Voorbeeldoplossing van het voorbeeldexamen wiskunde in december

1.

- Dan schuift de parabool naar links.
- $f(\alpha)=\beta$, dit is uiteraard de top van de parabool.
- $x=0 \Rightarrow y=a.(0-\alpha)^2+\beta=a.\alpha^2+\beta$, dus het snijpunt is $S_y\left(0,\ a\alpha^2+\beta\right)$.
- a en β moeten een verschillend teken hebben.
- $a>0$ en $\alpha=0$.

2. $\Delta=1-4.\left(a^2-a\right).\left[-\left(a^2+a\right)\right]=1+4a^4-4a^2=4a^4-4a^2+1=\left(2a^2-1\right)^2$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-1-\left(2a^2-1\right)}{2\left(a^2-a\right)}=\frac{-\cancel{2}a^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\cancel{a}(a-1)}=\frac{-a}{a-1}$$

$$\vee\ x=\frac{-1+\left(2a^2-1\right)}{2\left(a^2-a\right)}=\frac{2a^2-2}{2a(a-1)}=\frac{\cancel{2}\cancel{(a-1)}(a+1)}{\cancel{2}a\cancel{(a-1)}}=\frac{a+1}{a}$$

$$V=\left\{\frac{-a}{a-1},\frac{a+1}{a}\right\}$$

3. $\Delta=(3a+1)^2-4.2.\left(a^2-1\right)=9a^2+6a+1-8a^2+8=a^2+6a+9=(a+3)^2$

$$x_1=\frac{-(3a+1)-(a+3)}{4}=-a-1\ \ en\ \ x_2=\frac{-(3a+1)+(a+3)}{4}=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}$$

Dus $2x^2+(3a+1)x+a^2-1=2(x+a+1)\left(x+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\right)=(x+a+1)(2x+a-1)$

4. De top is gegeven, dus we gebruiken de vorm: $f(x)=a.(x-5)^2+0=a(x-5)^2$

Het punt $P\in f \Leftrightarrow a.(0-5)^2=5 \Leftrightarrow a=\frac{1}{5}$

Dus is het functievoorschrift: $f(x)=\frac{1}{5}(x-5)^2$

5. De oppervlakte van het terras bedraagt: $(14+2x)(8+x)-14.8=2x^2+30x$.

De oppervlakte die de bouwheer zich kan veroorloven is $\frac{€\ 7500}{€\ 50/m^2}=150\ m^2$.

$$2x^2+30x=150 \Leftrightarrow x^2+15x-75=0 \Leftrightarrow x=\frac{-15+\sqrt{525}}{2}\approx 3{,}96\ \vee\ \cancel{x=\frac{-15-\sqrt{525}}{2}}\approx -18{,}96\ .$$

Antw.: De maximale breedte voor het terras bedraagt 3,96 m.

6.

a) De parabolen gaan allemaal door $(0,-6)$, dit omdat de constante term altijd -6 is.

b) Dan geldt: $8=-2.5^2+4m.5-6 \ \Leftrightarrow\ m=\frac{16}{5}$

c) $P=\frac{c}{a}=3$ (onafhankelijk van m).

d) Je weet al (wegens c) dat $x_1.x_2 = 3$, dus $-2.x_2 = 3 \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{-3}{2}$.

e) Dan moet $a < 0$ en $\beta < 0$, dus $\dfrac{-(4m)^2 + 4.(-2).(-6)}{4.(-2)} < 0 \Leftrightarrow m^2 < 3 \Leftrightarrow m \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$

f) Dit is onmogelijk want alle parabolen zijn bergparabolen.

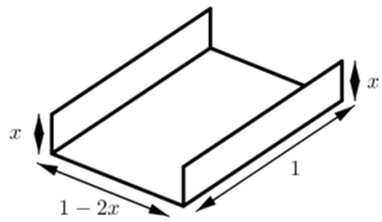
g) Dan moet dus gelden dat: $\alpha = \beta \Leftrightarrow m = 2m^2 - 6 \Leftrightarrow 2m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \vee m = \dfrac{-3}{2}$

7. Het budget wordt gegeven door $1500 = 2x.100 + 2y.75 \Leftrightarrow y = 10 - \dfrac{4}{3}x$.

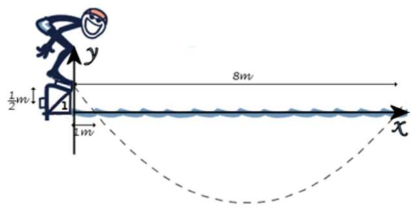
- De oppervlakte van het kadertje is dan $S_{\square} = xy = 10x - \dfrac{4}{3}x^2$
- We bepalen de top van de parabool $S_{\square}$: $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 3,75$ en $\beta = 10.3,75 - \dfrac{4}{3}.3,75^2 = 18,75$.

  De maximale oppervlakte is dus 18,75 cm², bij afmetingen 3,75 cm op 5 cm.

8. $I = l.b.h = (1-2x).x.1 = x - 2x^2$. $\alpha = -1/-4 = 1/4$.
Bij een hoogte van $1/4\,m$ (en dus een breedte van $1/2\,m$) is de inhoud maximaal (namelijk $1/8\,m^3$).



9. Hier hebben we de twee wortels gegeven dus werken we met voorschift $f(x) = a(x-1)(x-8)$.



- Verder is $\left(0, \dfrac{1}{2}\right) \in f \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = a.(0-1)(0-8) \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{16}$, dus is

  $f(x) = \dfrac{1}{16}(x-1)(x-8)$.
- Uit de symmetrie van de grafiek volgt dat $\alpha = \dfrac{9}{2}$ (het gemiddelde van de nulpunten).

  Dus is $\beta = f(\alpha) = \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{9}{2} - 1\right)\left(\dfrac{9}{2} - 8\right) = \dfrac{-49}{64}$.

  Antwoord: het diepste punt is -49/64 m onder water.

10. Snijpunten: $2x^2 - 2x - 6 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{7}$

$x = 1 + \sqrt{7} \Rightarrow y = \left(1+\sqrt{7}\right)^2 = 8 + 2\sqrt{7}$ en $x = 1 - \sqrt{7} \Rightarrow y = \left(1-\sqrt{7}\right)^2 = 8 - 2\sqrt{7}$

De snijpunten zijn dus $S_1\left(1+\sqrt{7}, 8+2\sqrt{7}\right)$ en $S_2\left(1-\sqrt{7}, 8-2\sqrt{7}\right)$.

11. Deze ongelijkheid is om te vormen tot het stelsel ongelijkheden:

$$\begin{cases} 3x \le (x+1)(3x-4) \\ (x+1)(3x-4) \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 + 4x + 4 \le 0 \\ 3x^2 - x - 10 \le 0 \end{cases}$$

De nulpunten van $-3x^2 + 4x + 4$ zijn 2 en $\dfrac{-2}{3}$. De nulpunten van $3x^2 - x - 10$ zijn 2 en $\dfrac{-5}{3}$.

x	$-\infty$	$\frac{-5}{3}$		$\frac{-2}{3}$		2	$+\infty$
$-3x^2+4x+4$	-	-	-	0	+	0	-
$3x^2-x-10$	+	0	-	-	-	0	+

$$V=\left[\frac{-5}{3},\frac{-2}{3}\right]\cup\{2\}$$

12.

1. $\sin\alpha=-0{,}9 \Leftrightarrow \alpha=-64°09'29"+k.360° \vee \underbrace{\boxed{\alpha=-115°50'31"}}_{\textit{zo aangeduid op de cirkel}}+k.360°$

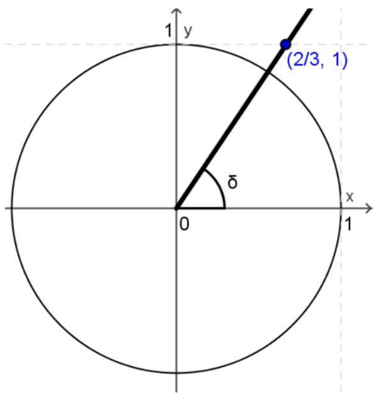
2. $y_B=\sin\beta$, en we weten $\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-0{,}64=0{,}36$, dus $\underbrace{\boxed{\sin\beta=0{,}6}}_{\textit{want } \beta\in I} \vee \sin\beta=-0{,}6$

3. We weten $\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-1=\frac{1}{0{,}49}-1=\frac{51}{49}$, dus $\tan\theta=\sqrt{\frac{51}{49}}\cong 1{,}02020 \vee \underbrace{\boxed{\tan\theta\cong -1{,}02020}}_{\textit{want } \theta\in II}$

4. $m_{LL'}=\tan\lambda$.

$$\tan^2\lambda=\frac{1}{\cos^2\lambda}-1=\frac{1}{0{,}81}-1=\frac{19}{81}\Leftrightarrow \tan\lambda=\overbrace{\boxed{+}}^{\lambda\in III}\cancel{-}\sqrt{\frac{19}{81}}\cong 0{,}48432$$

5. De meetkundige betekenis van de cotangens levert de oplossing (zie figuur).



13. We berekenen achtereenvolgens:

- $\tan\gamma=\frac{1}{\cot\gamma}=\frac{1}{2}$
- $\sec^2\gamma=1+\tan^2\gamma=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4} \Leftrightarrow \cancel{\sec\gamma=\frac{\sqrt{5}}{2}} \vee \sec\gamma=-\frac{\sqrt{5}}{2}$ (want $\gamma\in III$)
- $\cos\gamma=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- $\sin\gamma=\tan\gamma.\cos\gamma=\frac{1}{2}.\frac{-2\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$
- $\csc\gamma=\frac{1}{\sin\gamma}=-\sqrt{5}$

14. Rechtstreeks toepassen van de geziene formules geeft:

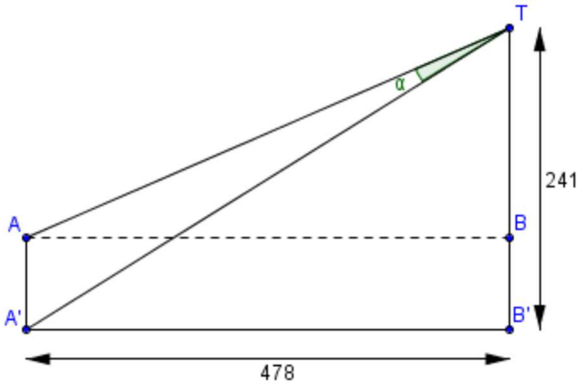
$$\begin{aligned}
LL &=\sin\alpha.\sin\alpha.(-\sin a).(-\sin a)-\cos\alpha.(-\cos\alpha).(-\cos\alpha).\cos\alpha\\
&=\sin^4\alpha-\cos^4\alpha\\
&=\underbrace{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)}_{=1}\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)\quad \textit{(merkwaardig product)}\\
&=1-\cos^2\alpha-\cos^2\alpha=RL \quad \square
\end{aligned}$$

15. $\sin(9\alpha) = \sin(\alpha)$

$$\Leftrightarrow 9\alpha = \alpha + k.360° \quad \vee \quad 9\alpha = 180° - \alpha + k.360°$$
$$\Leftrightarrow 8\alpha = k.360° \quad \vee \quad 10\alpha = 180° + k.360°$$
$$\Leftrightarrow \alpha = k.45° \quad \vee \quad \alpha = 18° + k.36°$$

Vermits α een hoek in een driehoek geldt $\alpha \in \{45°, 90°, 135°, 18°, 54°, 126°, 162°\}$

16. Beide tekeningen laten zich vertalen tot de hiernaast staande figuur:



In $\Delta TA'B'$:

$$|TA'| = \sqrt{|A'B'|^2 + |B'T|^2} \approx 535,318$$

$$\tan \widehat{TA'B'} = \frac{241}{478} \Leftrightarrow \widehat{TA'B'} \approx 26°45'23"$$

In $\Delta TAA'$:

$$\widehat{AA'T} = 90° - \widehat{TA'B'} \approx 63°14'37"$$

$$\widehat{A'AT} = 180° - \widehat{AA'T} - \alpha \approx 108°33'23"$$

Sinusregel: $\dfrac{|AA'|}{\sin\alpha} = \dfrac{|TA'|}{\sin \widehat{A'AT}}$

$$\Leftrightarrow |AA'| \approx \frac{535,318.\sin(8°12')}{\sin(108°33'23")} \approx 80,54$$

Antw.: Het gebouw is ongeveer 80,54m hoog.