<u>Voorbeeldoplossing toets: Analytische meetkunde van de cirkel</u>

1. Toon aan dat de kromme met vergelijking $k \leftrightarrow (x+1)(x-2)+(y+3)^2=0$ een cirkel is door het middelpunt en de straal te bepalen.

   De vergelijking uitwerken geeft: $k \leftrightarrow x^2-x-2+(y+3)^2=0$ of nog $k \leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+3)^2=\frac{9}{4}$.

   Het is dus wel degelijk een cirkel, met middelpunt $M\left(\frac{1}{2},-3\right)$ en straal $r=\frac{3}{2}$.

2. Stel de vergelijking op van de omgeschreven cirkel van de driehoek $\Delta ABC$ als $A(-1,4)$, $B(2,1)$ en $C(-2,-3)$.

   Stel de vergelijking van de cirkel $c \leftrightarrow x^2+y^2+2ax+2by+c=0$, dan geldt:

   $$\begin{cases} A\in c \Leftrightarrow -2a+8b+c=-17 \\ B\in c \Leftrightarrow 4a+2b+c=-5 \\ C\in c \Leftrightarrow -4a-6b+c=-13 \end{cases} \overset{rref}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a=3/2 \\ b=-1/2 \\ c=-10 \end{cases}$$

   De vergelijking wordt dus: $c \leftrightarrow x^2+y^2+3x-y-10=0$.

   - Ga na dat ook het punt $P(-4,3)$ op deze omgeschreven cirkel ligt.

     $P(-4,3)\in c \Leftrightarrow (-4)^2+3^2+3(-4)-3-10=0 \Leftrightarrow 0=0$ $\boxed{OK}$

3. Gegeven zijn de cirkels $c_1 \leftrightarrow x^2+y^2+6x-y+3=0$ en $c_2 \leftrightarrow x^2+y^2-6x-10y+9=0$.

   - Bepaal het (enige) snijpunt van deze twee cirkels.

     $$\begin{cases} x^2+y^2+6x-y+3=0 \\ x^2+y^2-6x-10y+9=0 \end{cases}\left|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+6x-y+3=0 \\ 12x+9y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\phantom{xxxxx}} \\ x=-\frac{3}{4}y+\frac{1}{2} \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$$

     $$*:\left(-\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}\right)^2+y^2+6\left(-\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}\right)-y+3=0 \Leftrightarrow \frac{9}{16}y^2-\frac{3}{4}y+\frac{1}{4}+y^2-\frac{9}{2}y+3-y+3=0$$

     $$\Leftrightarrow \frac{25}{16}y^2-\frac{25}{4}y+\frac{25}{4}=0 \Leftrightarrow y=2$$

     Er is maar één snijpunt, namelijk $S(-1,2)$.

   - Bepaal de middelpunten en de stralen van deze beide cirkels en leid hieruit af dat de beide cirkels elkaar ***uitwendig*** raken.

     $x^2+y^2+6x-y+3=0$, dus $M_1\left(-3,\frac{1}{2}\right)$ en $r_1=\sqrt{9+\frac{1}{4}-3}=\frac{5}{2}$.

     $x^2+y^2-6x-10y+9=0$, dus $M_2(3,5)$ en $r_2=\sqrt{9+25-9}=5$.

     Dus $|M_1M_2|=\sqrt{(3-(-3))^2+\left(5-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{36+\frac{81}{4}}=\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{15}{2}=r_1+r_2$, dus de cirkels raken mekaar wel degelijk uitwendig.