Voorbeeldoplossing irrationale functies (zonder 🖩)

1. Los de volgende vergelijkingen op in $\mathbb{R}$: $2x=1-\sqrt{7-5x-x^3}$ $\left(BV: 7-5x-x^3\geq 0\right)$

$$\sqrt{7-5x-x^3}=1-2x \overset{\boxed{KV:1-2x\geq 0}}{\Rightarrow} 7-5x-x^3=1-4x+4x^2 \Leftrightarrow x^3+4x^2+x-6=0 \overset{*}{\Leftrightarrow} \cancel{x=1} \vee x=-3 \vee x=-2$$

*	1	4	1	-6
1		1	5	6
	1	5	6	0
-2		-2	-6	
	1	3	0	

Dus $V=\{-3,-2\}$

2. Bepaal het domein, de nulpunten en stel het tekenverloop op van de functie $f(x)=3-x-\sqrt{33-x}$.

- $dom\ f=\left]-\infty,33\right]$
- Nulpunten:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{33-x}=3-x \overset{\boxed{KV:3-x\geq 0}}{\Rightarrow} 33-x=9-6x+x^2 \Leftrightarrow x^2-5x-24=0 \Leftrightarrow \cancel{x=8} \vee x=-3$$

- Tekenverloop:

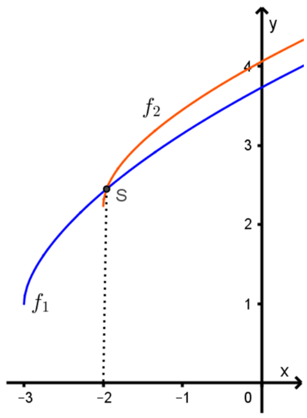
x	$-\infty$		-3		33		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	-30	///	

3. In het assenstelsel hiernaast staan de grafieken getekend van twee functies:

$f_1(x)=\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}$ en $f_2(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}$.

Deze grafieken lijken elkaar te snijden in een punt met abscis $x=-2$.

Dit is echter niet het geval. Toon dit aan door de juiste abscis van het snijpunt te berekenen.



$$f_1(x)=f_2(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7} \quad \boxed{BV: x\geq -2}$$

$$\Leftrightarrow x+3+x+4+2\sqrt{x^2+7x+12}=x+2+x+7+2\sqrt{x^2+9x+14}$$

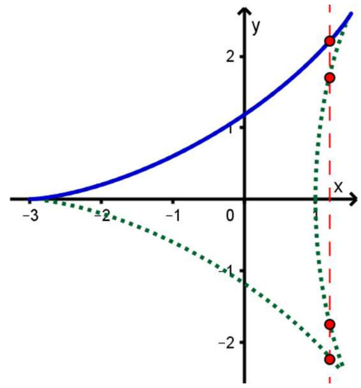
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+7x+12}=1+\sqrt{x^2+9x+14}$$

$$\Leftrightarrow x^2+7x+12=1+x^2+9x+14+2\sqrt{x^2+9x+14}$$

$$\Leftrightarrow -2x-3=2\sqrt{x^2+9x+14}$$

$$\overset{\boxed{KV:-2x-3\geq 0}}{\Rightarrow} 4x^2+12x+9=4x^2+36x+56 \Leftrightarrow \boxed{x=-\frac{47}{24}}$$

4. Op de figuur hiernaast staat in stippellijn een hypocycloïde $\mathcal{H}$ afgebeeld. Er geldt: $\mathcal{H} \leftrightarrow \left(x^2+y^2-12x+9\right)^2 = 4\left(3-2x\right)^3$



a) Je kan deze hypocycloïde $\mathcal{H}$ ook opbouwen met functies. Hoeveel functies heb je hier minstens voor nodig?

Minstens 4, want voor x-waarden iets groter dan 1 zijn er vier verschillende y-waarden (zie rode lijn op grafiek).

b) Bepaal van één zo'n functie (naar keuze) het functievoorschrift.

$$\left(x^2+y^2-12x+9\right)^2 = 4\left(3-2x\right)^3 \Leftrightarrow x^2+y^2-12x+9 = \pm\sqrt{4\left(3-2x\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 12x - x^2 - 9 \pm 2\sqrt{\left(3-2x\right)^3} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{12x-x^2-9\pm 2\sqrt{\left(3-2x\right)^3}}$$

Kies je voor de (twee) positieve vierkantswortels dan krijg je $f_1\left(x\right) = \sqrt{12x-x^2-9+2\sqrt{\left(3-2x\right)^3}}$.

c) Teken de grafiek van de functie die je bij vraag b vond in volle lijn op de grafiek hiernaast.

De keuze voor de twee positieve vierkantswortels impliceert dat f_1 de grootste functie zal zijn.

De grafiek van f_1 is in blauw aangeduid op de grafiek.

5. Los op in $\mathbb{R}$: $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2} = 3^{\sin x}$

De bestaansvoorwaarden impliceren dat $1-x \geq 0 \ \wedge \ x-2 \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \leq 1 \ \wedge \ x \geq 2$, wat uiteraard niet kan.

Dus $V = \varnothing$.