Vierkantsvergelijkingen en toepassingen

Legende:	★: simpel	★★: eenvoudig	★★★: denkvraag	★★★★: moeilijk	★★★★★: uitdaging

1) 1987, 2e ronde, vraag 23 (★★★★)

Onderstel dat p een priemgetal is en dat beide nulpunten van de vergelijking $x^2 + px - 444p = 0$ gehele getallen zijn. Wat weet je dan van p ?

(A) $1 < p \leq 11$ **(B)** $11 < p \leq 21$ **(C)** $21 \leq f(x) < 31$
(D) $31 < p \leq 41$ **(E)** $41 < f(x) < 51$

2) 1996, 2e ronde, vraag 12 (★★)

Hoeveel oplossingen in $\mathbb{R}$ heeft de vergelijking $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

3) 1996, 2e ronde, vraag 18 (★)

Twee getallen hebben dezelfde som als de wortels van $x^2 + 6x + 1 = 0$ en hetzelfde product als de wortels van $x^2 + 8x + 7 = 0$. Wat is het grootste van die twee getallen?

(A) $-3 + \sqrt{2}$ **(B)** -1 **(C)** $-4 + \sqrt{15}$ **(D)** $3 + \sqrt{2}$ **(E)** 7

4) 1997, 2e ronde, vraag 10 (★★)

Onderstel dat de vergelijking $x^2 + ax + b = 0$ twee gehele oplossingen heeft. Beschouw de volgende uitspraken.

I. beide oplossingen zijn oneven $\Leftrightarrow$ a en b zijn oneven
II. beide oplossingen zijn oneven $\Leftrightarrow$ a is even en b is oneven
III. beide oplossingen zijn oneven $\Leftrightarrow$ a is oneven en b is even
IV. één oplossing is even en de andere oneven $\Leftrightarrow$ a is oneven en b is even
V. één oplossing is even en de andere oneven $\Leftrightarrow$ a is even en b is oneven
VI. één oplossing is even en de andere oneven $\Leftrightarrow$ a en b zijn oneven

Welke uitspraken zijn juist?

(A) I en IV **(B)** II en IV **(C)** I en V **(D)** III en V **(E)** II en VI

5) 1999, 2e ronde, vraag 9 (★★★)

De vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft twee wortels x_1 en x_2. Zij $\alpha x^2 + \beta x + 1 = 0$ de vergelijking met wortels $\frac{x_1}{x_2}$ en $\frac{x_2}{x_1}$, dan is β gelijk aan

(A) $2 - \frac{b^2}{ac}$ **(B)** $\frac{b^2}{ac} - 2$ **(C)** $2 - \frac{ab^2}{c}$ **(D)** $2 - \frac{b^2}{c}$ **(E)** $\frac{b^2}{c} - 2$

6) 2000, 1e ronde, vraag 10 (★★*)

Het aantal oplossingen $x \in \mathbb{R}$ van de vergelijking $\left|1-x^2\right| = 1-x$ is gelijk aan

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

7) 2003, 1e ronde, vraag 1 (★★)

Het getal 1 is een wortel van de vierkantsvergelijking $x^2 + kx + 3 = 0$. Wat is de andere wortel?

(A) -4 **(B)** -3 **(C)** -1 **(D)** 2 **(E)** 3

8) 2004, 2e ronde, vraag 11 en 2006, 2e ronde, vraag 3 (★★)

Veronderstel dat $ax^2 + 2bx + c = 0$ (met $a, b, c \in \mathbb{R}_0$) twee gelijke wortels heeft. Welke van de volgende uitspraken is dan steeds correct?

(A) a, b, c zijn onderling verschillend;

(B) a, b, c zijn strikt negatieve getallen;

(C) $a > 0, b < 0, c > 0$;

(D) a, b, c zijn opeenvolgende termen van een rekenkundige rij (dus $2b = a + c$);

(E) a, b, c zijn opeenvolgende termen van een meetkundige rij (dus $b^2 = ac$).

9) 2006, 1e ronde, vraag 21 (★★★)

Wat is het product van alle reële oplossingen van de vergelijking $|x-1|^2 - 2|x-1| - 8 = 0$?

(A) -15 **(B)** -8 **(C)** -3 **(D)** 5 **(E)** 2

10) 2006, 2e ronde, vraag 8 (★★★)

Hoeveel gehele waarden voor k bestaan er zodat de vergelijking $\left|x^2 - 2\right| = k$ meer dan twee oplossingen heeft in $\mathbb{R}$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** oneindig veel

11) 2007, 1e ronde, vraag 6 (★★★)

De som van alle oplossingen van $x^2 + |x| - 6 = 0$ is gelijk aan

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** -1 **(D)** -6 **(E)** 0

12) 2007, 2e ronde, vraag 23 (★★★)

Gegeven de vierkantsvergelijking $x^2 + bx - 1 = 0$. Noem σ de som van de omgekeerden van de wortels van deze vierkantsvergelijking. Noem π het product van de omgekeerden van de wortels van deze vierkantsvergelijking. Dan is $\sigma + \pi$ gelijk aan

(A) $b+1$ **(B)** $b-1$ **(C)** $-b$ **(D)** $-\dfrac{1+b}{b}$ **(E)** $-\dfrac{b}{1+b}$

13) 2008, 2e ronde, vraag 19 (★★★)

Hoeveel reële getallen m bestaan er zodat de vergelijkingen $x^2 + mx + 1 = 0$ en $x^2 + mx + 1 = 0$ minstens één gemeenschappelijke reële oplossing hebben?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4 **(E)** oneindig veel

14) 2009, 1e ronde, vraag 20 (★)

De vergelijking $a^2x^2 + ax + 2 = 0$ heeft voor elk reëel getal a
(A) 0 reële oplossingen;
(B) 1 reële oplossing;
(C) 2 reële oplossingen;
(D) oneindig veel reële oplossingen;
(E) een aantal reële oplossingen dat afhangt van de waarde van a.

15) 2009, 2e ronde, vraag 7 (★★*)

Het verschil van de twee oplossingen van de vierkantsvergelijking $x^2 + ax + b = 0$ is gelijk aan 5. De discriminant van deze vergelijking is dan

(A) 5 **(B)** $6,25$ **(C)** 10 **(D)** 25 **(E)** Niet te bepalen

16) 2010, 1e ronde, vraag 12 (★★★)

Stel $ac < 0$. Als je de grootste oplossing van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ deelt door de kleinste oplossing van de vergelijking $cx^2 + bx + a = 0$, dan verkrijg je

(A) $\frac{c}{a}$ **(B)** $\frac{a}{c}$ **(C)** 1 **(D)** $\frac{c}{b}$ **(E)** $\frac{a}{b}$

17) 2011, 1e ronde, vraag 18 (★★)

De vergelijking $x^2 + px + q = 0$ (met $p, q \in \mathbb{Q}$) heeft een wortel $x = 2 + \sqrt{3}$. De som $p + q$ is dan gelijk aan

(A) -1 **(B)** 2 **(C)** -3 **(D)** 4 **(E)** -5