Voorbeeldoplossing toets rijen ①: inleiding en rekenkundige rijen (A)

1. Gegeven is de rij: $(u_n) = 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 4, 6, \ldots = \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{8}{2}, \frac{12}{2}, \ldots$

   a. Bedenk een expliciet of recursief voorschrift voor deze rij. Recursief: $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{n}{2} \\ u_1 = 1 \end{cases}$

   b. Wat zijn dan de volgende twee termen in de rij? $u_6 = \frac{17}{2}$ $\quad u_7 = \frac{23}{2}$

2. Gegeven zijn twee rekenkundige rijen waarvan de eerste termen gegeven zijn:
   - $(a_n) = -1, 6, 13, 20, \ldots$
   - $(b_n) = 1000, 996, 992, 988, \ldots$

   Ergens in deze rijen is er een rangnummer $n \in \mathbb{N}$, waarvoor geldt $a_n = b_n$. Op welke plaats is dit?

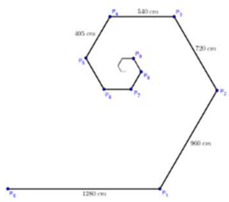
   $$\left.\begin{aligned} a_n &= -1 + (n-1).7 = -8 + 7n \\ b_n &= 1000 + (n-1).(-4) = 1004 - 4n \end{aligned}\right\} a_n = b_n \Leftrightarrow -8 + 7n = 1004 - 4n \Leftrightarrow 11n = 1012 \Leftrightarrow \boxed{n = 92}$$

3. Het geboortejaar van Lemmy Kilmister, frontman van Motörhead, kan geschreven worden als de som $-53{,}2 - 52{,}9 - 52{,}6 - \ldots + 62{,}9 + 63{,}2$. In welk jaar is hij dus geboren?
   - $u_n = -53{,}2 + (n-1).0{,}3 = -53{,}5 + 0{,}3n$
   - $u_n = 63{,}2 \Leftrightarrow -53{,}5 + 0{,}3n = 63{,}2 \Leftrightarrow n = \frac{63{,}2 + 53{,}5}{0{,}3} = 389$
   - $s_n = \frac{389.(-53{,}2 + 63{,}2)}{2} = 1945$
   - Lemmy werd geboren op 25 december 1945 en stierf op 28 december 2015. Hij werd 70. RIP Lemmy.

4. Vul de hokjes rechts in met waar (W) of onwaar (O):

Als je in een meetkundige rij met quotiënt q elke term vermenigvuldigt met 5 dan krijg je een nieuwe meetkundige rij met quotiënt $3q$.	O
Als je in een rekenkundige rij met verschil v elke term vermenigvuldigt met 5 dan krijg je een nieuwe rekenkundige rij met verschil $3v$.	W

5. Een zeshoekige spiraal is opgebouwd als volgt: Een lijnstuk $[P_0P_1]$ van $1280\,cm$, wordt gevolgd door een lijnstuk $[P_1P_2]$ van $960\,cm$, enz. Alle binnenhoeken op de zo gevormde spiraal zijn 120°, en elk volgend lijnstuk meet $3/4$ van het vorige.



   - Hoe lang is het 20e lijnstuk? $|P_{19}P_{20}| = 1280.(3/4)^{19} \approx 5{,}4\ (cm)$
   - Hoe lang zal de spiraal zijn tot en met dit 20e lijnstuk? $L = 1280 \cdot \frac{(3/4)^{20} - 1}{(3/4) - 1} \approx 5103{,}8\ (cm)$
   - Hoe lang wordt de spiraal als we zo oneindig verder gaan? $L_\infty = 1280 \cdot \frac{\cancel{(3/4)^{+\infty}} - 1}{(3/4) - 1} = 5120\,(cm)$

6. x, y, z is een rekenkundige rij met som 3. x, z, y is een meetkundige rij. Bepaal x, y en z ($x \neq y$).

   Stel $x = y - v$ en $z = y + v$ dan vertalen de gegevens zich tot het stelsel:

   $$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ z^2 = x.y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \cancel{-v} + y + y \cancel{+v} = 3 \\ (y+v)^2 = (y-v)\,y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ (1+v)^2 = (1-v).1 \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = 1 \\ v = -3 \end{cases}$$

   $* : (1+v)^2 = (1-v).1 \Leftrightarrow 1 + 2v + v^2 = 1 - v \Leftrightarrow v^2 + 3v = 0 \Leftrightarrow \cancel{v = 0 \vee}\ v = -3$

   De termen zijn dus $x = 4,\ y = 1$ en $z = -2$.

Voorbeeldoplossing toets rijen ①: inleiding en rekenkundige rijen (B)

1. Gegeven is de rij: $(u_n) = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3, 5, \ldots \; = \; \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{6}{2}, \frac{10}{2}, \ldots$

   a. Bedenk een expliciet of recursief voorschrift voor deze rij. Recursief: $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{n}{2} \\ u_1 = 0 \end{cases}$

   b. Wat zijn dan de volgende twee termen in de rij? $u_6 = \frac{15}{2}$ $\quad u_7 = \frac{21}{2}$

2. Gegeven zijn twee rekenkundige rijen waarvan de eerste termen gegeven zijn:
   - $(a_n) = 10, 17, 24, 31, \ldots$
   - $(b_n) = 370, 368, 366, 364, \ldots$

   Ergens in deze rijen is er een rangnummer $n \in \mathbb{N}$, waarvoor geldt $a_n = b_n$. Op welke plaats is dit?

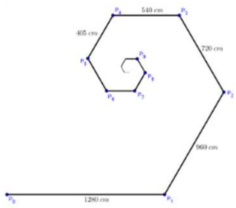
   $$\left.\begin{array}{l} a_n = 10 + (n-1).7 = 3 + 7n \\ b_n = 370 + (n-1).(-2) = 372 - 2n \end{array}\right\} a_n = b_n \Leftrightarrow 3 + 7n = 372 - 2n \Leftrightarrow 9n = 369 \Leftrightarrow \boxed{n = 41}$$

3. Het geboortejaar van Alan Rickman, gevierd acteur, kan geschreven worden als de som $-6,7 - 6,4 - 6,1 - \ldots + 34,4 + 34,7$. In welk jaar is hij dus geboren?
   - $u_n = -6,7 + (n-1).0,3 = -7 + 0,3n$
   - $u_n = 34,7 \Leftrightarrow -7 + 0,3n = 34,7 \Leftrightarrow n = \dfrac{34,7+7}{0,3} = 139$
   - $s_n = \dfrac{139.(-7+34,7)}{2} = 1946$
   - Alan werd geboren op 21 februari 1946 en stierf op 14 januari 2016. Hij werd 69. RIP Alan.

4. Vul de hokjes rechts in met waar (W) of onwaar (O):

Als je in een meetkundige rij met quotiënt q bij elke term 5 optelt dan krijg je een nieuwe meetkundige rij met hetzelfde quotiënt q.	O
Als je in een rekenkundige rij met verschil v bij elke term 5 optelt dan krijg je een nieuwe rekenkundige rij met hetzelfde verschil v.	W

5. Een zeshoekige spiraal is opgebouwd als volgt: Een lijnstuk $[P_0P_1]$ van $960\,cm$, wordt gevolgd door een lijnstuk $[P_1P_2]$ van $720\,cm$, enz. Alle binnenhoeken op de zo gevormde spiraal zijn 120°, en elk volgend lijnstuk meet $3/4$ van het vorige.



   - Hoe lang is het 20e lijnstuk? $|P_{19}P_{20}| = 960.(3/4)^{19} \approx 4,1\ (cm)$
   - Hoe lang zal de spiraal zijn tot en met dit 20e lijnstuk? $L = 960 \cdot \dfrac{(3/4)^{20} - 1}{(3/4) - 1} \approx 3827,8\ (cm)$
   - Hoe lang wordt de spiraal als we zo oneindig verder gaan? $L_\infty = 1280 \cdot \dfrac{\cancel{(3/4)^{+\infty}} - 1}{(3/4) - 1} = 3840\,(cm)$

6. x, y, z is een rekenkundige rij met som 6. y, z, x is een meetkundige rij. Bepaal x, y en z ($x \neq y$).

   Stel $x = y - v$ en $z = y + v$ dan vertalen de gegevens zich tot het stelsel:

   $$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ z^2 = y.x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \cancel{-v} + y + y \cancel{+v} = 6 \\ (y+v)^2 = y(y-v) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ (2+v)^2 = 2.(2-v) \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = 2 \\ v = -6 \end{cases}$$

   $$*: (2+v)^2 = 2.(2-v) \Leftrightarrow 4 + 4v + v^2 = 4 - 2v \Leftrightarrow v^2 + 6v = 0 \Leftrightarrow \cancel{v = 0 \vee}\ v = -6$$

   De termen zijn dus $x = 8,\ y = 2$ en $z = -4$.