Analytische meetkunde – loodrechte stand

1. Gegeven is een driehoek ΔABC met $A(-3,1)$, $B(4,7)$ en $C(2,-2)$. Bepaal de coördinaat van het snijpunt van de zwaartelijn uit A met de hoogtelijn uit C.



$M_{[BC]}\left(3,\frac{5}{2}\right)$, dus $z_A \leftrightarrow y=\dfrac{\frac{5}{2}-1}{3+3}(x+3)+1$. Dus $\boxed{z_A \leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}}$

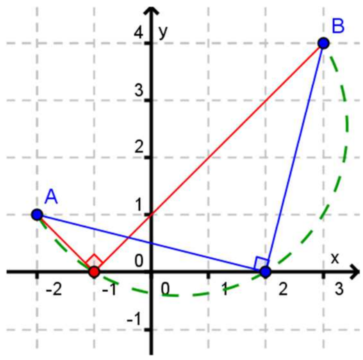
$m_{AB}=\dfrac{7-1}{4+3}=\dfrac{6}{7} \Leftrightarrow m_{h_C}=-\dfrac{7}{6}$, zodat $h_C \leftrightarrow y=-\dfrac{7}{6}(x-2)-2$.

Eenvoudiger geschreven: $\boxed{h_C \leftrightarrow y=-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}}$

Snijpunt bepalen: $\begin{cases} y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4} \\ y=-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3} \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$ $*$: $\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}=-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x+21=-14x+4 \Leftrightarrow x=-1$,

en $y=\frac{1}{4}\cdot(-1)+\frac{7}{4}=\frac{3}{2}$. Het snijpunt is dus $S\left(-1,\frac{3}{2}\right)$.

2. Gegeven zijn de punten $A(-2,1)$ en $B(3,4)$. Bepaal de coördinaten van de punten C op de x-as zodat $AC \perp BC$.



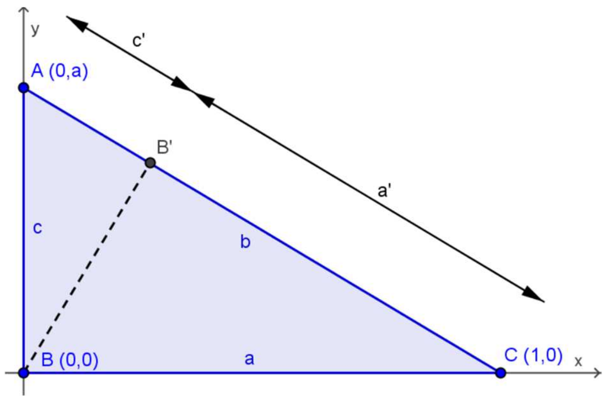
Elk punt op de x-as kunnen we noteren als $C(c,0)$, met $c \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

$$AC \perp BC \quad \Leftrightarrow m_{AC}.m_{BC}=-1 \Leftrightarrow \frac{1}{-2-c}\cdot\frac{4}{3-c}=-1 \Leftrightarrow \frac{4}{c^2-c-6}=-1$$
$$\Leftrightarrow c^2-c-6=-4 \Leftrightarrow c^2-c-2=0 \Leftrightarrow c=-1 \vee c=2$$

De gezochte punten zijn dus $C_1(-1,0)$ en $C_2(2,0)$.

3. Men wil de volgende stelling analytisch bewijzen:

"In een rechthoekige driehoek is een rechthoekszijde de middelevenredige tussen de schuine zijde en de loodrechte projectie van die rechthoekszijde op de schuine zijde."



Bepaal de coördinaat van B' (de loodrechte projectie van B op de schuine zijde).

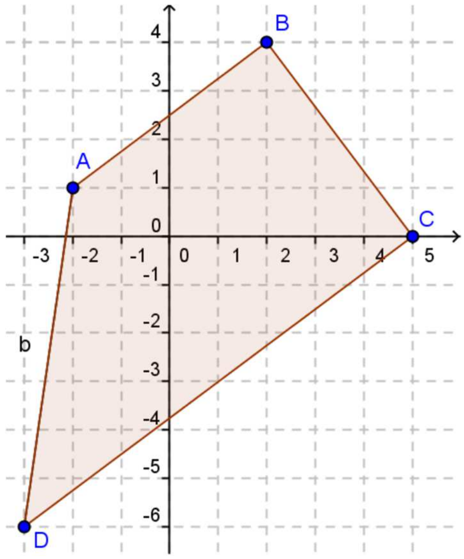
$AC \leftrightarrow y=\dfrac{0-a}{1-0}(x-0)+a$ of nog $AC \leftrightarrow y=-ax+a$.

$BB' \leftrightarrow y=\dfrac{1}{a}x$ ($m_{BB'}=\dfrac{1}{a}$ omdat $BB' \perp AC$).

Snijpunt: $\begin{cases} y=\frac{1}{a}x \\ y=-ax+a \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=\frac{a^2}{a^2+1} \\ y=\frac{a}{a^2+1} \end{cases}$ $*$: $\frac{1}{a}x=-ax+a \Leftrightarrow x=-a^2x+a^2 \Leftrightarrow (a^2+1)x=a^2 \Leftrightarrow x=\frac{a^2}{a^2+1}$

Dus hebben we dat $B'\left(\dfrac{a^2}{a^2+1},\dfrac{a}{a^2+1}\right)$.

4. Gegeven zijn de punten $A(-2,1)$, $B(2,4)$, $C(5,0)$ en $D(-3,-6)$.
Bewijs dat vierhoek $ABCD$ een rechthoekig trapezium is, en bereken zijn oppervlakte.



$m_{AB} = \dfrac{4-1}{2+2} = \dfrac{3}{4}$ en $m_{CD} = \dfrac{0+6}{5+3} = \dfrac{3}{4}$, zodat $m_{AB} = m_{CD} \Leftrightarrow AC \parallel CD$.

$m_{BC} = \dfrac{0-4}{5-2} = -\dfrac{4}{3}$, zodat $m_{AB}.m_{BC} = -1 \Leftrightarrow AB \perp BC$.

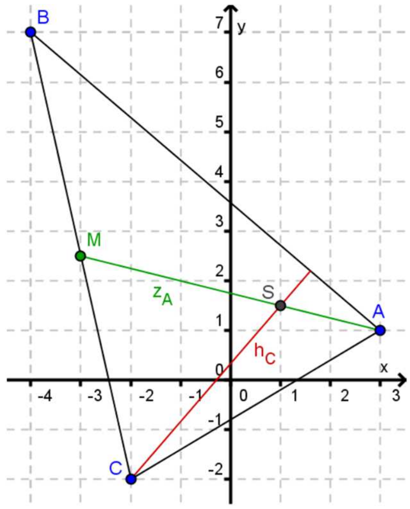
$ABCD$ is dus wel degelijk een rechthoekig trapezium.

$|AB| = \sqrt{(4-1)^2 + (2+2)^2} = 5$ en analoog $|BC| = 5$ en $|CD| = 10$.

Dus $S_{ABCD} = \dfrac{(10+5).5}{2} = 37,5$.

Voorbeeldoplossing toets: Analytische meetkunde – loodrechte stand

1. Gegeven is een driehoek ΔABC met $A(3,1)$, $B(-4,7)$ en $C(-2,-2)$.
Bepaal de coördinaat van het snijpunt van de zwaartelijn uit A met de hoogtelijn uit C.



$M_{[BC]}\left(-3,\dfrac{5}{2}\right)$, dus $z_A \leftrightarrow y = \dfrac{-\frac{5}{2}+1}{3+3}(x-3)+1$. Dus: $\boxed{z_A \leftrightarrow y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{7}{4}}$

$m_{AB} = \dfrac{-7+1}{4+3} = -\dfrac{6}{7} \Leftrightarrow m_{h_C} = \dfrac{7}{6}$, zodat $h_C \leftrightarrow y = \dfrac{7}{6}(x+2)-2$.

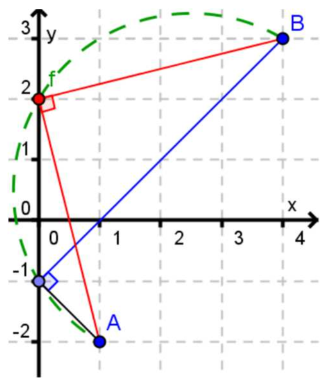
Eenvoudiger geschreven: $\boxed{h_C \leftrightarrow y = \dfrac{7}{6}x + \dfrac{1}{3}}$

Snijpunt bepalen: $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{7}{4} \\ y = \dfrac{7}{6}x + \dfrac{1}{3} \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

*: $-\dfrac{1}{4}x + \dfrac{7}{4} = \dfrac{7}{6}x + \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -3x + 21 = 14x + 4 \Leftrightarrow x = 1$, en dus $y = -\dfrac{1}{4}\cdot 1 + \dfrac{7}{4} = \dfrac{3}{2}$.

Het snijpunt is dus $S\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$.

2. Gegeven zijn de punten $A(1,-2)$ en $B(4,3)$. Bepaal de coördinaten van de punten C op de y-as zodat $AC \perp BC$.



Elk punt op de y-as kunnen we noteren als $C(0,c)$, met $c \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

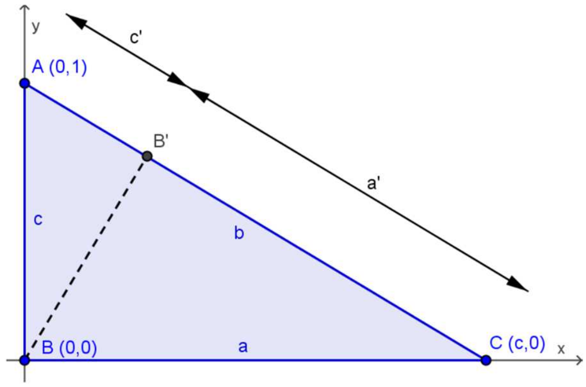
$$AC \perp BC \quad \Leftrightarrow m_{AC}.m_{BC} = -1 \Leftrightarrow \frac{-2-c}{1}\cdot\frac{3-c}{4} = -1 \Leftrightarrow \frac{c^2-c-6}{4} = -1$$
$$\Leftrightarrow c^2 - c - 6 = -4 \Leftrightarrow c^2 - c - 2 = 0 \Leftrightarrow c = -1 \vee c = 2$$

De gezochte punten zijn dus $C_1(0,-1)$ en $C_2(0,2)$.

3. Men wil de volgende stelling analytisch bewijzen:

"In een rechthoekige driehoek is een rechthoekszijde de middelevenredige tussen de schuine zijde en de loodrechte projectie van die rechthoekszijde op de schuine zijde."

Bepaal de coördinaat van B' (de loodrechte projectie van B op de schuine zijde).



$AC \leftrightarrow y = \dfrac{0-1}{c-0}(x-0)+1$ of nog $AC \leftrightarrow y = -\dfrac{1}{c}x+1$.

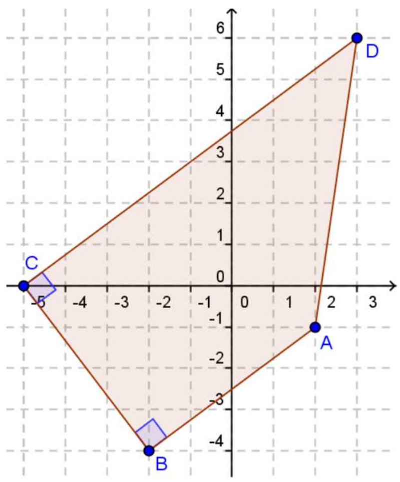
$BB' \leftrightarrow y = cx$ ($m_{BB'} = c$ omdat $BB' \perp AC$).

Snijpunt: $\begin{cases} y = cx \\ y = -\dfrac{1}{c}x+1 \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = \dfrac{c}{c^2+1} \\ y = \dfrac{c^2}{c^2+1} \end{cases}$ *:

$cx = -\dfrac{1}{c}x+1 \Leftrightarrow c^2x = -x+c \Leftrightarrow (c^2+1)x = c \Leftrightarrow x = \dfrac{c}{c^2+1}$

Dus hebben we dat $B'\left(\dfrac{c}{c^2+1}, \dfrac{c^2}{c^2+1}\right)$.

4. Gegeven zijn de punten $A(2,-1)$, $B(-2,-4)$, $C(-5,0)$ en $D(3,6)$. Bewijs dat vierhoek $ABCD$ een rechthoekig trapezium is, en bereken zijn oppervlakte.



$m_{AB} = \dfrac{4-1}{2+2} = \dfrac{3}{4}$ en $m_{CD} = \dfrac{0+6}{5+3} = \dfrac{3}{4}$, zodat $m_{AB} = m_{CD} \Leftrightarrow AC \parallel CD$.

$m_{BC} = \dfrac{0-4}{5-2} = -\dfrac{4}{3}$, zodat $m_{AB}.m_{BC} = -1 \Leftrightarrow AB \perp BC$.

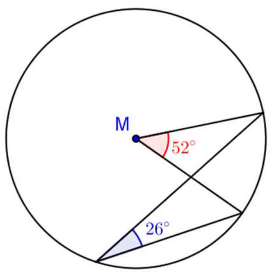
$ABCD$ is dus wel degelijk een rechthoekig trapezium.

$|AB| = \sqrt{(4-1)^2+(2+2)^2} = 5$ en analoog $|BC| = 5$ en $|CD| = 10$.

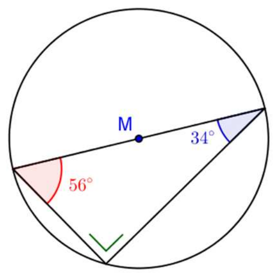
Dus $S_{ABCD} = \dfrac{(10+5).5}{2} = 37,5$.

Voorbeeldoplossing toets: de cirkel (inleiding)

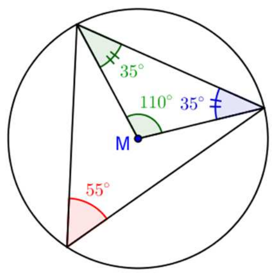
1. Noteer telkens de grootte van hoek α onder de figuur.



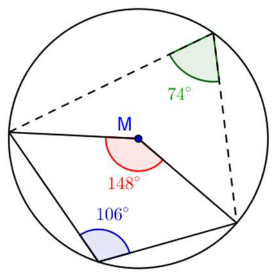
$\boxed{\alpha = 52°}$



$\boxed{\alpha = 56°}$

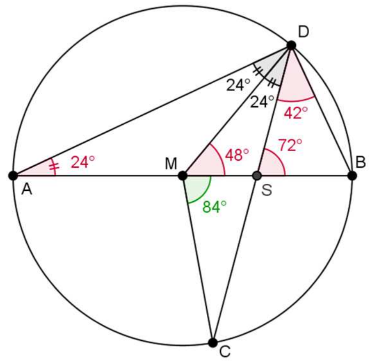


$\boxed{\alpha = 55°}$



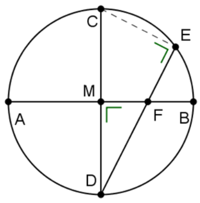
$\boxed{\alpha = 148°}$

2. In een cirkel met middelpunt M is $[AB]$ een diameter. $[CD]$ is een koorde die $[AB]$ snijdt in een punt S en zodat DM een bissectrice is van $\widehat{ADC}$. Verder weet je dat $\widehat{BMC} = 84°$.



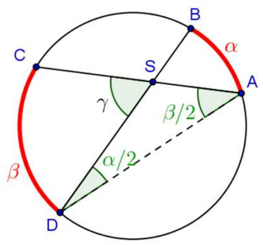
- $\widehat{BDC} = 42°$ (hoofdstelling)
- $\widehat{BAD} = \widehat{ADM} = \widehat{MDC} = 24°$ ($\widehat{BDA} = 90°$ (OHC) en ΔMAD is gelijkbenig)
- $\widehat{BMD} = 48°$ (hoofdstelling)
- $\widehat{BSD} = 72°$ (buitenhoek)

3. Twee diameters $[AB]$ en $[CD]$ van een cirkel staan loodrecht op elkaar. De koorde $[DE]$ snijdt $[AB]$ in een punt F (zie figuur). Als je weet dat $|DF| = 8$ en $|EF| = 4,5$, bereken dan de straal van deze cirkel.



$$\begin{cases} \widehat{DMF} = \widehat{DEC} = 90° \; (_{OHC}) \\ \widehat{MDF} = \widehat{EDC} \; (_{gem.}) \end{cases} \overset{HH}{\Leftrightarrow} \Delta DMF \sim \Delta DEC \Rightarrow \frac{|DC|}{|DF|} = \frac{|DE|}{|DM|} \Leftrightarrow \frac{2r}{8} = \frac{12,5}{r} \Leftrightarrow r = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

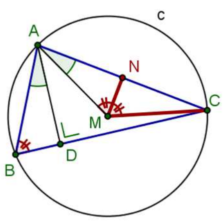
4. Bewijs de stelling van de binnenomtrekshoek: $\gamma = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ *(zie figuur).*



Teken $[AD]$, dan zijn $\widehat{SAD} = \beta/2$ en $\widehat{SDA} = \alpha/2$ (hoofdstelling).

Dus is $\gamma = \alpha/2 + \beta/2$ (buitenhoek).

5. Gegeven is een driehoek ΔABC en zijn omgeschreven cirkel c, met middelpunt M. $[AD]$ is het hoogtelijnstuk op zijde $[BC]$. Bewijs dat $\widehat{BAD} = \widehat{MAC}$.



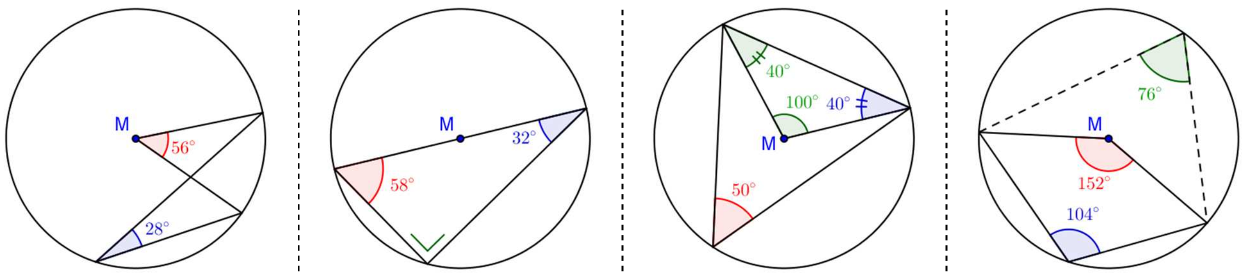
Teken het apothema $[MN]$ van $[AC]$ dan is $MN \perp AC$ en ook $\widehat{AMN} = \widehat{NMC}$.

Wegens de hoofdstelling weten we dat $\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}\widehat{AMC}$, en dus wegens het vorige dat $\widehat{ABC} = \widehat{AMN}$.

De twee driehoeken ΔABD en ΔAMN zijn dus gelijkvormig (HH), en daarom geldt ook $\widehat{BAD} = \widehat{MAC}$. □

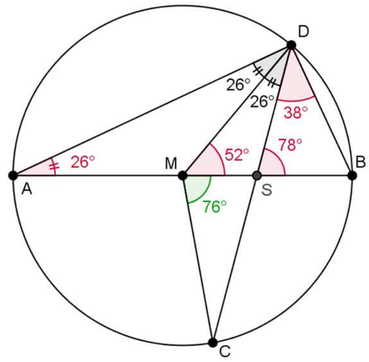
Voorbeeldoplossing toets: de cirkel (inleiding)

1. Noteer telkens de grootte van hoek α onder de figuur.



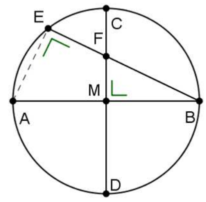
$\boxed{\alpha = 56°}$ $\boxed{\alpha = 58°}$ $\boxed{\alpha = 50°}$ $\boxed{\alpha = 104°}$

2. In een cirkel met middelpunt M is $[AB]$ een diameter. $[CD]$ is een koorde die $[AB]$ snijdt in een punt S en zodat DM een bissectrice is van $\widehat{ADC}$. Verder weet je dat $\widehat{BMC} = 76°$. Bereken de aangeduide hoeken.



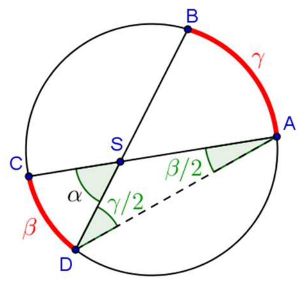
- $\widehat{BDC} = 38°$ (hoofdstelling)
- $\widehat{BAD} = \widehat{ADM} = \widehat{MDC} = 26°$ ($\widehat{BDA} = 90°$ (OHC) en ΔMAD is gelijkbenig)
- $\widehat{BMD} = 52°$ (hoofdstelling)
- $\widehat{BSD} = 78°$ (buitenhoek)

3. Twee diameters $[AB]$ en $[CD]$ van een cirkel staan loodrecht op elkaar. De koorde $[BE]$ snijdt $[CD]$ in een punt F (zie figuur). Als je weet dat $|BF| = 5$ en $|EF| = 3$, bereken dan de straal van deze cirkel. *(HINT: ga op zoek naar gelijkvormige driehoeken)*



$$\begin{cases} \widehat{BMF} = \widehat{BEA} = 90° \text{ (OHC)} \\ \widehat{MBF} = \widehat{EBA} \text{ (gem.)} \end{cases} \overset{HH}{\Leftrightarrow} \Delta BMF \sim \Delta BEA \Rightarrow \frac{|AB|}{|FB|} = \frac{|BE|}{|BM|} \Leftrightarrow \frac{2r}{5} = \frac{8}{r} \Leftrightarrow r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

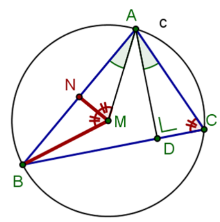
4. Bewijs de stelling van de binnenomtrekshoek: $\alpha = \dfrac{\beta + \gamma}{2}$ *(zie figuur)*



Teken $[AD]$, dan zijn $\widehat{SAD} = \beta/2$ en $\widehat{SDA} = \gamma/2$ (hoofdstelling).

Dus is $a = \beta/2 + \gamma/2$ (buitenhoek).

5. Gegeven is een driehoek ΔABC en zijn omgeschreven cirkel c, met middelpunt M. $[AD]$ is het hoogtelijnstuk op zijde $[BC]$.Bewijs dat $\widehat{BAM} = \widehat{DAC}$.



Teken het apothema $[MN]$ van $[AB]$ dan is $MN \perp AB$ en ook $\widehat{AMN} = \widehat{NMB}$.

Wegens de hoofdstelling weten we dat $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AMB}$, en dus wegens het vorige dat $\widehat{ACB} = \widehat{AMN}$.

De twee driehoeken ΔACD en ΔAMN zijn dus gelijkvormig (HH), en daarom geldt ook $\widehat{BAM} = \widehat{DAC}$. □

Voorbeeldoplossing toets: parate kennis in verband met cirkels (A)

1. Stel de vergelijking op (uitgewerkt) van de cirkel $\mathcal{C}$ met middelpunt $M(2,-3)$ en straal $r=5$.

$$c \quad \leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=5^2$$
$$\leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+6y+9=25$$
$$\leftrightarrow x^2+y^2-4x+6y-12=0$$

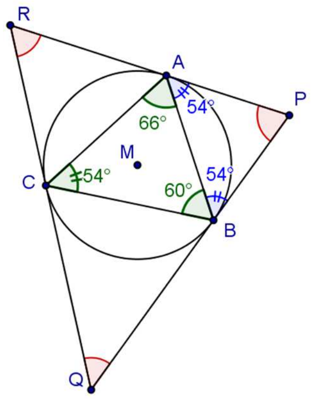
- Controleer dat punt $P(-1,1)\in c$

$$(-1)^2+1^2-4(-1)+6.1-12=0$$
$$\Leftrightarrow 1+1+4+6-12=0 : \boxed{OK}$$

2. Bepaal het middelpunt en de straal van de cirkel $\mathcal{C} \leftrightarrow x^2+y^2+4x-10y-7=0$.

$M(-2,5)$ *en* $r=\sqrt{4+25+7}=6$

3. Een driehoek ΔABC heeft hoeken $\widehat{A}=66°$, $\widehat{B}=60°$ en $\widehat{C}=54°$. De raaklijnen in A, B en C aan de omgeschreven cirkel van ΔABC snijden elkaar in P, Q en R (zie figuur)!



Bereken de grootte van de hoek $\widehat{P}$. Noteer zorgvuldig je werkwijze.

De hoeken $\widehat{PAB}$ en $\widehat{PBA}$ meten allebei ook $54°$ want het zijn raakomtrekshoeken op dezelfde boog als hoek $\widehat{C}$.

Dus moet hoek $\widehat{P}=72°$ (hoekensom in ΔPAB)

Voorbeeldoplossing toets: parate kennis in verband met cirkels (B)

1. Stel de vergelijking op (uitgewerkt) van de cirkel $\mathcal{C}$ met middelpunt $M(3,-2)$ en straal $r=5$.

$$c \quad \leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=5^2$$
$$\leftrightarrow x^2-6x+9+y^2+4y+4=25$$
$$\leftrightarrow x^2+y^2-6x+4y-12=0$$

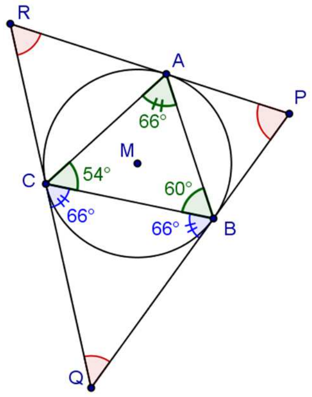
- Controleer dat punt $P(-1,1)\in c$

$$(-1)^2+1^2-6(-1)+4.1-12=0$$
$$\Leftrightarrow 1+1+6+4-12=0 : \boxed{OK}$$

2. Bepaal het middelpunt en de straal van de cirkel $\mathcal{C} \leftrightarrow x^2+y^2-14x+2y+14=0$.

$M(7,-1)$ *en* $r=\sqrt{49+1-14}=6$

3. Een driehoek ΔABC heeft hoeken $\widehat{A}=66°$, $\widehat{B}=60°$ en $\widehat{C}=54°$. De raaklijnen in A, B en C aan de omgeschreven cirkel van ΔABC snijden elkaar in P, Q en R (zie figuur)!



Bereken de grootte van de hoek $\widehat{Q}$. Noteer zorgvuldig je werkwijze.

De hoeken $\widehat{QCB}$ en $\widehat{QBC}$ meten allebei ook $66°$ want het zijn raakomtrekshoeken op dezelfde boog als hoek $\widehat{A}$.

Dus moet hoek $\widehat{Q}=48°$ (hoekensom in ΔQBC)

Voorbeeldoplossing toets: de cirkel

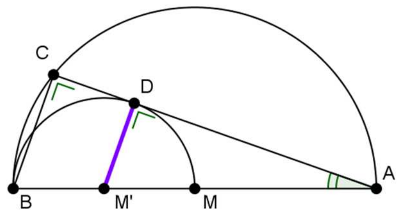
1. Bewijs de stelling: Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de middellijn door het raakpunt.

   Theorie!

2. $[AB]$ is de diameter van een cirkel met middelpunt M en straal 2.

   De koorde $[AC]$ raakt de cirkel met diameter $[BM]$ in punt D.

   Bereken de lengte $|BC|$.

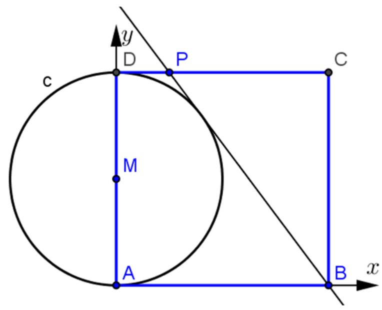


Teken het lijnstuk $[M'D]$, dan geldt $\widehat{ADM'} = 90°$ (rkl). Bovendien is ook $\widehat{ACB} = 90°$ (ohc), zodat:

$$\begin{cases} \hat{C} = \hat{D} = 90° \\ \hat{A} = \hat{A}\ (gem) \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ADM' \sim \Delta ACD \Rightarrow \frac{|BC|}{|M'D|} = \frac{|AB|}{|AM'|} \Leftrightarrow \frac{|BC|}{1} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow |BC| = \frac{4}{3}.$$

3. De cirkel c heeft als diameter $[AD]$, dat tevens de zijde is van een vierkant $ABCD$, met $|AD| = 16$. Punt P ligt op zijde $[CD]$ zodat $|PD| = 4$.

   Kies zelf een assenstelsel en onderzoek of BP een raaklijn is aan de cirkel c of niet.

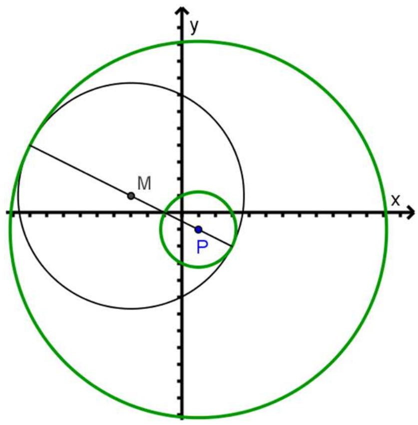


Kies het assenstelsel zoals op de figuur, dan geldt $B(16,0)$ en $P(4,16)$, zodat $BP \leftrightarrow y = -\frac{4}{3}(x-16)$, of nog $BP \leftrightarrow 4x + 3y - 64 = 0$. We berekenen $d(M, BP)$, met $M(0,8)$:

$$d(M, BP) = \frac{|4.0 + 3.8 - 64|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-40|}{5} = 8 = r_c \Rightarrow BP \text{ is een raaklijn aan cirkel } c.$$

4. Gegeven is de cirkel $c \leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y - 35 = 0$ en het punt $P(1,-1)$ binnen deze cirkel.

   Stel de vergelijking op van de cirkel c' met middelpunt P zodanig dat de cirkels c en c' elkaar inwendig raken.



We weten dat twee cirkels $c_{(M,r)}$ en $c_{(P,r')}$ elkaar inwendig raken als en slechts als geldt dat $|MP| = |r - r'|$.

Voor cirkel c geldt $M(-3,1)$ en $r = \sqrt{9+1+35} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Dus $|MP| = |r - r'| \Leftrightarrow \sqrt{(-3-1)^2 + (1+1)^2} = |3\sqrt{5} - r'| \Leftrightarrow \sqrt{20} = |3\sqrt{5} - r'|$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5} - r' \ \vee\ -2\sqrt{5} = 3\sqrt{5} - r' \Leftrightarrow r' = \sqrt{5} \ \vee\ r' = 5\sqrt{5}$$

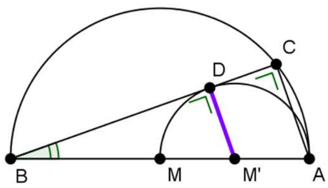
De twee oplossingen zijn dus $c_1' \leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$ en $c_2' \leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 125$

Voorbeeldoplossing toets: de cirkel

1. Bewijs de stelling van de macht van een punt t.o.v. een cirkel: als een rechte door een punt P een cirkel snijdt in A_1 en A_2 en een andere rechte door P snijdt die in B_1 en B_2, dan geldt $|PA_1|.|PA_2| = |PB_1|.|PB_2|$.

   Theorie!

2. $[AB]$ is de diameter van een cirkel met middelpunt M en straal 6. De koorde $[BC]$ raakt de cirkel met diameter $[AM]$ in punt D. Bereken de lengte $|AC|$. Noteer zorgvuldig je werkwijze.

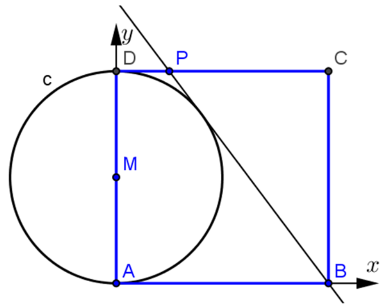


   Teken het lijnstuk $[M'D]$, dan geldt $\widehat{BDM'} = 90°$ (rkl). Bovendien is ook $\widehat{ACB} = 90°$ (ohc), zodat:

$$\begin{cases} \hat{C} = \hat{D} = 90° \\ \hat{B} = \hat{B}\ (gem) \end{cases} \Leftrightarrow \Delta BDM' \sim \Delta BCA \Rightarrow \frac{|AC|}{|M'D|} = \frac{|AB|}{|M'B|} \Leftrightarrow \frac{|AC|}{3} = \frac{12}{9} \Leftrightarrow |AC| = 4.$$

3. De cirkel c heeft als diameter $[AD]$, dat tevens de zijde is van een vierkant $ABCD$, met $|AD| = 20$. Punt P ligt op zijde $[CD]$ zodat $|PD| = 5$.

   Kies zelf een assenstelsel en onderzoek of BP een raaklijn is aan de cirkel c of niet.

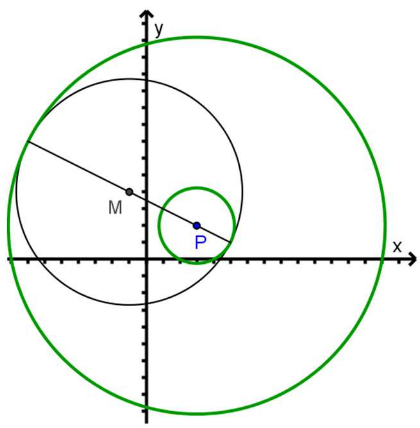


   Kies het assenstelsel zoals op de figuur, dan geldt $B(20,0)$ en $P(5,20)$, zodat $BP \leftrightarrow y = -\frac{4}{3}(x-20)$, of nog $BP \leftrightarrow 4x + 3y - 80 = 0$. We berekenen $d(M, BP)$, met $M(0,10)$:

$$d(M, BP) = \frac{|4.0 + 3.10 - 80|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-50|}{5} = 10 = r_c \Rightarrow BP \text{ is een raaklijn aan cirkel } c.$$

4. Gegeven is de cirkel $c \leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 8y - 28 = 0$ en het punt $P(3,2)$ binnen deze cirkel.

   Stel de vergelijking op van de cirkel c' met middelpunt P zodanig dat de cirkels c en c' elkaar inwendig raken.



   We weten dat twee cirkels $c_{(M,r)}$ en $c_{(P,r')}$ elkaar inwendig raken als en slechts als geldt dat $|MP| = |r - r'|$.

   Voor cirkel c geldt $M(-1,4)$ en $r = \sqrt{1+16+28} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

   Dus $|MP| = |r - r'| \Leftrightarrow \sqrt{(-1-3)^2 + (4-2)^2} = |3\sqrt{5} - r'| \Leftrightarrow \sqrt{20} = |3\sqrt{5} - r'|$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5} - r' \vee -2\sqrt{5} = 3\sqrt{5} - r' \Leftrightarrow r' = \sqrt{5} \vee r' = 5\sqrt{5}$$

   De twee oplossingen zijn dus $c_1' \leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$ en $c_2' \leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 125$

1. Vul het ontbrekende aan:

- Als $f(x) = x^3$, dan is $dom\ f = \mathbb{R}$
- Als $f(x) = \sqrt{x}$, dan is $bld\ f = \mathbb{R}^+$
- Bij $f(x) = \dfrac{1}{x}$ is het verloop (S&D):

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\vert$	$\searrow$	

- Als $f(x) = \sqrt[3]{x}$ dan is het tekenverloop:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. Stel $f(x) = ax^2 + x$. Bereken voor welke waarde van de parameter $a \in \mathbb{R}$ geldt dat $\left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{[1,5]} = 19$.

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{[1,5]} = 19 \Leftrightarrow \frac{f(5) - f(1)}{5-1} = 19 \Leftrightarrow \left(a.5^2 + 5\right) - \left(a.1^2 + 1\right) = 76 \Leftrightarrow 24a = 72 \Leftrightarrow a = 3$$

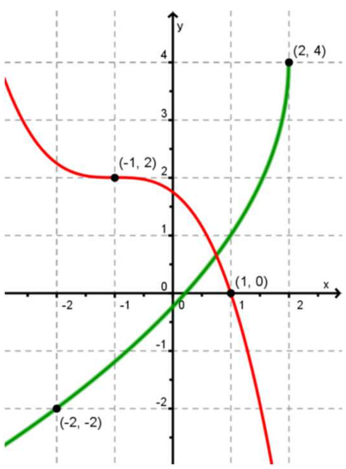
3. Beschouw de functie $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x-1}}{3} + 1$.

Geef aan hoe je de grafiek van f bekomt uit die van de standaard vierkantswortel met functievoorschrift $f_0(x) = \sqrt{x}$, en benoem ook (symbolisch) de opeenvolgende transformaties.

$$f_0(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{u_y\left(\frac{1}{3}\right)} f_1(x) = \frac{\sqrt{x}}{3} \xrightarrow{\vec{v}(1,0)} f_2(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{3} \xrightarrow{u_x\left(\frac{1}{4}\right)} f_3(x) = \frac{\sqrt{4x-1}}{3} \xrightarrow{S_x} f_4(x) = -\frac{\sqrt{4x-1}}{3}$$

$$\xrightarrow{\vec{v}(0,1)} f_5(x) = -\frac{\sqrt{4x-1}}{3} + 1$$

4. Stel de functievoorschriften op van de hiernaast getekende functies f_1 en f_2. Ze zijn bekomen door elementaire transformaties uit te voeren op $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ of $f(x) = x^3$.



- $f_1(x) = -a.(x+1)^3 + 2 \quad \left(S_x\ en\ \vec{v}(-1,2)\right)$

$$(1,0) \in f_1 \Leftrightarrow -a.(1+1)^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$f_1(x) = -\frac{1}{4}.(x+1)^3 + 2$$

- $f_2(x) = -a.\sqrt{-(x-2)} + 4 \quad \left(S_O\ en\ \vec{v}(2,4)\right)$

$$(-2,-2) \in f_2 \Leftrightarrow -a.\sqrt{-(-2-2)} + 4 = -2 \Leftrightarrow a = 3$$

$$f_2(x) = -3.\sqrt{-(x-2)} + 4$$

5. Vul onderstaand transformatieschema aan:

$f_0(x)=\frac{1}{x^2}$	
$f_1(x)=\frac{1}{(x+4)^2}$	$\vec{v}(-4,0)$
$f_2(x)=\frac{1}{(3x+4)^2}$	$u_x\left(\frac{1}{3}\right)$
$f_3(x)=\frac{7}{(3x+4)^2}$	$u_y(7)$
$f_4(x)=\frac{7}{(3x+4)^2}+2$	$\vec{v}(0,2)$
$f_5(x)=\frac{7}{(-3x+4)^2}+2$	S_y