Voorbeeldoplossing veeltermfuncties & rationale functies

1. Theorie:

   a) Geef de definitie van een symmetriemiddelpunt van de grafiek van een functie.

   Het punt $S(p,q)$ is een symmetriepunt van de grafiek van de functie f als en slechts als geldt:

   $\forall x \in \mathbb{R} : p-x \in dom\ f \ \Rightarrow \dfrac{f(p-x)+f(p+x)}{2} = q$.

   b) Geef de definitie van de multipliciteit van een nulpunt van een veeltermfunctie.

   We noemen n een nulpunt met multipliciteit m van de veeltermfunctie $f(x)$ als:

   $(x-n)^m \mid f(x)$, maar $(x-n)^{m+1} \nmid f(x)$.

2. Gegeven is de veeltermfunctie $f(x) = 4x^3 + ax^2 - 5x + 3$, met parameter $a \in \mathbb{R}$.

   a) Voor welke waarde van de parameter $a \in \mathbb{R}$ zal de som van de nulpunten van deze veelterm 1 zijn?

   De formules van Viète leren ons dat voor de som van de drie nulpunten x_1, x_2 en x_3 geldt dat:

   $s = x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a}{4} = 1 \Leftrightarrow a = -4$. De veeltermfunctie wordt dan $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 5x + 3$.

   b) Controleer je antwoord op vraag a door voor die waarde van a de drie nulpunten te berekenen.

   We vinden de nulpunten met het algoritme van Horner en de discriminantformule:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 4 & -4 & -5 & 3 \\ -1 & & -4 & 8 & -3 \\ \hline & 4 & -8 & 3 & 0 \end{array} \qquad \Delta = 64 - 48 = 16 \Rightarrow x = \frac{8 \pm 4}{8} = \begin{cases} \nearrow 3/2 \\ \searrow 1/2 \end{cases}.$$

   De drie nulpunten zijn dus $-1, 1/2$ en $3/2$, waarvan de som inderdaad 1 is.

3. Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{4x^3 - 3x^2 + 3x - 4}{2x^3 - 2x^2 + x - 1}$.

   a) De grafiek van deze functie is geperforeerd. Bepaal de coördinaat van het perforatiepunt.

   Je ziet dat 1 een nulpunt is van zowel de teller als de noemer (of niet maar je probeert sowieso te ontbinden in factoren). We kunnen dus eenvoudig ontbinden met Horner:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 4 & -3 & 3 & -4 \\ 1 & & 4 & 1 & 4 \\ \hline & 4 & 1 & 4 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & & 2 & 0 & 1 \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 + 3x - 4}{2x^3 - 2x^2 + x - 1} = \frac{(x-1)(4x^2 + x + 4)}{(x-1)(2x^2 + 1)} \Rightarrow f_v(x) = \frac{4x^2 + x + 4}{2x^2 + 1}$$

   De functiewaarde van 1 voor f_v is $f_v(1) = 3$, zodat het perforatiepunt $P(1,3)$ is.

b) De grafiek van deze functie snijdt haar enige asymptoot in één punt. Bepaal de coördinaat van dit snijpunt.

Via een Euclidische deling vinden we dat $f_v(x) = \dfrac{4x^2+x+4}{2x^2+1} = 2 + \dfrac{x+2}{2x^2+1}$.

4x²	+x	+4		2x²	+1
2x²		+2		2	
	x	+2			

Het snijpunt met de horizontale asymptoot wordt dus gegeven door $S(-2,2)$.

4. Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x^3+ax^2+bx-2}{x^2-4}$, met parameters $a,b \in \mathbb{R}$.

a) Voor welke waarde(n) van a heeft de grafiek van deze functie de rechte $r \leftrightarrow y = 2x+5$ als schuine asymptoot?

Het quotiënt van de deling van de teller door de noemer is $2x+a$, zodat dit zal gelden voor $a=5$.

2x³	+ax²	+bx	-2		x²	-4
2x³		-8x			2x	+a
	ax²	+(b+8)x	-2			
	ax²		-4a			
		(b+8)x	+4a-2			

Alternatieve methode (merk op dat $gr(R(x)) \leq 1$):

$$\frac{2x^3+\boxed{a}x^2+bx-2}{x^2-4} = 2x+5+\frac{R(x)}{x^2-4}$$

$$= \frac{(2x+5)(x^2-4)+cx+d}{x^2-4} = \frac{2x^3+\boxed{5}x^2-(8+c)+d-2}{x^2-4}$$

$$\Rightarrow \boxed{a=5}$$

b) Als $a=0$, voor welke waarde(n) van b zal de grafiek dan geen twee verticale asymptoten hebben?

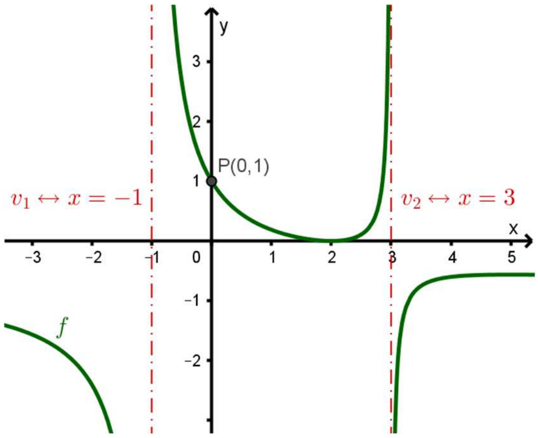
Met $a=0$ wordt de functie $f(x) = \dfrac{2x^3+bx-2}{x^2-4}$.

De potentiële verticale asymptoten zijn $x=2$ en $x=-2$. Dit zullen niet allebei verticale asymptoten zijn als en slechts als 2 of -2 ook een nulpunt is van de teller (je krijgt dan een perforatie i.p.v. een asymptoot).

- 2 is een nulpunt van de teller $\Leftrightarrow$ $2\cdot 2^3 + b\cdot 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow b = -7$
- -2 is een nulpunt van de teller $\Leftrightarrow$ $2(-2)^3 + b\cdot(-2) - 2 = 0 \Leftrightarrow b = -9$

De grafiek zal dus geen twee verticale asymptoten hebben als $b=-7$ of als $b=-9$. Voor alle andere waarden zullen $x=2$ en $x=-2$ twee verticale asymptoten zijn.

5. De functie $f(x)=\dfrac{T(x)}{N(x)}$ is een rationale functie met $gr(T(x))=gr(N(x))=2$.



Stel het functievoorschrift op van deze functie als de grafiek van de functie f hiernaast is afgebeeld.

De grafiek heeft twee verticale asymptoten $v_1 \leftrightarrow x=-1$ *en* $v_2 \leftrightarrow x=3$*, raakt de* x*-as in het punt* $(2,0)$ *en snijdt de* y*-as in het punt* $P(0,1)$*. De horizontale asymptoot is niet gegeven.*

De grafiek impliceert dat 2 een dubbel nulpunt is van de teller en dat -1 en 3 nulpunten zijn van de noemer.

Voor de functie moet dus gelden dat: $f(x)=a\cdot\dfrac{(x-2)^2}{(x+1)(x-3)}$.

Uit het snijpunt met de y-as volgt dan: $P(0,1)\in f \Leftrightarrow f(0)=1 \Leftrightarrow 1=a\cdot\dfrac{(0-2)^2}{(0+1)(0-3)} \Leftrightarrow a=-\dfrac{3}{4}$

(de rechte met vergelijking $y=-\dfrac{3}{4}$ zal dus een horizontale asymptoot zijn van de grafiek, je kan dit eenvoudig controleren op de grafiek).

Het voorschrift van deze functie is dus $f(x)=\dfrac{-3(x-2)^2}{4(x+1)(x-3)}$