

## Een extraatje: logistische groei

Link met leerstof van de vijfdes

Veel groeiprocessen in de realiteit blijven niet eeuwig groeien maar naderen tot een bepaalde grenswaarde. Een manier om dit wiskundig te modelleren is de zogenaamde *logistische groei*.

Logistische functies zijn functies van de vorm  $N(t) = \frac{M}{1+b \cdot a^t}$ , met  $a \in ]0,1[$ .

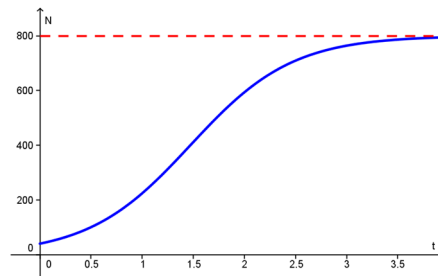
Merk hierbij op dat  $N(0) = \frac{M}{1+b} \Leftrightarrow b = \frac{M-N(0)}{N(0)}$ ,  $b$  is dus geen vrije parameter, maar kan worden berekend in functie van de startwaarde.

De grafiek is een sigmoïde (S-vormige kromme), met  $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = M$ , en ze vertoont een gedrag dat dus in de realiteit ook vaak voorkomt.

**Voorbeeld:** Een konijnenpopulatie wordt uitgezet in een bos.

De grootte van de populatie in functie van de tijd kan beschreven worden door de logistische functie:

$$N(t) = \frac{800}{1+19.0,135^t} \quad (M=800 \text{ en } N(0)=40).$$



**Stelling:** Als  $N$  een logistische functie is, dan is  $\frac{M-N}{N}$  een exponentiële functie.

**Bewijs:** 
$$\frac{M-N(t)}{N(t)} = \frac{M - \frac{M}{1+b \cdot a^t}}{\frac{M}{1+b \cdot a^t}} = \frac{M(1+b \cdot a^t) - M}{M} = b \cdot a^t \quad \square$$

Link met leerstof van de zesdes

**Stelling:** De ordinaat van het buigpunt van een logistische functie is de helft van de maximale waarde

**Bewijs:** 
$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{-M \cdot b \cdot \ln a \cdot a^t}{(1+b \cdot a^t)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N(t)}{dt^2} &= \frac{(1+b \cdot a^t)^2 (-M \cdot b \cdot \ln^2 a \cdot a^t) - (-M \cdot b \cdot \ln a \cdot a^t) \cdot 2(1+b \cdot a^t) \cdot b \cdot \ln a \cdot a^t}{(1+b \cdot a^t)^4} \\ &= \frac{(-M \cdot b \cdot \ln^2 a \cdot a^t)(1+b \cdot a^t - 2b \cdot a^t)}{(1+b \cdot a^t)^3} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } \frac{d^2 N(t)}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow 1+b \cdot a^t - 2b \cdot a^t = 0 \Leftrightarrow a^t = \frac{1}{b} \Leftrightarrow t = -^a \log b$$

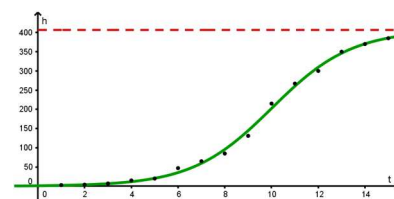
$$\text{En dan geldt: } N(-^a \log b) = \frac{M}{1+b \cdot \frac{1}{b}} = \frac{M}{2} \quad \square$$

Het eerste deel van een logistische functie (links van het buigpunt) gedraagt zich bij benadering als een exponentiële functie. We noemen dit deel dan ook de *exponentiële fase*.

### Een voorbeeldoefening:

Zonnebloemen zijn snelgroeiende planten die vaak worden gebruikt voor de productie van olie. Om zicht te krijgen op het groeiproces van zonnebloemen, worden regelmatig metingen gedaan. Bij een experiment is van een zonnebloem gedurende vijftien weken elke week de lengte gemeten. Het resultaat van deze metingen is hieronder met stippen weergegeven.

| # weken | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9   | 10  | 11  | 12  | 13  | 14  | 15  |
|---------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| hoogte  | 1 | 3 | 4 | 7 | 15 | 20 | 47 | 65 | 85 | 131 | 215 | 267 | 300 | 350 | 370 | 385 |



De hoogte van de zonnebloem gedraagt zich duidelijk logistisch in functie van de tijd.

- a) Voer met je rekenmachine een logistische regressie uit. Rond alle parameters af op 5 decimalen.

$$h(t) \approx \frac{406,61943}{1 + 348,56734 \cdot e^{-0,58447 \cdot t}}, \text{ wat je ook kan schrijven als } h(t) \approx \frac{406,61943}{1 + 348,56734 \cdot 0,55740^t}$$

- b) Hoe groot zal de zonnebloem maximaal worden volgens dit model? Rond af op 1 mm.

De maximale grootte is ongeveer 406,6 cm.

- c) Bereken na hoeveel weken de exponentiële fase eindigt.

Volgens de stelling eindigt deze fase als  $t = -^a \log b \approx -^{0,55740} \log 348,56734 \approx 10,01559$ , dus na ongeveer 10 weken.