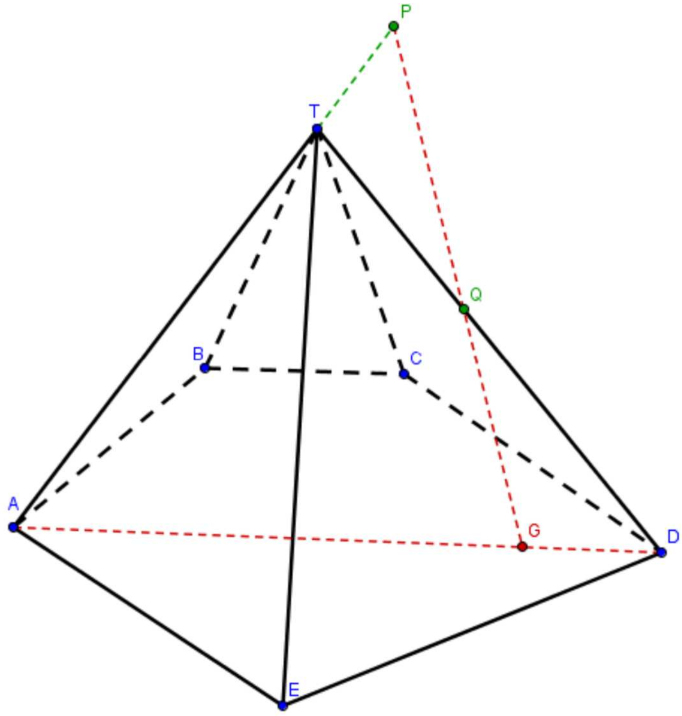
Voorbeeldoplossing voorbeeldexamen juni

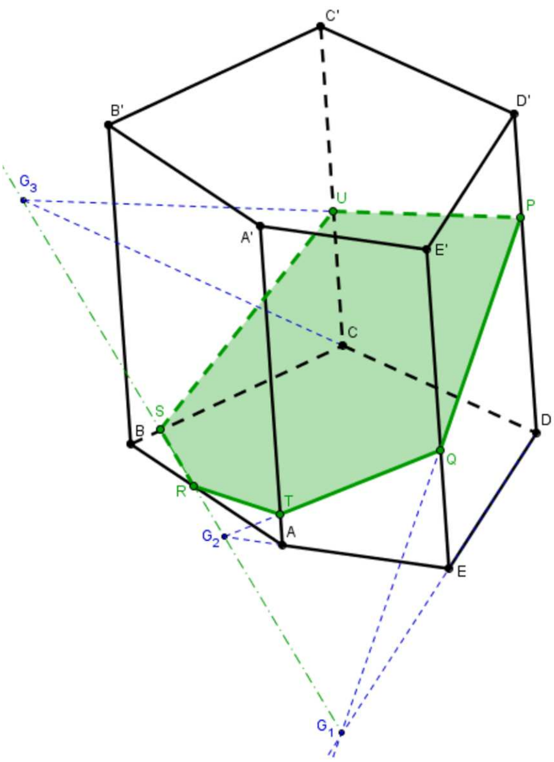
1. Gegeven is een piramide $\begin{pmatrix} T \\ ABCDE \end{pmatrix}$. Het punt P ligt op het verlengde van ribbe $[AT]$, en Q ligt op de ribbe $[TD]$. Construeer het snijpunt van de rechte PQ met het grondvlak. In welk hulpvlak heb je gewerkt?

We werken best in het hulpvlak ATD, hier liggen beide punten P en Q in. Dit vlak snijdt het grondvlak in AD. De rechte PQ zal het grondvlak dus snijden in het snijpunt G met de rechte AD.



2. Construeer de doorsnede van het prisma met het vlak bepaald door de punten P, Q en R (al deze punten liggen op ribben).

- $[PQ]$ mag je tekenen.
- PQ snijdt DE in het grondvlak. Dit punt G_1 mag je dus verbinden met R. Dit verlengen geeft een nieuw stuk $[RS]$ van de doorsnede.
- Werk nu even in het hulpvlak $AEE'A'$:
  AE snijdt RS in G_2, dit punt mag je dus verbinden met Q, om een nieuw stuk doorsnede $[TQ]$ te vinden.
- $[RT]$ mag je tekenen.
- Werk nu even in het hulpvlak $CDD'C'$:
  CD snijdt RS in G_3, dit punt mag je dus verbinden met P, om een nieuw stuk doorsnede $[UP]$ te vinden.
- $[SU]$ maakt de doorsnede compleet.



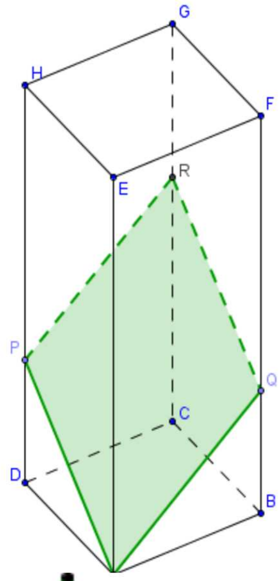
3. Beschouw de balk $\begin{pmatrix} EFGH \\ ABCD \end{pmatrix}$ met als grondvlak het vierkant $ABCD$.

Verder weet je dat het grondvlak een zijde heeft van 4 cm, en dat er twee punten P en Q liggen op 3 cm van respectievelijk D en B.

a. Bepaal de grootte van de hoek $\widehat{PAQ}$.

$|PA| = 5,\ |AQ| = 5,\ |PQ| = |DB| = 4\sqrt{2}$ (Pythagoras).

$$\cos\widehat{PAQ}=\frac{|PA|^2+|AQ|^2-|PQ|^2}{2.|PA|.|AQ|}=\frac{18}{50}\Rightarrow 68°53'59"$$



b. Bepaal op de figuur hiernaast de doorsnede van de balk en het vlak $vl(APQ)$

c. Welk soort figuur is die doorsnede (wees hier zo volledig mogelijk).

Een ruit want alle zijden zijn gelijk (5 cm).

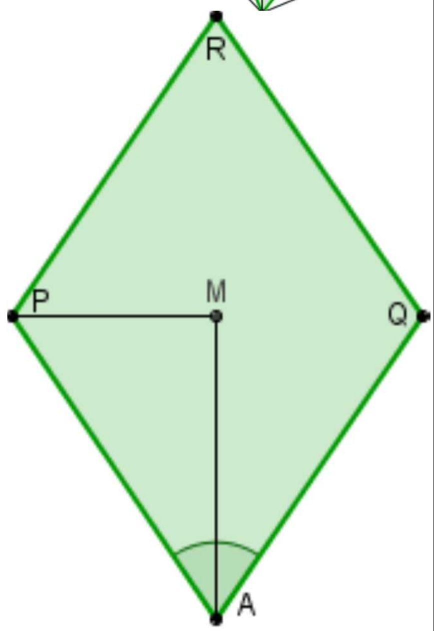
d. Teken die doorsnede op ware grootte.

Je kent de hoek $\widehat{PAQ}$ en de lengtes van de zijden, dus erg moeilijk is dit niet!

e. Bereken de oppervlakte ervan.

De diagonalen zijn $|AR|=2.\sqrt{|AP|^2-\left(\frac{|PQ|}{2}\right)^2}=2.\sqrt{17}$ en natuurlijk ook $|PQ|=4\sqrt{2}$. Dus de oppervlakte is :

$$S_{ruit}=\frac{Dd}{2}=\frac{2\sqrt{17}.4\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{34}$$ (cm²).



4. Een klas bestaat uit 25 leerlingen. Bereken de kans dat geen van deze leerlingen op dezelfde dag verjaren. Wat is dus de kans dat er minstens twee leerlingen wel op dezelfde dag verjaren?

De eerste persoon verjaart op een willekeurige datum: $\frac{365}{365}$

De tweede persoon moet op een andere dag verjaren: $\frac{364}{365}$

De derde persoon moet nog op een andere dag verjaren: $\frac{363}{365}$

…

De laatste persoon moet op een andere dag verjaren: $\frac{341}{365}$

De kans dat iedereen op een andere dag verjaart is dus: $\frac{365.364.363.362.\ldots.341}{365.365.365.365.\ldots.365}\approx 43,13\%$

De kans dat minstens twee personen op dezelfde dag verjaren is dan $56,87\%$

5. Het spel Yahtzee bestaat erin bepaalde worpen te gooien met 5 dobbelstenen. Bereken de kans om in één worp het volgende te gooien: (merk op dat er in totaal $6^5 = 7776$ mogelijke worpen zijn.)

a. Yahtzee (5 dezelfde stenen, bvb.: 11111 of 55555).

Dit kan op 6 mogelijke manieren (6 enen, 6 tweeën, …). De kans is dus $\frac{6}{7776} = \frac{1}{1296} \approx 0,077\%$.

b. Grote straat (5 opeenvolgende stenen, bvb.: 43251 of 63425).

Er zijn (in volgorde) twee straten mogelijk, namelijk: 12345 en 23456. Maar hiervan kunnen we de volgorde telkens op $5! = 120$ mogelijke manieren veranderen. De kans is dus $\frac{240}{7776} \approx 3,09\%$

c. Full House (3 dezelfde + 2 dezelfde stenen, bvb.: 13133 of 26622).

Noem O de steen die 2x voorkomt, en I de steen die 3x voorkomt. Deze kunnen we kiezen op $6.5 = 30$ verschillende manieren.

Verder zijn er 10 manieren om de stenen van volgorde te veranderen:

OOIII OIOII OIIOI OIIIO IOOII IOIOI IOIIO IIOOI IIOIO IIIOO

(Of je kan inzien dat je $\frac{5.4}{2} = 10$ mogelijkheden hebt om de O-stenen te plaatsen, 5x4 omdat je eerst 5 keuzes hebt, dan 4, en gedeeld door 2 omdat je de twee O-stenen onderling mag wisselen).

De kans is dus $\frac{300}{7776} \approx 3,86\%$.

6. Een pistool heeft een draaibaar magazijn waarin plaats is voor zes kogels. Bij het "spel" *Russische roulette* wordt slechts één van de zes plaatsen met een kogel geladen. De persoon die aan de beurt is geeft het magazijn een flinke draai, zet de loop tegen zijn slaap en haalt de trekker over.

"Per keer dat je aan de beurt bent heb je 1 kans op 6 om te sterven. Als je 6 keer aan de beurt komt ben je zeker dood, want $6.\frac{1}{6} = \frac{6}{6}$.*"*

Deze redenering is uiteraard fout, de juiste kans is hieronder berekend.

Bereken de kans die je hebt om dit spel te overleven, als je 6 maal aan de beurt komt.

Per schot heb je $5/6$ kans om te overleven. Voor 6 schoten op rij wordt dit:

$\left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{15625}{46656} \approx 33,49\%$.

7. Bepaal het quotiënt en de rest bij deling van:

- $3x^5+4x^4-2x^3-x^2+2$ door $3x^3+x^2+1$
- $-2x^4-4x^3-3x^2+9$ door $(x+3)(x-1)$

Gebruik hiervoor bij elke deling een verschillende methode.

$3x^5$	$+4x^4$	$-2x^3$	$-x^2$	$+0x$	$+2$
$3x^5$	$+x^4$		$+x^2$		
	$3x^4$	$-2x^3$	$-2x^2$	$+0x$	$+2$
	$3x^4$	$+x^3$		$+x$	
		$-3x^3$	$-2x^2$	$-x$	$+2$
		$-3x^3$	$-x^2$		-1
			$-x^2$	$-x$	$+3$

$3x^3$	$+x^2$	$+1$
x^2	$+x$	-1

$Q(x)=x^2+x-1$
$R(x)=-x^2-x+3$

	-2	-4	-3	0	9
1		-2	-6	-9	-9
	-2	-6	-9	-9	0
-3		6		27	
	-2	0	-9	18	

$$\begin{aligned}-2x^4-4x^3-3x^2+9 &= (x-1)\left(-2x^3-6x^2-9x-9\right)\\ &= (x-1)\left[(x+3)\left(-2x^2-9\right)+18\right]\\ &= \underbrace{(x-1)(x+3)}_{D(x)}\underbrace{\left(-2x^2-9\right)}_{Q(x)}+\underbrace{18(x-1)}_{R(x)}\end{aligned}$$

Dus $Q(x)=-2x^2-9$ en $R(x)=18x-18$

8. Vereenvoudig de breuk $\dfrac{25x^3-50x^2-x+2}{15x^3-32x^2+3x+2}$ (*hint: ontbind teller en noemer in factoren*).

Teller: $25x^3-50x^2-x+2=25x^2(x-2)-(x-2)=\left(25x^2-1\right)(x-2)=(5x+1)(5x-1)(x-2)$

Noemer: $15x^3-32x^2+3x+2\overset{*}{=}(x-2)\left(15x^2-2x-1\right)\overset{\Delta=64}{=}(x-2)15\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right)=(x-2)(3x-1)(5x+1)$

*:				
	15	-32	3	2
2		30	-4	-2
	15	-2	-1	0

Dus: $\dfrac{25x^3-50x^2-x+2}{15x^3-32x^2+3x+2}=\dfrac{(5x+1)(5x-1)(x-2)}{(x-2)(3x-1)(5x+1)}=\dfrac{5x-1}{3x-1}$

9. Stel (zonder GRM) het tekenverloop op van de functie $f:x\to 8x^4-32x^3-x+4$.

Tracht – om het jezelf wat makkelijker te maken – eerst de functie te schrijven als een product van eerste- en tweedegraadsfactoren.

$f(x)=8x^4-32x^3-x+4=8x^3(x-4)-(x-4)=(x-4)\left(8x^3-1\right)=(x-4)(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)$

De eerste twee factoren hebben (enkelvoudige) nulpunten 4 en 1/2. De laatste factor heeft geen nulpunten.

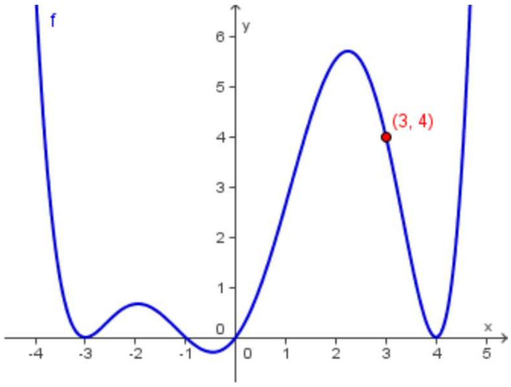
x	$-\infty$		$1/2$		4		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

10. Bij deling van $6x^4-ax^3+bx^2-8x+13$ door $2x^2-4x+5$ is de rest $5x+3$. Bepaal a en b.

$$\begin{aligned}6x^4-ax^3+bx^2-8x+13 &= \left(2x^2-4x+5\right)\left(cx^2+dx+e\right)+\left(5x+3\right)\\ &= 2cx^4+\left(-4c+2d\right)x^3+\left(5c-4d+2e\right)x^2+\left(5d-4e+5\right)x+\left(5e+3\right)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}6=2c\\ -a=-4c+2d\\ b=5c-4d+2e\\ -8=5d-4e+5\\ 13=5e+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=14\\ b=23\\ c=3\\ d=-1\\ e=2\end{cases}$$

11. Stel het functievoorschrift op van de zesdegraadsfunctie waarvan dit de grafiek is:



De nulpunten zijn –3 (2x), -1, 0 en 4 (2x), dus de functie is van de vorm: $f\left(x\right)=a.\left(x+3\right)^2\left(x+1\right)x\left(x-4\right)^2$

De parameter a vind je door het punt $\left(3,4\right)$ in te vullen, dus: $a.\left(3+3\right)^2\left(3+1\right)3\left(3-4\right)^2=4 \quad\Leftrightarrow\quad a=\dfrac{1}{108}$

Antwoord: $f\left(x\right)=\dfrac{1}{108}.\left(x+3\right)^2\left(x+1\right)x\left(x-4\right)^2$

12. Bepaal $m\in\mathbb{R}$ zodat de rest bij deling van $\left(4m^2x^3-7mx^2-1\right)^2$ door $\left(x+1\right)$ gelijk is aan 9.

Wegens de reststelling geldt: $r=A\left(-1\right)=\left(4m^2\left(-1\right)^3-7m\left(-1\right)^2-1\right)^2=\left(-4m^2-7m-1\right)^2=9$

Dit valt uiteen in twee vergelijkingen: $-4m^2-7m-1=3$ of $-4m^2-7m-1=-3$

In standaardvorm worden dit de vierkantsvergelijkingen $4m^2+7m+4=0$ en $4m^2+7m-2=0$

De eerste vergelijking heeft geen oplossingen want $\Delta=-15<0$

De tweede vergelijking heeft oplossingen $m=-2$ of $m=\dfrac{1}{4}$.

Antwoord: de rest is gelijk aan 9 als $m=-2$ of $m=\dfrac{1}{4}$.

13. Beschouw de 4 termen: $x+y$, $x+3$, 6, $9x$.

- Voor welke waarden van x en y vormen deze termen een rekenkundige rij?

$$x+3, \quad 6, \quad 9x : RR \Leftrightarrow 6=\frac{(x+3)+9x}{2} \Leftrightarrow 10x+3=12 \Leftrightarrow x=0,9$$

Dus wordt de rij: $\underbrace{0,9+y\,;3,9\,;6\,;8,1}_{\text{R.R. met } v=2,1}$, dus dan moet $0,9+y=1,8 \Leftrightarrow y=0,9$.

- Voor welke waarden van x en y vormen deze termen een meetkundige rij?

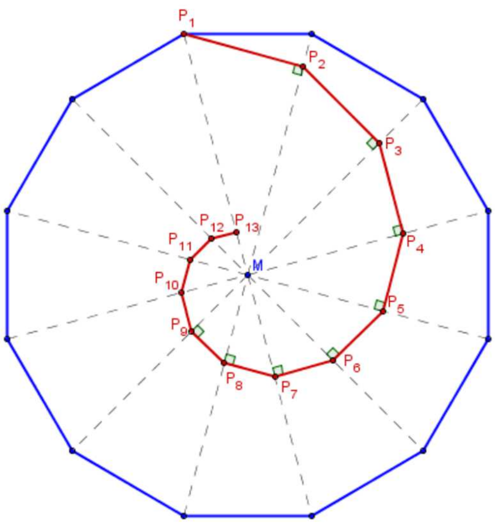
$$x+3, \quad 6, \quad 9x : MR \Leftrightarrow 6^2=(x+3).9x \Leftrightarrow 9x^2+27x-36=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-4$$

Als $x=1$ dan wordt de rij: $\underbrace{1+y,4,6,9}_{\text{M.R. met } q=3/2}$, dus dan moet $1+y=\frac{8}{3} \Leftrightarrow y=\frac{5}{3}$.

Als $x=-4$ dan wordt de rij: $\underbrace{-4+y,-1,6,-36}_{\text{M.R. met } q=-6}$, dus dan moet $-4+y=\frac{1}{6} \Leftrightarrow y=\frac{25}{6}$.

14. De figuur hiernaast is een regelmatige twaalfhoek, met straal 4 cm. Alle hoekpunten zijn verbonden met het midden M.

Vanuit een hoekpunt P_1 laat men de loodlijn neer op de volgende straal, met voetpunt P_2. Zo gaat men door tot men volledig rond is. Bepaal de lengte van spiraal $P_1P_2 \ldots P_{13}$.



Alle middelpuntshoeken meten $\frac{360°}{12}=30°$.

$|P_1P_2|=|MP_1|.\sin 30°=2$, en $|MP_2|=|MP_1|.\cos 30°=2\sqrt{3}$

$|P_2P_3|=|MP_2|.\sin 30°=\sqrt{3}$, en $|MP_3|=|MP_2|.\cos 30°=3$

$|P_3P_4|=|MP_3|.\sin 30°=\frac{3}{2}$, en $|MP_4|=|MP_3|.\cos 30°=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

De stukjes spiraal vormen dus een M.R. met $q=\frac{\sqrt{3}}{2}$. De lengte is dan: $l=2.\frac{\left(\sqrt{3}/2\right)^{12}-1}{\left(\sqrt{3}/2\right)-1} \approx 12,27$

15. Van een eindige rekenkundige rij is het aantal termen gelijk aan driemaal het verschil van de rij, de negende term is gelijk aan vijfmaal de tweede term en de laatste term is 47. Bereken de som van de termen van deze rij.

$$\begin{cases} n = 3v \\ u_9 = 5u_2 \\ u_n = 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3v \\ u_1 + 8v = 5(u_1 + v) \\ u_1 + (n-1)v = 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3v \\ u_1 = \frac{3}{4}v \\ \frac{3}{4}v + (3v-1)v = 47 \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} n = 12 \\ u_1 = 3 \\ v = 4 \end{cases}$$

$* : 3v^2 - \frac{1}{4}v - 47 = 0 \overset{vkv}{\Leftrightarrow} \underbrace{\cancel{v = -\frac{47}{12}}}_{\text{want dan zou } n \notin \mathbb{N}} \vee v = 4$. De som is dus $s_{12} = 12.\frac{3+47}{2} = 300$.