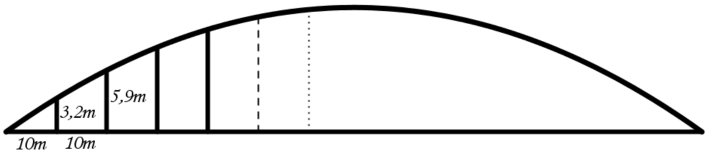
Voorbeeldoplossing toets opstellen van vergelijkingen, snijpunten, extremumvraagstukken

1. Een brug die parabolisch is van vorm wordt ondersteund door betonnen pijlers, die telkens 10m uit elkaar staan. De eerste pijler staat 10m van de start van de brug en is 3,2m hoog. De tweede pijler staat dus 20m van de start van de brug en is 5,9m hoog (zie figuur).



a. Kies zelf een assenstelsel en stel de vergelijking op van de parabool die de brug voorstelt.

Als je als x-as de grond neemt en als y-as de rechte loodrecht op de grond het meest linkse punt, dan geldt:

- $A(0,0) \in f \quad \Leftrightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 0 \quad \Leftrightarrow c = 0$
- $B(10;\ 3,2) \in f \quad \Leftrightarrow a(10)^2 + b(10) + c = 3,2 \quad \Leftrightarrow 100a + 10b + c = 3,2$
- $D(20;\ 5,9) \in f \quad \Leftrightarrow a(20)^2 + b(20) + c = 5,9 \quad \Leftrightarrow 400a + 20b + c = 5,9$

Dit stelsel oplossen met de GRM: $a = -\dfrac{1}{400}$, $b = \dfrac{69}{200}$ en $c = 0 \rightarrow f(x) = -\dfrac{1}{400}x^2 + \dfrac{69}{200}x$.

b. Hoe lang is deze brug (horizontaal gemeten)?

Hier heb je het tweede nulpunt nodig: $-\dfrac{1}{400}x^2 + \dfrac{69}{200}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \;\; of \;\; x = \dfrac{69}{200} : \dfrac{1}{400} = 138$

Antwoord: de brug is 138m lang.

c. Hoe hoog is de brug op haar hoogste punt?

Hiervoor moet je β berekenen: $\beta = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a} = 11,9025$

Antwoord: de maximale hoogte bedraagt ongeveer 11,9 m.

2. Bepaal de mogelijke waarden van de parameter $m \in \mathbb{R}$ zodat de parabolen $p_1 \leftrightarrow y = -x^2 - x + 1$ en $p_2 \leftrightarrow y = x^2 + mx + 3$ elkaar raken. Bepaal in beide gevallen ook het gemeenschappelijke raakpunt.

Opdat de parabolen elkaar raken moet de discriminant van de vergelijking $-x^2 - x + 1 = x^2 + mx + 3$ nul zijn.

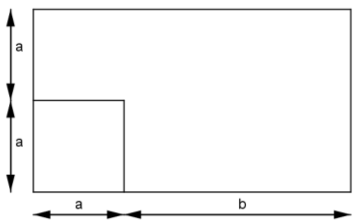
$-x^2 - x + 1 = x^2 + mx + 3 \Leftrightarrow 2x^2 + (m+1)x + 2 = 0$ (*). Discriminant: $\Delta = (m+1)^2 - 4.2.2 = m^2 + 2m - 15$.

De nulpunten hiervan zijn $m = 3$ en $m = -5$.

In geval $m = 3$ wordt (*) $2x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$, en dan is $y = 1 \;\Rightarrow\; R(-1,1)$

In geval $m = -5$ wordt (*) $2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, en dan is $y = -1 \;\Rightarrow\; R(1,-1)$

3. Boer Freddy Keymeulen (de broer van Hans) wil voor zijn paarden een rechthoekig stuk land afzetten. Hij beschikt hiervoor over 180 meter draad. Je ziet op de figuur hiernaast dat hij voor de veulentjes een kleiner vierkant stuk land wil afzetten binnen het rechthoekig stuk met als zijde de halve breedte van de rechthoek.
Wat is de maximale oppervlakte van het land dat hij op die manier kan afzetten?



Uit het gegeven volgt onmiddellijk dat $8a + 2b = 180$.

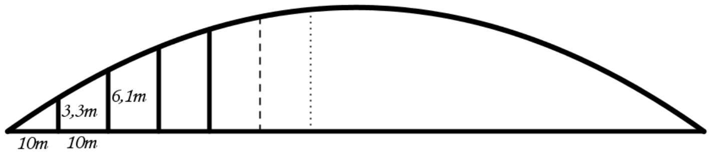
Anders geschreven wordt dit: $b = 90 - 4a$.

De oppervlakte van het land wordt gegeven door $S = l.b = (a+b).2a = (a + 90 - 4a).2a = -6a^2 + 180a$.

Dit is een bergparabool met als top $(15,1350)$. De maximale oppervlakte bedraagt dus 1350 m².

Voorbeeldoplossing toets opstellen van vergelijkingen, snijpunten, extrememvraagstukken

1. Een brug die parabolisch is van vorm wordt ondersteund door betonnen pijlers, die telkens 10m uit elkaar staan. De eerste pijler staat 10m van de start van de brug en is 3,3m hoog. De tweede pijler staat dus 20m van de start van de brug en is 6,1m hoog (zie figuur).



a. Kies zelf een assenstelsel en stel de vergelijking op van de parabool die de brug voorstelt.

Als je als x-as de grond neemt en als y-as de rechte loodrecht op de grond het meest linkse punt, dan geldt:

- $A(0,0)\in f \quad \Leftrightarrow a(0)^2+b(0)+c=0 \quad \Leftrightarrow c=0$
- $B(10;\ 3{,}3)\in f \quad \Leftrightarrow a(10)^2+b(10)+c=3{,}2 \quad \Leftrightarrow 100a+10b+c=3{,}3$
- $D(20;\ 6{,}1)\in f \quad \Leftrightarrow a(20)^2+b(20)+c=6{,}1 \quad \Leftrightarrow 400a+20b+c=6{,}1$

Dit stelsel oplossen met de GRM: $a=-\frac{1}{400}$, $b=\frac{71}{200}$ en $c=0 \rightarrow f(x)=-\frac{1}{400}x^2+\frac{71}{200}x$.

b. Hoe lang is deze brug (horizontaal gemeten)?

Hier heb je het tweede nulpunt nodig: $-\frac{1}{400}x^2+\frac{71}{200}x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \ \text{ of } \ x=\frac{71}{200}:\frac{1}{400}=142$

Antwoord: de brug is 142 lang.

c. Hoe hoog is de brug op haar hoogste punt?

Hiervoor moet je β berekenen: $\beta=\frac{-b^2+4ac}{4a}=12{,}6025$

Antwoord: de maximale hoogte bedraagt ongeveer 12,6 m.

2. Bepaal de mogelijke waarden van de parameter $m\in\mathbb{R}$ zodat de parabolen $p_1 \leftrightarrow y=-x^2+mx-3$ en $p_2 \leftrightarrow y=x^2+x-1$ elkaar raken.

Opdat de parabolen elkaar raken moet de discriminant van de vergelijking $-x^2+mx-3=x^2+x-1$ nul zijn.

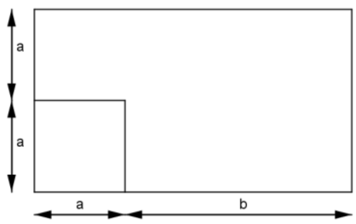
$-x^2+mx-3=x^2+x-1 \Leftrightarrow 2x^2+(-m+1)x+2=0$ (*). Discriminant: $\Delta=(-m+1)^2-4.2.2=m^2-2m-15$.

De nulpunten hiervan zijn $m=-3$ en $m=5$.

In geval $m=-3$ wordt (*) $2x^2+4x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$, en dan is $y=-1 \Rightarrow R(-1,-1)$

In geval $m=5$ wordt (*) $2x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow x=1$, en dan is $y=1 \Rightarrow R(1,1)$

3. Boer Freddy Keymeulen (de broer van Hans) wil voor zijn paarden een rechthoekig stuk land afzetten. Hij beschikt hiervoor over 120 meter draad. Je ziet op de figuur hiernaast dat hij voor de veulentjes een kleiner vierkant stuk land wil afzetten binnen het rechthoekig stuk met als zijde de halve breedte van de rechthoek. Wat is de maximale oppervlakte van het land dat hij op die manier kan afzetten?



Uit het gegeven volgt onmiddellijk dat $8a+2b=120$.

Anders geschreven wordt dit: $b=60-4a$.

De oppervlakte van het land wordt gegeven door $S=l.b=(a+b).2a=(a+60-4a).2a=-6a^2+120a$.

Dit is een bergparabool met als top $(10,600)$. De maximale oppervlakte bedraagt dus 600 m².