Uitdagingsoefeningen vierkantsvergelijkingen

1. Los de hieronder staande vierkantsvergelijkingen op

- $\dfrac{x-4}{x}.\dfrac{x+6}{x}.\dfrac{x+3}{x}=1$ (★★★)

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2x-24\right)\left(x+3\right)=x^3 \Leftrightarrow x^3+5x^2-18x-72=x^3 \Leftrightarrow 5x^2-18x-72=0 \Leftrightarrow x=6 \;\vee\; x=-\frac{12}{5}$$

$$V=\left\{6,-\frac{12}{5}\right\}$$

- $\left(a^2-a\right)x^2+x-\left(a^2+a\right)=0\;,\;\; met\ \boxed{a\notin\{0,1\}}$ (★★★★)

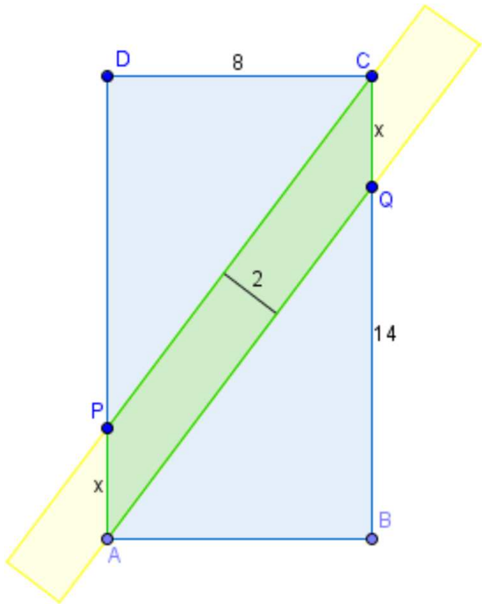
$$\Delta=1-4.\left(a^2-a\right).\left[-\left(a^2+a\right)\right]=1+4a^4-4a^2=4a^4-4a^2+1=\left(2a^2-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-1-\left(2a^2-1\right)}{2\left(a^2-a\right)}=\frac{-2a^2}{2a\left(a-1\right)}=\frac{-a}{a-1}$$

$$\vee\; x=\frac{-1+\left(2a^2-1\right)}{2\left(a^2-a\right)}=\frac{2a^2-2}{2a\left(a-1\right)}=\frac{2\left(a-1\right)\left(a+1\right)}{2a\left(a-1\right)}=\frac{a+1}{a}$$

$$V=\left\{\frac{-a}{a-1},\frac{a+1}{a}\right\}$$

2. (★★★★) Zij gegeven een rechthoek $ABCD$ met zijden $|AB|=8$ en $|BC|=14$. De zijden $[AD]$ en $[BC]$ snijden van een evenwijdige strip met breedte 2 een parallellogram af. Bereken de maximale oppervlakte van dat parallellogram.



Het is duidelijk dat de maximale oppervlakte bereikt zal worden door het parallellogram $\square APCQ$. We noemen de lengtes $|AP|=|CQ|=x$.

Dan geldt voor de oppervlakte van het parallellogram:
$S_{\square}=b.h=8x$ (basis = $[AP]$ en hoogte $[AB]$).

Anderzijds kunnen we ook $[PC]$ als basis nemen, dan is de hoogte 2.

In ΔPDC geldt wegens de stelling van Pythagoras:

$$|PC|^2=\underbrace{|PD|^2}_{=14-x}+\underbrace{|CD|^2}_{=8}\Leftrightarrow |PC|=\sqrt{x^2-28x+260}\,.$$

Dus op deze manier geldt: $S_{\square}=2.\sqrt{x^2-28x+260}$.

Beide oppervlakten moeten uiteraard gelijk zijn, dus geldt:

$$S_{\square}=2.\sqrt{x^2-28x+260}=8x\Leftrightarrow\sqrt{x^2-28x+260}=4x\Leftrightarrow x^2-28x+260=16x^2\Leftrightarrow 15x^2+28x-260=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{10}{3}\;\vee\;\cancel{x=-\frac{26}{5}}$$

De maximale oppervlakte is dus $S_{\square_{\max}}=8.\dfrac{10}{3}=\dfrac{80}{3}$.

3. (★★★★) Gegeven is een vierkantsvergelijking $x^2 - sx + p = 0$ waarvan je weet dat de oplossingen x_1 en x_2 zijn. Stel dan een vergelijking op waarvan de oplossingen $x_1{}^2$ en $x_2{}^2$ zijn.

Uit het gegeven volgt dat $\begin{cases} x_1 + x_2 = s \\ x_1.x_2 = p \end{cases}$. Kwadrateren geeft: $\begin{cases} x_1{}^2 + 2.x_1.x_2 + x_2{}^2 = s^2 \\ x_1{}^2.x_2{}^2 = p^2 \end{cases}$, waaruit onmiddellijk volgt dat $\begin{cases} x_1{}^2 + x_2{}^2 = s^2 - 2p \\ x_1{}^2.x_2{}^2 = p^2 \end{cases}$.

De vierkantsvergelijking met $x_1{}^2$ en $x_2{}^2$ als wortels is dus: $x^2 - \left(s^2 - 2p\right)x + p^2 = 0$.

4. (★★★⋆) Los de vergelijking $120q^4 - 364q^3 + 120q^2 - 364q + 120 = 0$ op.

(Hint: deel de vergelijking door q^2 en gebruik de substitutie $x = q + \frac{1}{q}$, waarbij je eerst enkele termen hebt samengenomen. Dit noemen we een wederkerige vergelijking).

Stellen we $q + \frac{1}{q} = x$ dan is $x^2 = \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 = q^2 + 2 + \frac{1}{q^2}$ dus ook $q^2 + \frac{1}{q^2} = x^2 - 2$.

De vgl. wordt:

$$
\begin{aligned}
& 120\left(x^2 - 2\right) - 364x + 120 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 120x^2 - 364x - 120 = 0 \\
\overset{vkv}{\Leftrightarrow} \quad & x = \frac{10}{3} \vee x = \frac{-3}{10}
\end{aligned}
$$

(We hebben op die manier de vierdegraadsvergelijking herleid tot de volgende 2 vierkantsvergelijkingen)

$q + \frac{1}{q} = \frac{10}{3}$	$q + \frac{1}{q} = \frac{-3}{10}$
$\Leftrightarrow \quad 3q^2 - 10q + 3 = 0$	$\Leftrightarrow \quad 10q^2 + 3q + 10 = 0$
$\Leftrightarrow \quad q = 3 \vee q = \frac{1}{3}$	$D < 0$

$V = \left\{3, \frac{1}{3}\right\}$.