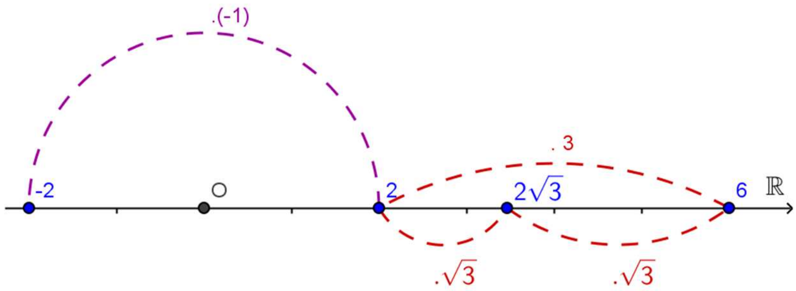
Complexe getallen

KEEP
CALM
AND LOVE
COMPLEX
NUMBERS

1) Complexe getallen - definitie

a) *Meetkundige betekenis van het getal i*

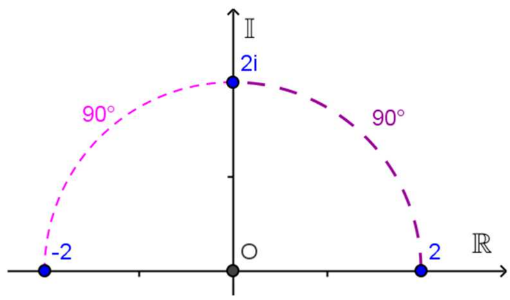
Als je een reëel getal met een ander reëel getal vermenigvuldigt, wordt zijn afstand tot de oorsprong met dit getal vermenigvuldigd (zo wordt 2 na vermenigvuldiging met 3 het getal 6). Als je een reëel getal met -1 vermenigvuldigt, dan voer je eigenlijk een draaiing van 180° uit ten opzichte van de oorsprong (zo wordt 2 na vermenigvuldiging met -1 het getal -2).



In deze context een vierkantswortel nemen, wil dus zeggen dat je op zoek gaat naar een meetkundige transformatie die na tweemaal uitvoeren terug de oorspronkelijke transformatie geeft. In het geval van vermenigvuldigen met een positief getal is dit eenvoudig in te zien. Als je bijvoorbeeld het getal 2, tweemaal na elkaar met $\sqrt{3}$ vermenigvuldigt, dan krijg je ook 6. We kunnen de redenering echter ook doortrekken naar de negatieve getallen.

Welke transformatie moet je tweemaal uitvoeren om een draaiing van 180° uit te voeren? Juist, een draaiing van 90° (in welke zin maakt niet uit). Noteren we de draaiing van 90° in tegenwijzerzin als i, dan hebben we dus dat $r.i.i = r.i^2 = r.(-1)$, of dus nog $i^2 = -1$!

Maar waar ligt dit nieuwe getal dan? Alleszins niet meer op de reële as. We voeren daarom een nieuwe as in, loodrecht op de reële as, die we de imaginaire as $\mathbb{I}$ zullen noemen. Op de figuur hiernaast zie je bijvoorbeeld waar het getal $2i$ ligt.



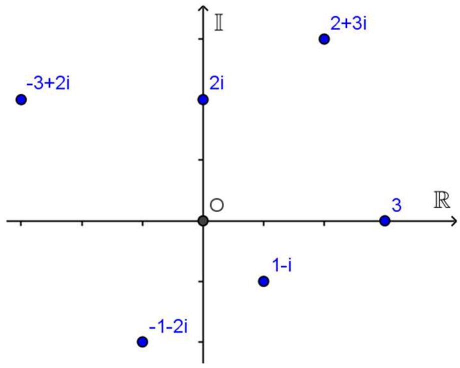
b) *De complexe getallen*

We gaan nu nog een stapje verder en definiëren de *complexe getallen* als de getallen van de vorm $z = a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$. De verzameling van al deze getallen noteren we met $\mathbb{C}$.

In symbolen definiëren we dus $\boxed{\mathbb{C} = \{a + bi \mid\mid a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}}$.

Het is hierbij onmiddellijk duidelijk dat $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (neem in de definitie $b = 0$).

Ook deze getallen kunnen we op logische manier afbeelden in het complexe vlak, opgebouwd uit de reële as $\mathbb{R}$ en de imaginaire as als $\mathbb{I}$. Hiernaast zie je enkele voorbeelden.
Getallen op de reële as noemen we *strikt reëel* (bvb -2).
Getallen op de imaginaire as noemen we *strikt imaginair* (bvb $-i$).
Het *reële deel* van een complex getal z noteren we met $\mathrm{Re}(z)$. Het *imaginaire deel* noteren we met $\mathrm{Im}(z)$.



Zo is bijvoorbeeld $\mathrm{Re}(-3+2i)=-3$ en $\mathrm{Im}(-3+2i)=2$.

Per definitie geldt dus : $\forall z\in\mathbb{C}: z=\mathrm{Re}(z)+i.\mathrm{Im}(z)$

2) Bewerkingen met complexe getallen

a) *Definitie van de basisbewerkingen*

We proberen op natuurlijk wijze de 4 basisbewerkingen in te voeren voor de complexe getallen $z_1=a+bi$ en $z_2=c+di$, met dus $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. We gaan er bij de deling van uit dat $z_2\neq 0$, dus c en d zijn dan niet beide nul.

De optelling: $(a+bi)+(c+di)=\underbrace{(a+c)}_{\in\mathbb{R}}+\underbrace{(b+d)}_{\in\mathbb{R}}i$.

$\mathrm{Re}(z_1+z_2)=\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)$ en $\mathrm{Im}(z_1+z_2)=\mathrm{Im}(z_1)+\mathrm{Im}(z_2)$.

De aftrekking: $(a+bi)-(c+di)=\underbrace{(a-c)}_{\in\mathbb{R}}+\underbrace{(b-d)}_{\in\mathbb{R}}i$.

$\mathrm{Re}(z_1-z_2)=\mathrm{Re}(z_1)-\mathrm{Re}(z_2)$ en $\mathrm{Im}(z_1-z_2)=\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)$.

De vermenigvuldiging: $(a+bi).(c+di)=ac+adi+bci+bd\overbrace{i^2}^{=-1}=\underbrace{(ac-bd)}_{\in\mathbb{R}}+\underbrace{(ad+bc)}_{\in\mathbb{R}}i$.

$\mathrm{Re}(z_1.z_2)=\mathrm{Re}(z_1).\mathrm{Re}(z_2)-\mathrm{Im}(z_1).\mathrm{Im}(z_2)$ en $\mathrm{Im}(z_1.z_2)=\mathrm{Re}(z_1).\mathrm{Im}(z_2)+\mathrm{Im}(z_1).\mathrm{Re}(z_2)$.

De deling: $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{a+bi}{c+di}.\dfrac{c-di}{c-di}=\dfrac{ac-adi+bci-bd\overbrace{i^2}^{=-1}}{c^2-d^2\underbrace{i^2}_{=-1}}=\underbrace{\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}}_{\in\mathbb{R}}+\underbrace{\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}}_{\in\mathbb{R}}i$.

$\mathrm{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\dfrac{\mathrm{Re}(z_1).\mathrm{Re}(z_2)+\mathrm{Im}(z_1).\mathrm{Im}(z_2)}{(\mathrm{Re}(z_2))^2+(\mathrm{Im}(z_2))^2}$ en $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\dfrac{\mathrm{Im}(z_1).\mathrm{Re}(z_2)-\mathrm{Re}(z_1).\mathrm{Im}(z_2)}{(\mathrm{Re}(z_2))^2+(\mathrm{Im}(z_2))^2}$.

Dat elk van nul verschillend complex getal een omgekeerde heeft is ook duidelijk, want:

$$\forall z \in \mathbb{C}_0 : z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} \quad (z \neq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 \neq 0)$$

Met andere woorden: de som, het verschil, het product en het quotiënt van twee complexe getallen is nog steeds een complex getal.

Je hoeft deze rekenregels zeker niet te blokken. Rekenen met complexe getallen gaat op volledig dezelfde manier als bij reële getallen, waarbij je simpelweg in je achterhoofd houdt dat $i^2 = -1$.

b) ***De structuur van de complexe getallen***

Stelling: $\mathbb{C},+$ is een commutatieve groep

Bewijs: Het is duidelijk dat de vijf kenmerkende eigenschappen van een commutatieve groep gelden:

1) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$ (de complexe optelling is intern)
2) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (de complexe optelling is associatief)
3) $\forall z \in \mathbb{C} : z + 0 = 0 + z = z$ (0 is het neutraal element van de complexe optelling)
4) $\forall z \in \mathbb{C} : \exists -z \in \mathbb{C} : z + (-z) = -z + z = 0$ (elk complex getal heeft een tegengestelde)
5) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (de complexe optelling is commutatief)

Stelling: $\mathbb{C}_0,\cdot$ is een commutatieve groep

Bewijs: Ook hier gelden de vijf kenmerkende eigenschappen van een commutatieve groep:

6) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1.z_2 \in \mathbb{C}$ (de complexe vermenigvuldiging is intern)
7) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : (z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$ (de complexe vermenigvuldiging is associatief)
8) $\forall z \in \mathbb{C} : z.1 = 1.z = z$ (1 is het neutraal element van de complexe vermenigvuldiging)
9) $\forall z \in \mathbb{C} : z.0 = 0.z = 0$ (0 is het opslorpend element van de complexe vermenigvuldiging)
10) $\forall z \in \mathbb{C}_0 : \exists z^{-1} \in \mathbb{C}_0 : z.z^{-1} = z^{-1}.z = 1$ (elk complex getal heeft een omgekeerde)
11) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1.z_2 = z_2.z_1$ (de complexe vermenigvuldiging is commutatief)

(merk op dat enkel bij eigenschap 4 de verzameling moet beperkt worden tot $\mathbb{C}_0$).

Stelling: $\mathbb{C},+,\cdot$ is een veld

Bewijs: We weten al dat $\mathbb{C},+$ en $\mathbb{C}_0,\cdot$ commutatieve groepen zijn. Daarnaast geldt ook nog:

12) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} := z_1.(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3$
(de complexe vermenigvuldiging is distributief ten opzichte van de complexe optelling)

Belangrijke opmerking: Het is onmogelijk om op de complexe getallen een orde te definiëren. Ongelijkheden bij complexe getallen hebben dan ook geen enkele zin.

c) *De complex toegevoegde*

De *complex toegevoegde* (of *geconjugeerde*) van een complex getal z, noteren we met $\overline{z}$. Dit is het complex getal met hetzelfde reële deel, maar tegengesteld imaginair deel, dus $\overline{a+bi}=a-bi$. Meetkundig komt dit neer op een spiegeling om de reële as.

Eigenschap 1: $\forall z \in \mathbb{C} : \overline{\overline{z}} = z$

Bewijs: $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a+bi = z$

Eigenschap 2: $\forall z \in \mathbb{C} : \overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$

Bewijs: $\overline{z_1+z_2} = \overline{a+bi+c+di} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i = a-bi+c-di = \overline{z_1}+\overline{z_2}$

Eigenschap 3: $\forall z \in \mathbb{C} : \overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$

Bewijs: $\overline{z_1.z_2} \;= \overline{(a+bi).(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(bc+ad)i} = (ac-bd)-(bc+ad)i$

$= (a-bi).(c-di) = \overline{z_1}.\overline{z_2}$

Eigenschap 4: $\forall z \in \mathbb{C} : z+\overline{z} \in \mathbb{R}$ *Bewijs*: $z+\overline{z} = a+bi+a-bi = 2a \in \mathbb{R}$

Eigenschap 5: $\forall z \in \mathbb{C} : z.\overline{z} \in \mathbb{R}$ *Bewijs*: $z.\overline{z} = (a+bi).(a-bi) = a^2+b^2 \in \mathbb{R}$

d) *Machten en vierkantswortels van complexe getallen*

Machten

Een gehele macht van complexe getallen definiëren we op dezelfde manier als bij reële getallen:

- $\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : z^n = \overbrace{z.z.z.\ldots.z}^{n \text{ factoren}}$.
- $\forall z \in \mathbb{C}_0 : z^0 = 1$
- $\forall z \in \mathbb{C}_0, \forall n \in \mathbb{N} : z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$

Vierkantswortels

Definitie: $w \in \mathbb{C}$ is een vierkantswortel van $z \in \mathbb{C}$ als en slechts als $w^2 = z$.

Voorbeeld: $2+i$ is een vierkantswortel van $3+4i$ want $(2+i)^2 = 3+4i$.

Stelling: elk complex getal (verschillend van nul) heeft twee tegengestelde vierkantswortels.

Bewijs: We bepalen alle vierkantswortels van het complexe getal $z = a+bi$.

① stel $b=0$, dan is dus $z \in \mathbb{R}_0$.

Als $a>0$, dan heeft z inderdaad twee tegengestelde wortels, namelijk $\sqrt{a}$ en $-\sqrt{a}$.

Als $a<0$, dan heeft z ook twee tegengestelde wortels, namelijk $\sqrt{-a}.i$ en $-\sqrt{-a}.i$.

② stel $b \neq 0$, stel dan dat $w = x + yi$ een vierkantswortel is van $z = a + bi$, met $x, y \in \mathbb{R}_0$.

$$(x+yi)^2 = a+bi \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a+bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \left(\dfrac{b}{2x}\right)^2 = a \\ y = \dfrac{b}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \cdots$$

De bovenste vergelijking uitwerken geeft: $x^2 - \dfrac{b^2}{4x^2} = a \Leftrightarrow 4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$.

Hiervoor geldt: $\Delta = 16a^2 + 16b^2$, zodat $x^2 = \dfrac{4a + \sqrt{16a^2 + 16b^2}}{8} = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

(het geval $x^2 = \dfrac{4a - \sqrt{16a^2 + 16b^2}}{8} = \dfrac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} < 0$ is onmogelijk want $x \in \mathbb{R}_0$)

$$\cdots \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ y = \dfrac{b}{2\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ y = \dfrac{-b}{2\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}} \end{cases}$$

Dus ook $z = a + bi$ heeft twee tegengestelde vierkantswortels, namelijk:

$$w_1 = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \frac{b}{2\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}}\, i \text{ en } w_2 = -\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} - \frac{b}{2\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}}\, i \quad \square$$

Opmerking: Je kan de imaginaire delen van de wortels ook anders schrijven, want:

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2} + a}{2} \Rightarrow y^2 = x^2 - a = \frac{\sqrt{a^2+b^2} + a}{2} - \frac{2a}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2} - a}{2}.$$

De wortels van $a + bi$ kan je dus ook iets eenvoudiger schrijven als:

$$w = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2} + a}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2} - a}{2}}\, i$$

De twee tekens worden hier gelijk gekozen als $b > 0$ en verschillend gekozen als $b < 0$.

Voorbeeld: bereken de vierkantswortels van $1 - \sqrt{3}i$.

De wortels zijn $w = \pm\sqrt{\dfrac{2+1}{2}} \mp \sqrt{\dfrac{2-1}{2}}\, i$, of dus nog $w_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} i$ en $w_2 = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i$.

Belangrijke opmerking: Het $\sqrt{\ }$ -symbool heeft bij complexe getallen geen enkele betekenis. Bij reële getallen gebruiken we het om de positieve vierkantswortel aan te duiden, maar bij complexe getallen bestaan positief en negatief niet. We spreken dus gewoon altijd van *de vierkantswortels* van een complex getal.

e) ***Complexe vierkantsvergelijkingen***

De formules voor een vierkantsvergelijking in de reële getallen blijven uiteraard gelden, alleen mogen we nu niet meer het $\sqrt{\ }$ -symbool gebruiken. We onthouden dus:

$az^2+bz+c=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{-b+w_1}{2a} \vee z=\dfrac{-b+w_2}{2a}$, met w_1 en w_2 de vierkantswortels van de complexe discriminant $\Delta=b^2-4ac$.

Voorbeeld: Los op in $\mathbb{C}$: $(-1+3i)z^2-3iz+1=0$

$\Delta=(-3i)^2-4\cdot(-1+3i)\cdot 1=9i^2+4-12i=-5-12i$.

De wortels van Δ zijn $w_1=\sqrt{\dfrac{\sqrt{12^2+5^2}-5}{2}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{12^2+5^2}+5}{2}}\,i=2-3i$ en $w_2=-2+3i$.

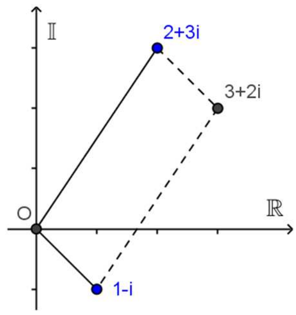
Dus $z_1=\dfrac{3i+(2-3i)}{2\cdot(-1+3i)}=\dfrac{2}{-2+6i}=\dfrac{2\cdot(-2-6i)}{(-2+6i)\cdot(-2-6i)}=\dfrac{-4-12i}{4+36}=-\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{10}i$,

en $z_2=\dfrac{3i+(-2+3i)}{2\cdot(-1+3i)}=\dfrac{-2+6i}{-2+6i}=1$. $\quad V=\left\{-\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{10}i\,,\ 1\right\}$

3) De goniometrische vorm van een complex getal

We hebben het complexe vlak al ingevoerd in de inleiding. Het wordt ook wel eens het vlak van Gauss of het vlak van Argand genoemd, naar haar ontdekkers. Elk complex getal komt overeen met één punt in het complexe vlak en omgekeerd.

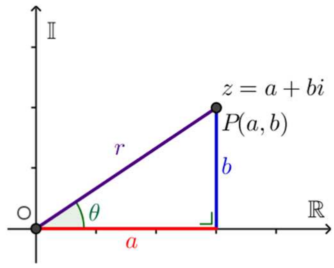
a) *Som van twee complexe getallen*



Op de figuur hiernaast staan twee complexe getallen $z_1 = 2+3i$ en $z_2 = 1-i$ samen met hun som $z_1 + z_2 = 3+2i$ getekend.

Het is duidelijk dat de punten $0,\ z_1,\ z_1+z_2,\ z_2$ een parallellogram vormen. De optelling van complexe getallen in het complexe vlak gebeurt dus op dezelfde manier als bij vectoren.

b) *Modulus en argument*



We kunnen een complex getal z eenduidig bepalen aan de hand van zijn coördinaat $P(a,b)$ in het complexe vlak, maar ook aan de hand van zijn modulus en argument:

- De modulus van een complex getal z is de afstand van dat complex getal tot de oorsprong.

  We noteren de modulus van z vaak met r (van radius) en noteren nog:

  $r = \text{mod}(z) = |z| = |a+bi| = |OP| = \sqrt{a^2+b^2}$

- Het argument van een complex getal z is de georiënteerde hoek θ die de positieve reële as maakt met de halfrechte $[OP$.

  Er geldt $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$, als $a \neq 0$. Als $a = 0$ dan is $\theta = 90°$ (als $b > 0$) of $\theta = -90°$ (als $b < 0$).

Voorbeeld: Als $z = -\sqrt{3}+i$ dan is $r = 2$ en $\theta = 150°$ (want $\tan\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, en $\theta \in II$)

c) *Goniometrische vorm van een complex getal*

Uit de definitie van modulus en argument volgt onmiddellijk dat $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ en $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$.

Voor een complex getal met modulus r en argument θ geldt dus dat:

$z = a+bi = r.\cos\theta + r.\sin\theta.i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Deze laatste schrijfwijze noemen we de goniometrische gedaante van het complexe getal z .

Voorbeeld: Voor $z = -\sqrt{3}+i$ geldt ook $z = 2(\cos 150° + i\sin 150°)$

Om de som en het verschil van goniometrische getallen in goniometrische gedaante te berekenen bestaat er geen eenvoudige manier. Voor het product en het quotiënt echter wel, en voor machten en machtswortels is het zelfs veel eenvoudiger om in goniometrische gedaante te werken.

d) ***Bewerkingen met complexe getallen in goniometrische vorm***

Het product

Zij gegeven twee complexe getallen $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$ en $z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$, dan geldt:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)\cdot r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right) \\ &= r_1 r_2\left(\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\right) + i\left(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2\right)\right) \\ &= r_1 r_2\left(\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right) \end{aligned}$$

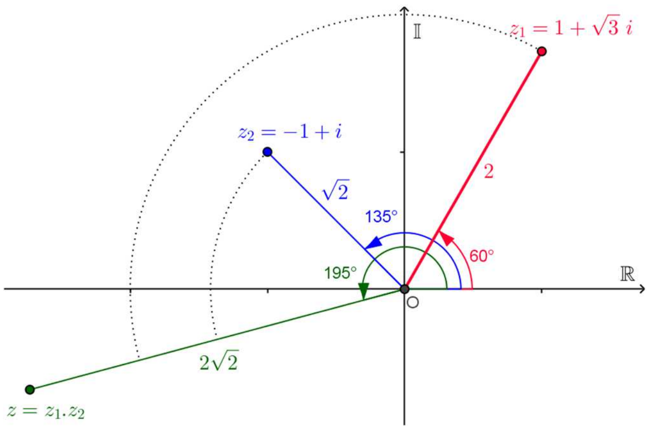
$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{mod}\left(z_1\cdot z_2\right) = \operatorname{mod}\left(z_1\right).\operatorname{mod}\left(z_2\right) \\ \arg\left(z_1\cdot z_2\right) = \arg\left(z_1\right) + \arg\left(z_2\right) \end{cases}$$

Bij het product van twee complexe getallen moet je dus hun moduli vermenigvuldigen en hun argumenten optellen.

Hiernaast zie je een illustratie in het vlak van Gauss, met $z_1 = 1+\sqrt{3}\,i$ en $z_2 = -1+i$.

Dan is $z = z_1.z_2 = \left(-1-\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)i$, en

- $r = r_1.r_2 = 2.\sqrt{2}$
- $\theta = \theta_1 + \theta_2 = 60° + 135° = 195°$



De omgekeerde

We berekenen de omgekeerde in goniometrische vorm. Stel $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$, dan is:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)} = \frac{\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)}{r\underbrace{\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)}_{=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1}} = \frac{1}{r}\left(\cos\left(-\theta\right) + i\sin\left(-\theta\right)\right).$$

In woorden: je neemt het omgekeerde van de modulus en het tegengestelde van het argument.

Het quotiënt

Zij gegeven twee complexe getallen $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$ en $z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$, dan geldt:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\cdot\frac{1}{z_2} = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)\cdot\frac{1}{r_2}\left(\cos\left(-\theta_2\right) + i\sin\left(-\theta_2\right)\right) = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\theta_1-\theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{mod}\left(z_1/z_2\right) = \operatorname{mod}\left(z_1\right)/\operatorname{mod}\left(z_2\right) \\ \arg\left(z_1/z_2\right) = \arg\left(z_1\right) - \arg\left(z_2\right) \end{cases}$$

Machten

Een onmiddellijk gevolg van de rekenregel voor een product is uiteraard, met $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$:

$$z^n = \left[r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\right]^n = r^n\left(\cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)\right).$$

Voor een complex getal met modulus $r = 1$ wordt dit de zogenaamde *formule van De Moivre*:

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \left(\cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)\right)$$

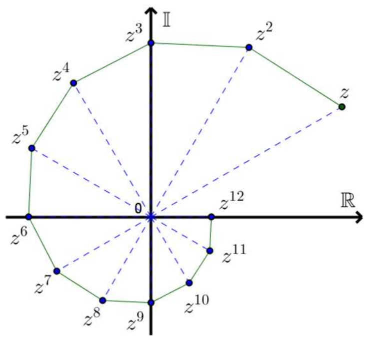
Voorbeeld: Gegeven is $z = \frac{4\sqrt{3}}{9} + \frac{4i}{9}$. Bewijs dat z^9 strikt imaginair is en dat z^{12} strikt reëel is.

We zetten eerst z om in goniometrische gedaante: $z = \frac{4\sqrt{3}}{9} + \frac{4i}{9} = \frac{8}{9}\left(\cos 30° + i \sin 30°\right)$.

Dan is $z^9 = z = \left(\frac{8}{9}\right)^9 \left(\underbrace{\cos 270°}_{=0} + i \underbrace{\sin 270°}_{=-1}\right) = -\left(\frac{8}{9}\right)^9 i$,

En $z^{12} = \left(\frac{8}{9}\right)^{12} \left(\underbrace{\cos 360°}_{=1} + i \underbrace{\sin 360°}_{=0}\right) = \left(\frac{8}{9}\right)^{12}$.

Stellen we al deze machten voor in het vlak van Gauss dan krijgen we een mooie spiraalvorm.



Machtswortels

We bewezen reeds dat elk complex getal $z \neq 0$ twee verschillende vierkantswortels heeft. We tonen nu aan dat dit eenvoudig uit te breiden is naar andere machtswortels.

Stelling: Elk complex getal $z \neq 0$, heeft n verschillende n-demachtswortels ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

Bewijs: Noem $z = r.\left(\cos\left(\theta + k.360°\right) + i \sin\left(\theta + k.360°\right)\right)$, en $w = r_w\left(\cos\theta_w + i\sin\theta_w\right)$.

$$w^n = z \quad \Leftrightarrow r_w^n\left(\cos\left(n\theta_w\right) + i\sin\left(n\theta_w\right)\right) = r.\left(\cos\left(\theta + k.360°\right) + i\sin\left(\theta + k.360°\right)\right)$$ (complexe macht)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_w^n = r \\ n\theta_w = \theta + k.360°, \, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$ (Twee complexe getallen zijn gelijk als hun moduli gelijk zijn en hun argumenten gelijke hoeken zijn (dus gelijk op een veelvoud van 360° na))

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_w = \sqrt[n]{r} \\ \theta_w = \frac{\theta + k.360°}{n}, \, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Voor de waarden $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ vind je verschillende argumenten, dus heeft elk complex getal inderdaad n verschillende n-demachtswortels (met allemaal dezelfde modulus). □

Voorbeeld: Bereken de 9 ᵉ machtswortels van $512\,i$. Zijn er strikt reële en strikt imaginaire wortels?

De goniometrische vorm is $512\,i = 512\left(\cos 90° + i\sin 90°\right)$, dus de 9 ᵉ machtswortels zijn:

$$w_k = \sqrt[9]{512}\left(\cos\left(\frac{90° + k.360°}{9}\right) + i\sin\left(\frac{90° + k.360°}{9}\right)\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(10° + k.40°\right) + i\sin\left(10° + k.40°\right)\right) \quad \text{, met } k \in \{0, 1, 2, ..., 8\}$$

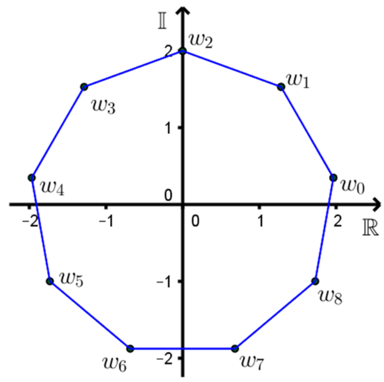
Dus $w_0 = 2\left(\cos\left(10°\right) + i\sin\left(10°\right)\right)$, $w_1 = 2\left(\cos\left(50°\right) + i\sin\left(50°\right)\right)$, ...

w_k is strikt reëel $\Leftrightarrow 10° + k.40° = m.180° \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4} + \frac{9m}{2}$. Maar met $k, m \in \mathbb{Z}$ is dit onmogelijk.

De wortel is strikt imaginair als $10° + k.40° = 90° + m.180° \Leftrightarrow k = 2 + \frac{9m}{2}$. De enige waarde van $m \in \mathbb{Z}$ die een waarde geeft voor $k \in \{0, 1, 2, ..., 8\}$ is $m = 0$, en dan is $k = 2$.

De strikt imaginaire wortel is $w_2 = 2\left(\cos\left(90°\right) + i\sin\left(90°\right)\right) = 2i$.

Al deze wortels kunnen we voorstellen in het complexe vlak. Ze vormen een regelmatige negenhoek.
Beschouwen we de punten als oplossingen van de vergelijking $z^9 = 512\,i$ dan is de voorstelling een grafische weergave van de oplossingenverzameling. We noemen dit het *Argand-diagram* dat bij die vergelijking hoort.



4) Complexe veeltermen

a) *Definities – notatie - eigenschappen*

De verzameling van de complexe veeltermen $\mathbb{C}[z]$ definiëren we op identiek dezelfde manier als de reële veeltermen $\mathbb{R}[x]$. We zullen ook zien dat zowat alle eigenschappen die we kennen van bij reële veeltermen ook gelden bij complexe veeltermen.
Een *complexe veelterm* in de veranderlijke z is een uitdrukking van de vorm:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \text{, met } a_n \in \mathbb{C}_0;\ a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}.$$

De complexe getallen $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ noemen we de *coëfficiënten* van die veelterm.
De *graad* van een veelterm is de hoogst voorkomende exponent n (waarvan de coëfficiënt $\neq 0$ is).

Notatie: ook complexe veeltermen worden meestal genoteerd met een hoofdletter en de variabele tussen haakjes. Bijvoorbeeld: $A(z) = 4z^2 - iz + 5 + 3i$. De graad van een veelterm noteren we dan als: $gr(A(z)) = 2$.

Getalwaarde - Het algoritme van Horner - Nulwaarde

De getalwaarde van een veelterm $P(z)$ voor een getal $c \in \mathbb{C}$ is de waarde die je bekomt door z te vervangen door c in de veelterm, en noteren we met $P(c)$.

Voorbeeld: Als $A(z) = 4z^2 - iz + 5 + 3i$ dan is $A(1-i) = 4(1-i)^2 - i(1-i) + 5 + 3i = 4 - 6i$.
Ook het algoritme van Horner werkt uiteraard nog steeds bij complexe veeltermen.

	4	-i	5+3i
1-i		4-4i	-1-9i
	4	4-5i	4-6i

Een nulwaarde van een complexe veelterm is een complex getal waarvoor de getalwaarde 0 is.
Voorbeeld: $2+3i$ is een nulwaarde van $P(z) = iz^2 + (2-i)z + 5 + i$, want $P(2+3i) = 0$.

b) ***De Euclidische deling - Deelbaarheid***

Bewerkingen – de Euclidische deling

Complexe veeltermen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of tot een macht verheffen is geen probleem. Je past gewoon de gekende rekenregels toe. De deling van complexe veeltermen doen we op identiek dezelfde manier als bij reële veeltermen.

We noemen $Q(z)$ en $R(z)$ respectievelijk het quotiënt en de rest bij Euclidische deling van het deeltal $A(z)$ door de deler $D(z)$ als en slechts als geldt:

$$A(z)=D(z).Q(z)+R(z)\text{, met } gr\big(R(z)\big)<gr\big(D(z)\big) \text{ of } R(z)=0$$

Veeltermen $Q(z)$ en $R(z)$ kunnen we vinden met het gekende *algoritme van de Euclidische deling*.

Voorbeeld: Bepaal quotiënt en rest bij deling van $A(z)=iz^2+(2-i)z+5+i$ door $D(z)=z-2-3i$.

iz^2	$+(2-i)z$	$+5+i$	z	$-2-3i$
iz^2	$+(3-2i)z$		iz	$-1+i$
	$(-1+i)z$	$+5+i$		
	$(-1+i)z$	$+5+i$		
		0		

Deelbaarheid

We noemen een veelterm $A(z)$ *deelbaar* door $D(z)$ als en slechts als de rest bij deling van $A(z)$ door $D(z)$ gelijk is aan 0. We noteren dit met $D(z)\,|\,A(z)$ *(|: is een deler van)*.

Zo geldt bijvoorbeeld $z-2-3i \mid iz^2+(2-i)z+5+i$ (een gevolg van de deling hierboven).

Ook de reststelling die we reeds bewezen bij reële veeltermen blijft gelden:

De reststelling: De rest bij deling van een veelterm $A(z)$ door een deler van de vorm $D(z)=z-a$ (met $a\in\mathbb{C}$) wordt gegeven door de functiewaarde $A(a)$.

Onmiddellijk gevolg: $(z-a)\,|\,P(z)\Leftrightarrow P(z)=0$.

Zoals vroeger kunnen we ook het algoritme van Horner blijven gebruiken om te ontbinden in factoren (als voorbeeld nemen we dezelfde deling als in het voorbeeld hierboven):

	i	$2-i$	$5+i$
$2+3i$		$-3+2i$	$-5-i$
	i	$-1+i$	0

Met andere woorden: $iz^2+(2-i)z+5+i=(z-2-3i)(iz-1+i)$

Enkele stellingen in verband met deelbaarheid

De belangrijkste stelling in verband met deelbaarheid heet niet voor niks *de hoofdstelling van de algebra*.

Stelling: Elke complexe veelterm van graad minstens één heeft een complexe nulwaarde.

Het bewijs van deze stelling valt buiten het bestek van deze cursus
(Voor meer info: zie http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/fundamental2.shtml)
We bewijzen wel een belangrijk gevolg van deze stelling:

Stelling: Elke complexe veelterm $P(z)$ van graad $n \in \mathbb{N}_0$ heeft n (al dan niet verschillende) nulwaarden.

Bewijs: We bewijzen deze stelling met behulp van inductie op de graad van de veelterm:

$n=1$: $P(z)=a_1 z + a_0$, met $a_1 \in \mathbb{C}_0$ en $a_0 \in \mathbb{C}$. $P(z)$ heeft één nulwaarde, namelijk $z=-\frac{a_0}{a_1}$.

Inductiestap: Stel nu dat de stelling geldt voor $n \in \mathbb{N}_0$, en beschouw een veelterm $P(z)$ van graad $n+1$. Wegens de hoofdstelling van de algebra heeft deze veelterm een nulwaarde. Noem deze nulwaarde n_0.

We kunnen de veelterm dan ontbinden als $P(z)=(z-z_0).Q(z)$, waarbij $Q(z)$ een veelterm is van graad n. Uit de inductiestap volgt dat $Q(z)$ n al dan niet verschillende nulwaarden $z_1, z_2, ..., z_n$ heeft. Dit zijn uiteraard ook allemaal nulwaarden van $P(z)$. We kunnen dus besluiten dat $P(z)$ inderdaad n al dan niet verschillende nulwaarden heeft. □

Gevolg: Voor elke complexe veelterm $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ geldt: $P(z)=a_n(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_n)$, met $z_1, z_2, ..., z_n$ de nulpunten van $P(z)$.

Voor veeltermen met reële coëfficiënten gelden enkele speciale eigenschappen:

Stelling: Als een reële veelterm $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ een complex getal $z \in \mathbb{C}$ als nulwaarde heeft, dan is ook de complex toegevoegde $\overline{z}$ een nulwaarde van $P(x)$.

Bewijs: Noem $P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, met dus $a_i \in \mathbb{R}$, en stel dat $z \in \mathbb{C}$ een nulwaarde is. Dan geldt:

$$P(z)=0 \Leftrightarrow \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i z^i} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i}\ \overline{z}^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{z}^i = 0 \Leftrightarrow P(\overline{z})=0 \quad □$$

Gevolg ①: Elke reële veelterm $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ kan binnen $\mathbb{R}[x]$ ontbonden worden in veeltermen van de eerste en de tweede graad.

Bewijs: In $C[x]$ kan hij ontbonden worden als $P(x)=a_n(x-z_1)(x-z_2)...(x-z_n)$. Stel nu dat $z_i = a+bi$ een nulpunt is, met $a,b \in \mathbb{R}$, dan is dus ook $\overline{z_i} = a-bi$ een nulpunt en kunnen we dat stuk van de ontbinding herschrijven als: $(x-a-bi)(x-a+bi)=(x^2-2ax+a^2+b^2) \in \mathbb{R}[x]$. Doen we dit voor alle complexe nulpunten die niet reëel zijn dan krijgen we inderdaad een ontbinding binnen $\mathbb{R}[x]$. □

Gevolg ②: Elke reële veelterm van oneven graad n heeft minstens één reëel nulpunt.

Bewijs: de veelterm heeft sowieso n al dan niet verschillende complexe nulpunten. Maar voor elk nulpunt dat niet reëel is, is ook de complex toegevoegde een nulpunt. De complexe nulpunten komen dus altijd in paren voor. Er moet bij een oneven graad dus altijd minstens één reëel nulpunt zijn. □

Zelfstudieproject:

1) Verwerk zelfstandig de hoofdstukjes 1a, 1b, 2a, 2b en 2c (of boek blz. 12-17: 1.1, 1.2.1-6)
   Maak oefeningen blz. 26-30: 1abimo 2ag 3f 4df 5ajn 7be 8ad
2) Verwerk zelfstandig de hoofdstukjes 2d en 2e (of boek blz. 18-24: 1.2.17, 1.4)
   Maak oefeningen blz. 26-30: 9abcg 10adjn 12d 13c 14 15 16 18 19 24

5) De Mandelbrot verzameling

Juliaverzamelingen

Gegeven is een complexe veelterm $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ en een startwaarde $z_0 \in \mathbb{C}$, dan kunnen we een rij functiewaarden als volgt definiëren: $(z_n) = z_0, z_1, z_2, \ldots$, met $z_1 = P(z_0)$, $z_2 = P(z_1)$, ... enz.
We noemen zo een complexe rij begrensd als en slechts als de reële rij gedefinieerd door de moduli van de complexe termen ook begrensd is. Dus (z_n) is begrensd $\Leftrightarrow (|z_n|)$ is begrensd.

Stel $P(z) = z^2 + c$, met $c \in \mathbb{C}$. Dan kunnen we voor alle complexe beginwaarden z_0 een verschillende complexe rij definiëren op de manier zoals hierboven. Is deze rij begrensd dan zeggen we dat het complexe getal z_0 behoort tot de Julia-verzameling die hoort bij c. Is de rij niet begrensd dan zeggen we dat z_0 er niet toe behoort.
Grafische voorstellingen van deze Julia-verzamelingen in het complexe vlak leveren ons prachtige figuren op, die we fractalen noemen (de Juliaverzameling is in het zwart getekend):

De Mandelbrotverzameling

De Mandelbrotverzameling is gedefinieerd als de verzameling punten $c \in \mathbb{C}$ waarbij de rij die hoort bij $P(z) = z^2 + c$ begrensd zou zijn voor de startwaarde $z_0 = 0$.