Voorbeeldoplossing toets tweedegraadsvergelijkingen (+ toepassingen)

1. Bewijs de formule voor het ontbinden in factoren van ax^2+bx+c als de discriminant positief is.

   Theorie!

2. Bepaal twee getallen die als som 10 en als product 13 hebben.

$$x^2-10x+13=0 \overset{\Delta=48}{\Leftrightarrow} x=\frac{10\pm\sqrt{48}}{2}= \begin{cases} \nearrow 5+2\sqrt{3} \\ \searrow 5-2\sqrt{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ de gezochte getallen zijn } 5+2\sqrt{3} \text{ en } 5-2\sqrt{3}$$

3. De vergelijking $2x^2+ax-21=0$ heeft als oplossingenverzameling $V=\{3;\ b\}$.

   Bepaal de parameters a en b.

   Het product van de wortels is $\frac{-21}{2}$, dus de tweede wortel is $b=\frac{-7}{2}$.

   Als 3 een oplossing is dan moet $2.3^2+a.3-21=0 \Leftrightarrow a=1$.

4. Los de volgende vergelijking op gebruik makend van een passende substitutie: $x^2-x+\frac{12}{x^2-x}=8$.

$$x^2-x+\frac{12}{x^2-x}=8 \overset{\text{stel } t=x^2-x}{\Leftrightarrow} t+\frac{12}{t}=8 \Leftrightarrow t^2-8t+12=0 \overset{\boxed{S=8,\ P=12}}{\Leftrightarrow} t=2 \vee t=6 \qquad \boxed{B.V.: x\notin\{0,1\}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-x=2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \overset{\boxed{S=1,\ P=-2}}{\Leftrightarrow} x=2 \vee x=-1 \\ x^2-x=6 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \overset{\boxed{S=1,\ P=-6}}{\Leftrightarrow} x=3 \vee x=-2 \end{array}\right\} \quad V=\{-2,-1,2,3\}$$

5. Ontbind in zoveel mogelijk factoren:

$$8x^4+2x^3-3x^2=x^2\left(8x^2+2x-3\right)\overset{\Psi}{=}x^2.8.(x+3/4)(x-1/2)=x^2(4x+3)(2x-1)$$

$$\Psi: 8x^2+2x-3=0 \overset{\Delta=100}{\Leftrightarrow} x=\frac{-2\pm10}{16}= \begin{cases} \nearrow -3/4 \\ \searrow 1/2 \end{cases}$$

6. Los op met behulp van een passende substitutie: $(x-1)^2+6.|x-1|=7$

$$\overset{t=|x-1|}{\Leftrightarrow} t^2+6t=7 \Leftrightarrow t^2+6t-7=0 \Leftrightarrow t=1 \vee t=-7 \Leftrightarrow |x-1|=1 \ \cancel{\vee |x-1|=-7} \Leftrightarrow x-1=1 \vee x-1=-1 \quad V=\{2,0\}$$

Voorbeeldoplossing toets tweedegraadsvergelijkingen (+ toepassingen)

1. Bewijs dat ax^2+bx+c niet te ontbinden is in eerstegraadsfactoren als de discriminant negatief is.

   Theorie!

2. Bepaal twee getallen die als som 12 en als product 18 hebben.

$$x^2-12x+18=0 \overset{\Delta=72}{\Leftrightarrow} x=\frac{12\pm\sqrt{72}}{2}= \begin{cases} \nearrow 6+3\sqrt{2} \\ \searrow 6-3\sqrt{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ de gezochte getallen zijn $6+3\sqrt{2}$ en $6-3\sqrt{2}$

3. De vergelijking $3x^2+ax-16=0$ heeft als oplossingenverzameling $V=\{2\,;\ b\}$.

   Bepaal de parameters a en b.

   Het product van de wortels is $\frac{-16}{3}$, dus de tweede wortel is $b=\frac{-8}{3}$.

   Als 3 een oplossing is dan moet $3.2^2+a.2-16=0 \Leftrightarrow a=2$.

4. Los de volgende vergelijking op gebruik makend van een passende substitutie: $x^2-x+\frac{24}{x^2-x}=14$.

$$x^2-x+\frac{24}{x^2-x}=14 \overset{stel\ t=x^2-x}{\Leftrightarrow} t+\frac{24}{t}=14 \Leftrightarrow t^2-14t+24=0 \overset{\boxed{S=14,\ P=24}}{\Leftrightarrow} t=12 \vee t=2$$

$\boxed{B.V.: x\notin\{0,1\}}$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-x=2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \overset{\boxed{S=1,\ P=-2}}{\Leftrightarrow} x=2 \vee x=-1 \\ x^2-x=12 \Leftrightarrow x^2-x-12=0 \overset{\boxed{S=1,\ P=-6}}{\Leftrightarrow} x=4 \vee x=-3 \end{array}\right\} V=\{-3,-1,2,4\}$$

5. Ontbind in zoveel mogelijk factoren: $6x^4-x^3-2x^2$

$$6x^4-x^3-2x^2=x^2\left(6x^2-x-2\right)\overset{\Psi}{=}x^2.6.(x+1/2)(x-2/3)=x^2(2x+1)(3x-2)$$

$$\Psi: 6x^2-x-2=0 \overset{\Delta=49}{\Leftrightarrow} x=\frac{1\pm 7}{12}= \begin{cases} \nearrow -1/2 \\ \searrow 2/3 \end{cases}$$

6. Los op met behulp van een passende substitutie: $(x-2)^2+5.|x-2|=6$

$$\overset{t=|x-2|}{\Leftrightarrow} t^2+5t=6 \Leftrightarrow t^2+5t-6=0 \Leftrightarrow t=1 \vee t=-6 \Leftrightarrow |x-2|=1 \ \cancel{\vee\ |x-2|=-6} \Leftrightarrow x-2=1 \vee x-2=-1 \quad V=\{3,1\}$$