1. ★* Gegeven zijn de functies $f(x)=x-2$ en $g(x)=\sqrt{x+\frac{1}{x}}$.

   a) Bepaal $\left(\frac{g}{f}\right)(4)$.

   $$\left(\frac{g}{f}\right)(4)=\frac{g(4)}{f(4)}=\frac{\sqrt{4+\frac{1}{4}}}{4-2}=\frac{\sqrt{\frac{17}{4}}}{2}=\frac{\frac{\sqrt{17}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{17}}{4}$$

   b) Schrijf de functie $g\circ f(x)$ zo eenvoudig mogelijk.

   $$g\circ f(x)=g(f(x))=g(x-2)=\sqrt{x-2+\frac{1}{x-2}}=\sqrt{\frac{(x-2)^2+1}{x-2}}=\sqrt{\frac{x^2-4x+5}{x-2}}$$

   c) Bepaal het domein van de functie $g\circ f$.

   $$x\in dom\ f \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+5}{x-2}>0\overset{*}{\Leftrightarrow} x>2 \Rightarrow dom\ f=\left]2,+\infty\right[$$

   *: de teller heeft geen nulpunten (altijd positief), de noemer heeft nulpunt $x=2$. Het tekenverloop is dus:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$\frac{x^2-4x+5}{x-2}$		-	|	+	

2. ★* Bepaal de inverse van de functie $f(x)=x^2+6x-3$, met $x\leq -3$.

$f^{-1}=\left\{(x,y)\,\|\,x=y^2+6y-3,\ \ y\leq -3\right\}$, vormen we het voorschrift om dan krijgen we:

$$\begin{aligned}
& x=y^2+6y-3,\ \ y\leq -3\\
\Leftrightarrow\quad & y^2+6y-x-3=0,\ \ y\leq -3\\
\Leftrightarrow\quad & y=\frac{-6-\sqrt{4x+48}}{2}\ \vee\ y=\frac{-6+\sqrt{4x+48}}{2},\ \ y\leq -3\\
\Leftrightarrow\quad & y=-3-\sqrt{x+12}\ \vee\ \cancel{y=-3+\sqrt{x+12},\ \ y\leq -3}\\
\Rightarrow\quad & y=-3-\sqrt{x+12}
\end{aligned}$$

De inverse functie heeft dus als voorschrift $f^{-1}(x)=-3-\sqrt{x+12}$

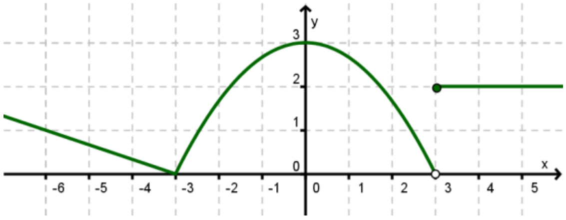
3. ★* Bepaal de inverse van de functie $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x^3+1}}$.

$f^{-1}=\left\{(x,y)\,\|\,x=\sqrt{\frac{1}{y^3+1}}\right\}$, vormen we het voorschrift om dan krijgen we:

$$x=\sqrt{\frac{1}{y^3+1}}\overset{\boxed{x\geq 0}}{\Leftrightarrow} x^2=\frac{1}{y^3+1}\Leftrightarrow y^3+1=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow y^3=\frac{1}{x^2}-1=\frac{1-x^2}{x^2}\Leftrightarrow y=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$$

De inverse functie heeft dus als voorschrift $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}},\ \ x\geq 0$

4. ★* Stel het (meervoudig) functievoorschrift op van de grafiek van deze functie:



$$f(x)=\begin{cases}-1/3\,x-1 & ,\ x<-3\\ -1/3\,x^2+3 & ,\ -3\le x<3\\ 2 & ,\ x\ge 3\end{cases}$$

Links: rechte door $(-6,1)$ en $(-3,0)$, dus

$$y=\frac{1-0}{-6+3}(x+3)+0 \iff y=-\frac{1}{3}x-1$$

Midden: parabool met nulpunten -3 en 3, dus $y=a(x+3)(x-3)$. Hierbij moet $a=-\frac{1}{3}$, want $(0,3)$ ligt erop.

Rechts: de constante functie $y=2$.

5. ★★ Los de volgende vergelijkingen op:

a) $|2x-6|=x$

Methode 1:

Als $2x-6>0$, of dus als $x>3$:

$$|2x-6|=x \iff 2x-6=x \iff x=6$$

Als $2x-6\le 0$, of dus als $x\le 3$:

$$|2x-6|=x \iff -2x+6=x \iff x=2$$

$V=\{2,6\}$

Methode 2:

We kwadrateren beide leden ($K.V.: x\ge 0$):

$$(2x-6)^2=x^2 \iff 3x^2-24x+36=0$$

$$\iff x^2-8x+12=0 \iff x=6 \vee x=2$$

b) $4.|x^2-2x-15|=32-x$

- Als $x^2-2x-15>0$, of dus als $x\notin[-3,5]$:

$$4.|x^2-2x-15|=32-x \iff 4x^2-8x-60=32-x \iff 4x^2-7x-92=0 \iff x=\frac{23}{4} \vee x=-4$$

- Als $x^2-2x-15\le 0$, of dus als $x\in[-3,5]$:

$$4.|x^2-2x-15|=32-x \iff -4x^2+8x+60=32-x \iff -4x^2+9x+28=0 \iff x=-\frac{7}{4} \vee x=4$$

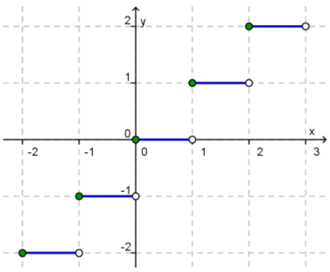
Alle oplossingen voldoen aan de vooropgestelde voorwaarde, dus $V=\left\{\frac{23}{4},-4,\frac{-7}{4},4\right\}$

c) $\left\lfloor \frac{1}{3}x+\frac{5}{2}\right\rfloor=4$

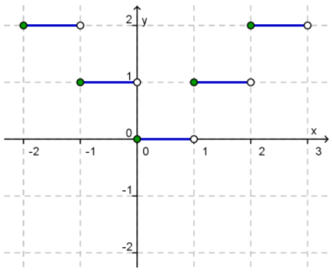
$$\iff 4\le\frac{1}{3}x+\frac{5}{2}<5 \iff \frac{3}{2}\le\frac{1}{3}x<\frac{5}{2} \iff \frac{9}{2}\le x<\frac{15}{2}$$, dus $V=\left[\frac{9}{2},\frac{15}{2}\right[$

6. ★* Teken de grafiek en bepaal het domein en het beeld van de functie $f(x)=\operatorname{sgn}(|\lfloor x\rfloor|)$.

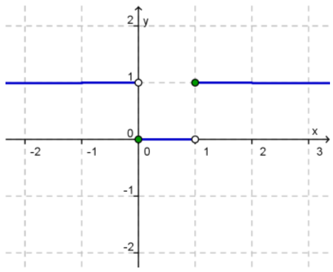
$y=\lfloor x\rfloor$



$y=|\lfloor x\rfloor|$



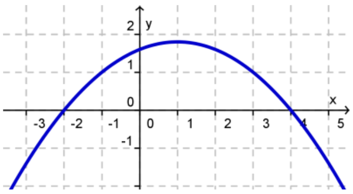
$y=\operatorname{sgn}(|\lfloor x\rfloor|)$



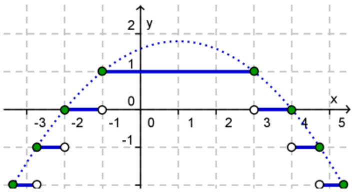
Dus $dom\ f=\mathbb{R}$ en $bld\ f=\{0,1\}$

7. ★★★ Teken de grafiek van de functie $f\left(x\right)=\mathrm{sgn}\left(\left\lfloor \frac{8}{5}+\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}x^2 \right\rfloor\right)$

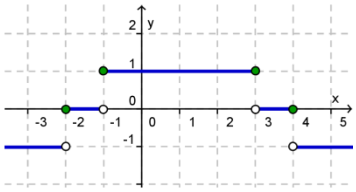
$y=\frac{8}{5}+\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}x^2$



$y=\left\lfloor \frac{8}{5}+\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}x^2 \right\rfloor$



$y=\mathrm{sgn}\left(\left\lfloor \frac{8}{5}+\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}x^2 \right\rfloor\right)$



8. ★★★★ Bewijs dat $f^{-1}\left(x\right)=\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}+x}-\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}-x}$ de inverse functie is van $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x$.

We bewijzen dit door aan te tonen dat $f\left(f^{-1}\left(x\right)\right)=x$ (want dan zijn de functies uiteraard elkaars inverse).

$$f\left(f^{-1}\left(x\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}+x}-\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}-x}\right)^3+\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}+x}-\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}-x}\right)$$

$$\overset{*_1}{=}x-\frac{3}{2}.\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}+x}+\frac{3}{2}.\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}-x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}+x}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$=x \quad \square$$

$*_1$: $\left(\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}+x}}_{a}-\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}-x}}_{b}\right)^3$

$$=\underbrace{\cancel{\sqrt{x^2+1}}+x}_{a^3}-3.\underbrace{\sqrt[3]{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}}_{a^2}.\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}-x}}_{b}+3.\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}+x}}_{a}.\underbrace{\sqrt[3]{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2}}_{b^2}-\underbrace{\left(\cancel{\sqrt{x^2+1}}-x\right)}_{b^3}$$

$$=2x-3.\sqrt[3]{x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}+x^2}.\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}-x}+3.\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}+x}.\sqrt[3]{x^2+1-2x\sqrt{x^2+1}+x^2}$$

$$=2x-3.\sqrt[3]{\left(2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}\right).\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}+3.\sqrt[3]{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right).\left(2x^2+1-2x\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$\overset{*_2}{=}2x-3.\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}+x}+3.\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$*_2$: $\left(2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}\right).\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}-2x^3-x+2x\left(x^2+1\right)-2x^2\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x^2+1}+x$

en $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right).\left(2x^2+1-2x\sqrt{x^2+1}\right)=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}+2x^3+x-2x\left(x^2+1\right)-2x^2\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x^2+1}-x$