<u>Voorbeeldoplossing analytische meetkunde (reeks A)</u>

1. Gegeven zijn de punten $A(-7,2)$ en $B(-1,10)$. De middelloodlijn van $[AB]$ snijdt de x-as en y-as respectievelijk in P en Q. Bereken de lengte $|PQ|$.

Midden $M\left(\dfrac{-7-1}{2};\dfrac{2+10}{2}\right)=M(-4,6)$ en $m_{AB}=\dfrac{10-2}{-1+7}=\dfrac{4}{3}\overset{\perp}{\Leftrightarrow} m_l=-\dfrac{3}{4}$. Dus $l\leftrightarrow y=-\dfrac{3}{4}(x+4)+6$.

Eenvoudiger geschreven is dit: $l\leftrightarrow 3x+4y-12=0$. Deze rechte snijdt de assen in $P(4,0)$ en $Q(0,3)$.

Zo vind je dat: $|PQ|=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

2. Gegeven zijn de punten $A(-1,2)$, $B(3,4)$, $C(7,1)$ en $D(-1,-3)$.

- Bewijs dat $\square ABCD$ een trapezium is.

$$m_{AB}=\frac{4-2}{3+1}=\frac{1}{2} \text{ en } m_{CD}=\frac{1+3}{7+1}=\frac{1}{2} \Rightarrow m_{AB}=m_{CD}\Leftrightarrow AB\,//\,CD$$

- Bereken de oppervlakte van dit trapezium.

$$AB\leftrightarrow y=\frac{1}{2}(x+1)+2 \ (\leftrightarrow x-2y+5=0) \text{ en } |AB|=\sqrt{(3+1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$|CD|=\sqrt{(-3-1)^2+(-1-7)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5} \text{ en hoogte } h=d(C,AB)=\frac{|7-2.1+5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$S_{ABCD}=\frac{\left(4\sqrt{5}+2\sqrt{5}\right).\dfrac{10}{\sqrt{5}}}{2}=\frac{6\cancel{\sqrt{5}}.\dfrac{10}{\cancel{\sqrt{5}}}}{2}=30$$

3. Gegeven zijn de cirkels $c_1\leftrightarrow x^2+y^2+2x-y-5=0$ en $c_2\leftrightarrow x^2+y^2-10x+8y+16=0$.

- Bepaal het (enige) snijpunt van deze twee cirkels.

$$\begin{cases}x^2+y^2+2x-y-5=0\\x^2+y^2-10x+8y+16=0\end{cases}\begin{array}{|l}1\\-1\end{array}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+2x-y-5=0\\12x-9y-21=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{\qquad\qquad}\\y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{7}{3}\end{cases}\overset{*}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$$

$$*: x^2+\left(\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}\right)^2+2x-\left(\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}\right)-5=0\Leftrightarrow x^2+\frac{16}{9}x^2-\frac{56}{9}x+\frac{49}{9}+2x-\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}-5=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{25}{9}x^2-\frac{50}{9}x+\frac{25}{9}=0\Leftrightarrow x=1$$

Er is maar één snijpunt, namelijk $S(1,-1)$.

- Bepaal de middelpunten en de stralen van deze beide cirkels en leid hieruit af dat de beide cirkels elkaar uitwendig raken.

$x^2+y^2+2x-y-5=0\Leftrightarrow(x+1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$, dus $M_1\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$ en $r_1=\dfrac{5}{2}$.

$x^2+y^2-10x+8y+16=0\Leftrightarrow(x-5)^2+(y+4)^2=25$, dus $M_2(5,-4)$ en $r_2=5$.

Dus $|M_1M_2|=\sqrt{(5-(-1))^2+\left(-4-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{36+\dfrac{81}{4}}=\sqrt{\dfrac{225}{4}}=\dfrac{15}{2}=r_1+r_2$, dus de cirkels raken mekaar wel degelijk uitwendig.

4. Gegeven is de driehoek ΔABC met $A(8,-5)$, $B(-7,3)$ en $C(-4,4)$.

Bewijs dat punt $P(-3,2)$ op een bissectrice van hoek $\widehat{BAC}$ ligt.

Dan moet $d(P,AB)=d(P,AC)$.

Je kan berekenen dat $AB \leftrightarrow y=\frac{3+5}{-7-8}(x-8)-5$ of nog $AB \leftrightarrow y=-\frac{8}{15}x-\frac{11}{15}$ ($\Rightarrow AB \leftrightarrow 8x+15y+11=0$)

en dat $AC \leftrightarrow y=\frac{4+5}{-4-8}(x-8)-5$ of nog $AC \leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x+1$ ($\Rightarrow AC \leftrightarrow 3x+4y-4=0$)

Dus $d(P,AB)=\frac{|8.(-3)+15.2+11|}{\sqrt{8^2+15^2}}=\frac{17}{17}=1$ en $d(P,AC)=\frac{|3.(-3)+4.2-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{5}{5}=1$ □

<u>Voorbeeldoplossing analytische meetkunde (reeks B)</u>

1. Gegeven zijn de punten $A(-2,7)$ en $B(-10,1)$. De middelloodlijn van $[AB]$ snijdt de x-as en y-as respectievelijk in P en Q. Bereken de lengte $|PQ|$.

Midden $M\left(\frac{-2-10}{2};\frac{7+1}{2}\right)=M(-6,4)$ en $m_{AB}=\frac{1-7}{-10+2}=\frac{3}{4}\overset{\perp}{\Leftrightarrow} m_l=-\frac{4}{3}$. Dus $l \leftrightarrow y=-\frac{4}{3}(x+6)+4$.

Eenvoudiger geschreven is dit: $l \leftrightarrow 4x+3y+12=0$. Deze rechte snijdt de assen in $P(-3,0)$ en $Q(0,-4)$.

Zo vind je dat: $|PQ|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

2. Gegeven zijn de punten $A(-2,2)$, $B(2,4)$, $C(6,1)$ en $D(-2,-3)$.

- Bewijs dat $\square ABCD$ een trapezium is.

$$m_{AB}=\frac{4-2}{2+2}=\frac{1}{2} \text{ en } m_{CD}=\frac{1+3}{6+2}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow m_{AB}=m_{CD} \Leftrightarrow AB\,//\,CD$$

- Bereken de oppervlakte van dit trapezium.

$$AB \leftrightarrow y=\frac{1}{2}(x+2)+2 \;\; (\leftrightarrow x-2y+6=0) \text{ en } |AB|=\sqrt{(2+2)^2+(4-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$|CD|=\sqrt{(-3-1)^2+(-2-6)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5} \text{ en hoogte } h=d(C,AB)=\frac{|6-2.1+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$S_{ABCD}=\frac{\left(4\sqrt{5}+2\sqrt{5}\right).\frac{10}{\sqrt{5}}}{2}=\frac{6\cancel{\sqrt{5}}.\frac{10}{\cancel{\sqrt{5}}}}{2}=30$$

3. Gegeven zijn de cirkels $c_1 \leftrightarrow x^2+y^2+6x-y+3=0$ en $c_2 \leftrightarrow x^2+y^2-6x-10y+9=0$.

- Bepaal het (enige) snijpunt van deze twee cirkels.

$$\begin{cases} x^2+y^2+6x-y+3=0 \\ x^2+y^2-6x-10y+9=0 \end{cases}\left|\begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+6x-y+3=0 \\ 12x+9y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\quad} \\ x=-\frac{3}{4}y+\frac{1}{2} \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$$

$$*:\left(-\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}\right)^2+y^2+6\left(-\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}\right)-y+3=0 \Leftrightarrow \frac{9}{16}y^2-\frac{3}{4}y+\frac{1}{4}+y^2-\frac{9}{2}y+3-y+3=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{16}y^2-\frac{25}{4}y+\frac{25}{4}=0 \Leftrightarrow y=2$$

Er is maar één snijpunt, namelijk $S(-1,2)$.

- Bepaal de middelpunten en de stralen van deze beide cirkels en leid hieruit af dat de beide cirkels elkaar uitwendig raken.

$x^2+y^2+6x-y+3=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$, dus $M_1\left(-3,\frac{1}{2}\right)$ en $r_1=\frac{5}{2}$.

$x^2+y^2-6x-10y+9=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-5)^2=25$, dus $M_2(3,5)$ en $r_2=5$.

Dus $|M_1M_2|=\sqrt{(3-(-3))^2+\left(5-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{36+\frac{81}{4}}=\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{15}{2}=r_1+r_2$, dus de cirkels raken mekaar wel degelijk uitwendig.

4. Gegeven is ΔABC met $A(-8,-5)$, $B(7,3)$ en $C(4,4)$.

Bewijs dat punt $P(3,2)$ op een bissectrice van hoek $\widehat{BAC}$ ligt.

Dan moet $d(P,AB)=d(P,AC)$.

Je kan berekenen dat $AB \leftrightarrow y=\dfrac{3+5}{7+8}(x+8)-5$ of nog $AB \leftrightarrow y=\dfrac{8}{15}x-\dfrac{11}{15}$ ($\Rightarrow AB \leftrightarrow 8x-15y-11=0$)

en dat $AC \leftrightarrow y=\dfrac{4+5}{4+8}(x+8)-5$ of nog $AC \leftrightarrow y=\dfrac{3}{4}x+1$ ($\Rightarrow AC \leftrightarrow 3x-4y+4=0$)

Dus $d(P,AB)=\dfrac{|8.3-15.2-11|}{\sqrt{8^2+15^2}}=\dfrac{17}{17}=1$ en $d(P,AC)=\dfrac{|3.3-4.2+4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{5}{5}=1$ □