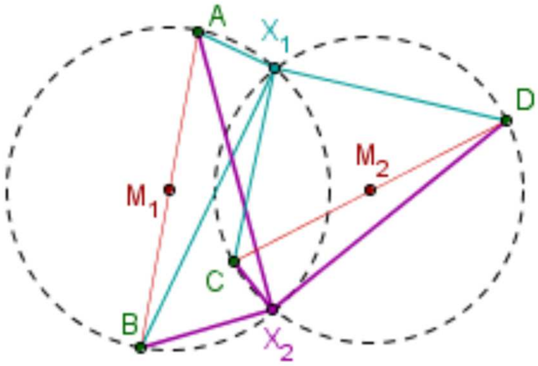
Voorbeeld paasexamen wiskunde (oplossingen)

1. Gegeven zijn 4 punten A, B, C en D.

   Construeer een punt X zodat $\widehat{AXB} = \widehat{CXD} = 90°$.

   Laat duidelijk al je constructielijnen staan. Verklaar kort waarom je constructie juist is.

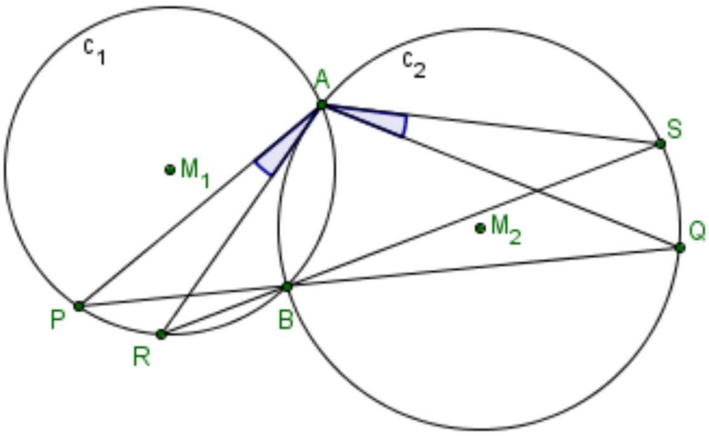
   Een omtrekshoek op en halve cirkel is altijd recht, dus moet je er gewoon voor zorgen dat X op de cirkels ligt waarvan $[AB]$ en $[CD]$ diameters zijn.



2. Twee cirkels c_1 en c_2 snijden elkaar in de punten A en B. Een rechte door B snijdt c_1 in P en c_2 in Q. Een andere rechte door B snijdt c_1 in R en c_2 in S.

   Bewijs dat $\widehat{PAR} = \widehat{QAS}$.

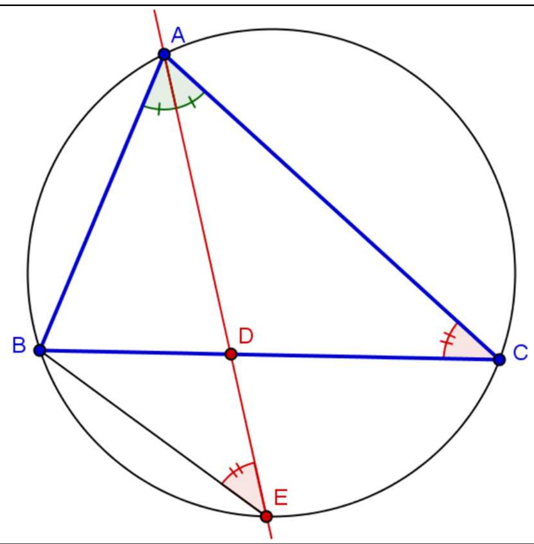
   Enerzijds is $\widehat{PBR} = \widehat{QBS}$ (overstaande hoeken), anderzijds geldt ook dat $\widehat{PBR} = \widehat{PAR}$ en $\widehat{QBS} = \widehat{QAS}$ (omtrekshoeken op dezelfde boog), waaruit het gestelde volgt.



3. Gegeven is een driehoek ΔABC. De binnenbisscectrice van hoek $\widehat{BAC}$ snijdt de zijde $[BC]$ in punt D en de omgeschreven cirkel van de driehoek in punt E.

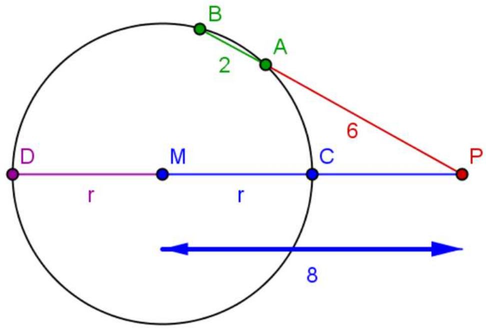
   Bewijs dat $|AD|.|AE| = |AB|.|AC|$.

   We weten ook dat $\widehat{BEA} = \widehat{BCA}$ (omtrekshoeken op dezelfde boog), dus geldt dat $\Delta BAE \sim \Delta DAC$ (HH). Dus geldt: $\dfrac{|AB|}{|AD|} = \dfrac{|AE|}{|AC|}$, waaruit na kruisproducten te nemen het gestelde onmiddellijk volgt.

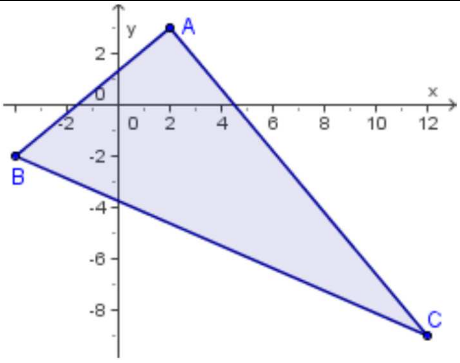


4. Een punt P ligt op afstand 8 van het middelpunt van een cirkel. Een rechte door P snijdt de cirkel in twee punten A en B zodat $|PA| = 6$ en $|AB| = 2$. Bereken de straal van deze cirkel.

   Op de figuur zie je dat je hierbij de stelling van de macht van een punt ten opzichte van een cirkel kan toepassen. Er geldt dus: $|PA|.|PB| = |PC|.|PD|$, waarbij $[CD]$ de diameter van de cirkel is zodat $P \in CD$. Hieruit volgt: $6.8 = (8-r)(8+r) \Leftrightarrow r^2 = 16 \Leftrightarrow r = 4$.



5. Zij gegeven de punten $A(2,3)$, $B(-4,-2)$ en $C(12,-9)$.



a) Toon aan dat deze driehoek rechthoekig is.

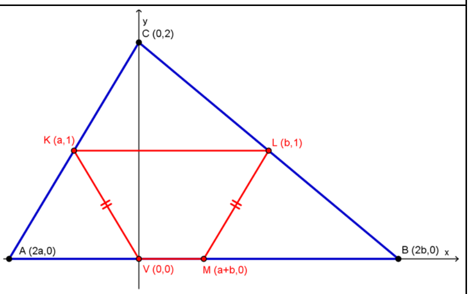
$$m_{AB}.m_{AC}=\frac{-2-3}{-4-2}.\frac{-9-3}{12-2}=\frac{5}{6}.\frac{-6}{5}=-1 \Leftrightarrow AB\perp AC$$

b) Bereken de oppervlakte van deze driehoek.

$$S_{\Delta ABC}=\frac{|AB|.|AC|}{2}=\frac{\sqrt{(-4-2)^2+(-2-3)^2}.\sqrt{(12-2)^2+(-9-3)^2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{61}.\sqrt{244}}{2}=\frac{\sqrt{61}.\cancel{2}.\sqrt{61}}{\cancel{2}}=61$$

6. Bewijs analytisch dat de middens van een willekeurige driehoek, samen met het voetpunt van een hoogtelijn altijd een gelijkbenig trapezium vormen.



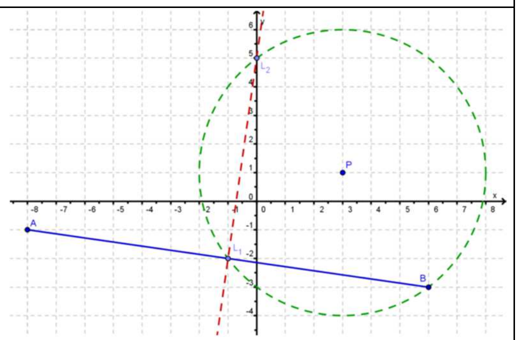
Kies het assenstelsel zoals op de figuur. Voor de coördinaten van A, B en C kiezen we dubbele waarden omdat we nadien de helft moeten nemen en we op die manier breuken kunnen vermijden.

De coördinaten van K, L en M vind je met de formule voor het midden van een lijnstuk.

$m_{VM}=m_{KL}=0 \Rightarrow VM \parallel KL$, dus $KLMV$ is zeker al een trapezium.

Ook geldt: $|VK|=\sqrt{a^2+1}=|ML|$, dus is het trapezium gelijkbenig.

7. Bepaal de coördinaten van de punten die even ver liggen van $A(-8,-1)$ als van $B(6,-3)$ en die op een afstand 5 van het punt $P(3,1)$ liggen.



De punten die even ver van A als van B liggen, zijn de punten van de middelloodlijn l van $[AB]$.

De rico van AB is $m_{AB}=\frac{-3+1}{6+8}=-\frac{1}{7}$ (dus $m_l=7$) en het midden van $[AB]$ is $M(-1,-2)$, dus de middelloodlijn is dan $l\leftrightarrow y=7(x+1)-2$ of eenvoudiger $l\leftrightarrow y=7x+5$.

Punten op afstand 5 van het punt P liggen op de cirkel met middelpunt P en straal 5:

$c\leftrightarrow(x-3)^2+(y-1)^2=25$ of eenvoudiger geschreven: $c\leftrightarrow x^2+y^2-6x-2y-15=0$

De snijpunten vind je met het stelsel: $\begin{cases}x^2+y^2-6x-2y-15=0\\ y=7x+5\end{cases} \overset{£}{\Leftrightarrow} \begin{cases}x=-1\\ y=-2\end{cases} \vee \begin{cases}x=0\\ y=5\end{cases}$

$£: x^2+(7x+5)^2-6x-2(7x+5)-15=0 \Leftrightarrow 50x^2+50x=0 \Leftrightarrow 50x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$

De gevraagde punten zijn dus $L_1(-1,-2)$ en $L_2(0,5)$.

8. Beschouw de cirkel $c \leftrightarrow x^2-4x+y^2-4y+7=0$, en $P(-1,1)$.

a. Bepaal het middelpunt en de straal van deze cirkel. .

$M\,(2,2)\;\; en \;\; r=\sqrt{2^2+2^2-7}=1$

b. Bepaal de vergelijking van de raaklijnen aan de cirkel c die door het punt P gaan.

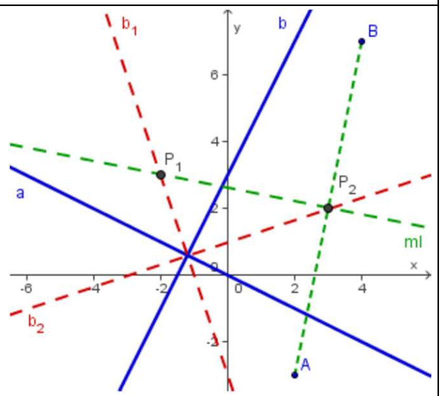
De vergelijking van een rechte door P is: $t \leftrightarrow y=m(x+1)+1$, of nog: $t \leftrightarrow mx-y+m+1=0$.

$$d(M,t)=r \quad \Leftrightarrow \frac{|m.2-2+m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=1 \Leftrightarrow |3m-1|=\sqrt{m^2+1} \Leftrightarrow 9m^2-6m+1=m^2+1 \Leftrightarrow 8m^2-6m=0$$

$$\Leftrightarrow 2m(4m-3)=0 \Leftrightarrow m=0 \vee m=\frac{3}{4}$$

De raaklijnen zijn dus: $t_1 \leftrightarrow y=1$ en $t_2 \leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$.

9. Welke punten liggen even ver van de punten $A(2,-3)$ en $B(4,7)$, en ook even ver van de rechten $a \leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x$ en $b \leftrightarrow y=2x+3$. Hint: los het probleem eerst grafisch op!
(er geldt: $a \leftrightarrow x+2y=0$ en $b \leftrightarrow 2x-y+3=0$).



De punten die even ver liggen van A als van B liggen, liggen op hun middelloodlijn l.

De punten die even ver van a als van b liggen, liggen op de bissectrices van deze rechten.

Het midden van $[AB]$ heeft coördinaat $(3,2)$. De rico is $m_{AB}=5 \;\Leftrightarrow\; m_l=-\frac{1}{5}$. Dus de vergelijking van de middelloodlijn is $l \leftrightarrow y=-\frac{1}{5}(x-3)+2$, of anders geschreven $x+5y-13=0$ (of nog: $x=13-5y$).

Een punt ligt dus op deze rechte als en slechts als het een coördinaat heeft van de vorm $P(13-5p,p)$.

Voor dit punt moet gelden dat $d(P,a)=d(P,b)$. Werken we dit uit dan krijgen we:

$\frac{|13-5p+2p|}{\cancel{\sqrt{5}}}=\frac{|2(13-5p)-p+3|}{\cancel{\sqrt{5}}} \Leftrightarrow |13-3p|=|-11p+29| \Leftrightarrow 13-3p=-11p+29 \vee 13-3p=11p-29$ met oplossingen $p=3$ en $p=2$. De oplossingen zijn dus $P_1(3,2)$ en $P_2(-2,3)$ (ook te zien op de figuur).

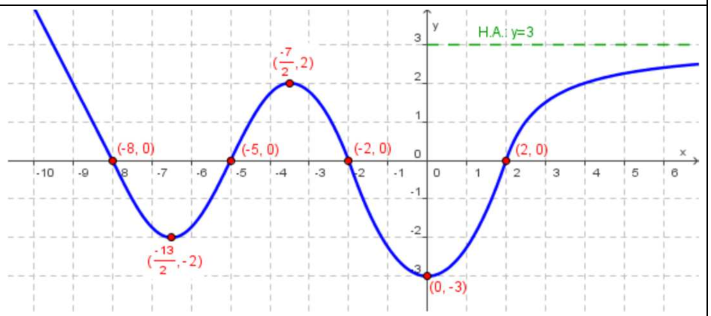
Alternatief: je kan ook de vergelijkingen van de bissectrices opstellen en dan de snijpunten ervan zoeken met de middelloodlijn. Op die manier kan je zonder parameter werken (maar ik vind het rekenwerk op deze manier eleganter).

10. Verzin zelf een voorbeeld waaruit blijkt dat de volgorde waarin je transformaties uitvoert op een functie wel degelijk belang heeft.

$f_0(x)=\sqrt{x} \xrightarrow{S_x} f_1(x)=-\sqrt{x} \xrightarrow{\vec{v}(0,3)} f_2(x)=-\sqrt{x}+3$ enerzijds,

$f_0(x)=\sqrt{x} \xrightarrow{\vec{v}(0,3)} f_1(x)=\sqrt{x}+3 \xrightarrow{S_x} f_2(x)=-\sqrt{x}-3$ anderzijds.

11. Onderstaande grafiek is van een functie f, met een horizontale asymptoot $y=3$. Verder geldt $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Alle speciale punten (extrema en nulpunten) zijn aangeduid op de figuur.



a. Bespreek in een duidelijke, overzichtelijke tabel het tekenverloop van deze functie.

x	$-\infty$	-8		-5		-2		2	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

b. Bespreek in een duidelijke, overzichtelijke tabel het stijgen en dalen van deze functie.

x	$-\infty$	-13/2		-7/2		0	$+\infty$
$f(x)$	↘	MIN (-2)	↗	MAX (2)	↘	MIN (-3)	↗

c. Wat is het domein en wat is het beeld van deze functie?

$dom\ f=\mathbb{R}$ en $bld\ f=[-3,+\infty[$

d. Wat is $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$? $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ omdat we langs die kant een horizontale asymptoot hebben.

12. Beschouw de functie $f(x)=\dfrac{3.(1-2x)^3-24}{2}=\dfrac{3}{2}(1-2x)^3-12$.

a. Door welke elementaire transformaties uit te voeren op de grafiek van $f_0(x)=x^3$ bekom je de grafiek van f?

$f_0(x)=x^3$

$f_1(x)=(x+1)^3 \quad : \vec{v}(-1,0)$

$f_2(x)=(2x+1)^3 \quad : u_x(1/2)$

$f_3(x)=(-2x+1)^3 \quad : S_y$

$f_4(x)=\dfrac{3}{2}(-2x+1)^3 \quad : u_y\left(\dfrac{3}{2}\right)$

$f_5(x)=\dfrac{3}{2}(-2x+1)^3-12 \quad : \vec{v}(0,-12)$

b. In welke punten P en Q snijdt de grafiek van deze functie de assen?

Als $x=0$ dan is $y=f(0)=\dfrac{3.(1-2.0)^3-24}{2}=-\dfrac{21}{2}$. Dus $Q\left(0,-\dfrac{21}{2}\right)$.

Als $y=0$ dan is $\dfrac{3.(1-2x)^3-24}{2}=0 \Leftrightarrow (1-2x)^3=8 \Leftrightarrow 1-2x=2 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$. Dus $P\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$.