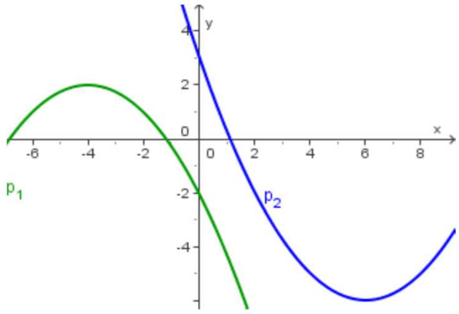
Uitdagingsoefeningen tweedegraadsfuncties

1. Zij gegeven twee parabolen, met vergelijking:

$p_1 \leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x - 2$

$p_2 \leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 3$



Bepaal de vergelijking van de rechten die raken aan beide parabolen. (★★★★)

Noem de raaklijn $t \leftrightarrow y = mx + q$ (twee parameters want we weten er niets van)

Snijpunten van deze rechten 'berekenen' met p_1 geeft:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x - 2 \\ y = mx + q \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 - 2x - 2 = mx + q \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 + (m+2)x + q + 2 = 0$$

Deze vergelijking mag maar één oplossing hebben (een snijpunt want het is een raaklijn), dus moet $\Delta = 0$. Hieruit volgt: $(m+2)^2 - 4.\frac{1}{4}.(q+2) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - q + 2 = 0$.

Snijpunten van deze rechten 'berekenen' met p_2 geeft:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 3 \\ y = mx + q \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - 3x + 3 = mx + q \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + (m+3)x + q - 3 = 0$$

Deze vergelijking mag maar één oplossing hebben (een snijpunt want het is een raaklijn), dus moet $\Delta = 0$. Hieruit volgt: $(m+3)^2 - 4.\frac{-1}{4}.(q-3) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + q + 6 = 0$.

We krijgen dus het stelsel: $\begin{cases} m^2 + 4m - q + 2 = 0 \\ m^2 + 6m + q + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = m^2 + 4m + 2 \\ q = -m^2 - 6m - 6 \end{cases}$.

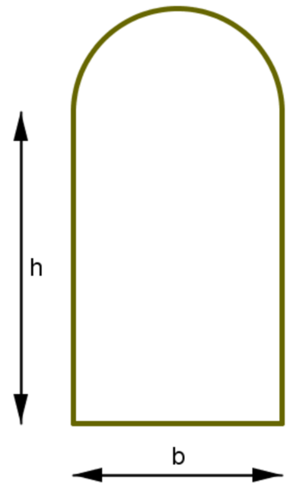
Gelijkstellen geeft:

$m^2 + 4m + 2 = -m^2 - 6m - 6 \Leftrightarrow 2m^2 + 10m + 8 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 5m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \;\vee\; m = -4$

Als $q = -1$ vind je $m = (-1)^2 + 4.(-1) + 2 = -1$. De eerste raaklijn is dus $t_1 \leftrightarrow y = -x - 1$.

Als $q = -4$ vind je $m = (-4)^2 + 4.(-4) + 2 = 2$. De eerste raaklijn is dus $t_1 \leftrightarrow y = -4x + 2$.

2. Een raam heeft de vorm van een rechthoek waarop een halve cirkel staat (zie figuur).
Wat is de maximale oppervlakte voor het raam als je maar $4\,m$ materiaal hebt om de omkasting te maken. Bij welke afmetingen voor b en h wordt deze bereikt?
(★★★★)



De omtrek van een halve cirkel wordt gegeven door $\frac{P}{2}=\frac{2\pi r}{2}=\pi r$. Dus het stukje halve cirkel bovenaan het raam meet $\frac{\pi b}{2}$, zodat voor heel het raam geldt: $b+2h+\frac{\pi b}{2}=4$.

Hieruit kan je afleiden dat $h=\dfrac{4-b-\frac{\pi b}{2}}{2}=2-\frac{b}{2}-\frac{\pi b}{4}$.

De oppervlakte van het raam wordt gegeven door $S=bh+\dfrac{\pi\left(b/2\right)^2}{2}=bh+\dfrac{\pi b^2}{8}$.

Vullen we in wat we weten voor h dan wordt dit:

$$S=b\left(2-\frac{b}{2}-\frac{\pi b}{4}\right)+\frac{\pi b^2}{8}=2b-\frac{b^2}{2}-\frac{\pi}{4}b^2+\frac{\pi}{8}b^2=\left(-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\right)b^2+2b$$

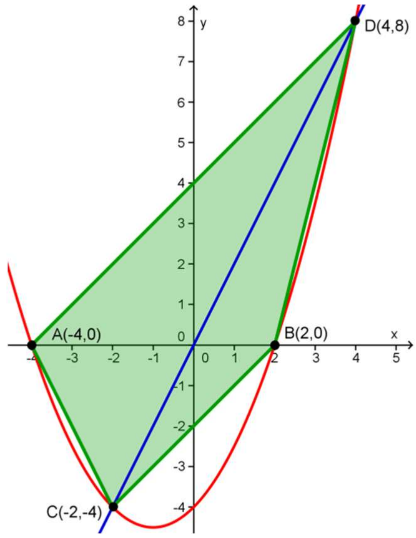
De top van deze functie is $\alpha=\dfrac{-2}{-\frac{\pi}{4}-1}=\dfrac{8}{\pi+4}$ (teller en noemer vermenigvuldigen met -4).

Invullen geeft: $\beta=\left(-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{8}{\pi+4}\right)^2+2.\frac{8}{\pi+4}=-\frac{\cancel{\pi+4}}{\cancel{8}}\cdot\frac{8^{\cancel{2}}}{(\pi+4)^{\cancel{2}}}+2.\frac{8}{\pi+4}=\frac{8}{\pi+4}$.

En dan is $h=\dfrac{4-b-\frac{\pi b}{2}}{2}=2-\dfrac{\frac{8}{\pi+4}}{2}-\dfrac{\pi\frac{8}{\pi+4}}{4}=2-\dfrac{4}{\pi+4}-\dfrac{2\pi}{\pi+4}=\dfrac{4}{\pi+4}$.

De oppervlakte is maximaal als $b=\dfrac{8}{\pi+4}\,m$ en $h=\dfrac{4}{\pi+4}\,m$, namelijk $S=\dfrac{8}{\pi+4}\,m^2$.

3. De parabool $p \leftrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ snijdt de x-as in twee punten A en B, en de rechte $r \leftrightarrow y = 2x$ in de punten C en D. Bepaal de oppervlakte van de vierhoek $ACBD$. (★★★)



De nulpunten van p zijn -4 en 2 dus de parabool snijdt de x-as in de punten $A(-4,0)$ en $B(2,0)$.

De snijpunten van p en r vinden we als volgt:

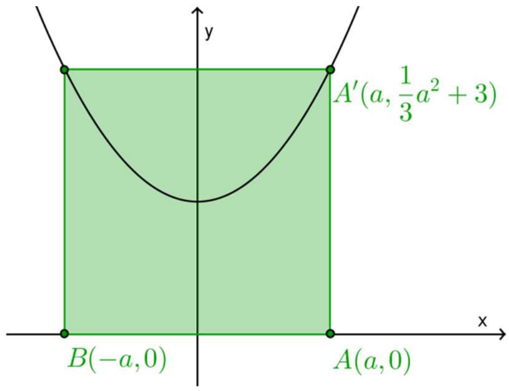
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4 \\ y = 2x \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases}.$$

$$* : \frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \ \vee \ x = 4$$

De vierhoek bestaat uit twee driehoek ΔABC en ΔABD. Voor beide driehoeken kunnen we als basis $|AB| = 6$ nemen:

$$\left.\begin{aligned} S_{\Delta ABC} &= \frac{6.4}{2} = 12 \\ S_{\Delta ABD} &= \frac{6.8}{2} = 24 \end{aligned}\right\} S_{ABCD} = 36$$

4. Bepaal de oppervlakte van het vierkant met twee hoekpunten op de x-as en twee hoekpunten op de parabool $p \leftrightarrow y = \frac{1}{3}x^2 + 3$. (★★*)



Nemen we als punt $A(a,0)$ dan heeft het punt A' dat boven A op de parabool ligt als coördinaat $A'\left(a, \frac{1}{3}a^2 + 3\right)$.

Opdat het een vierkant zou zijn moet gelden dat $|AB| = |AA'|$ (zie figuur), dus moet gelden dat:

$2a = \frac{1}{3}a^2 + 3 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = 3$. De oppervlakte van het vierkant is dan $6^2 = 36$.