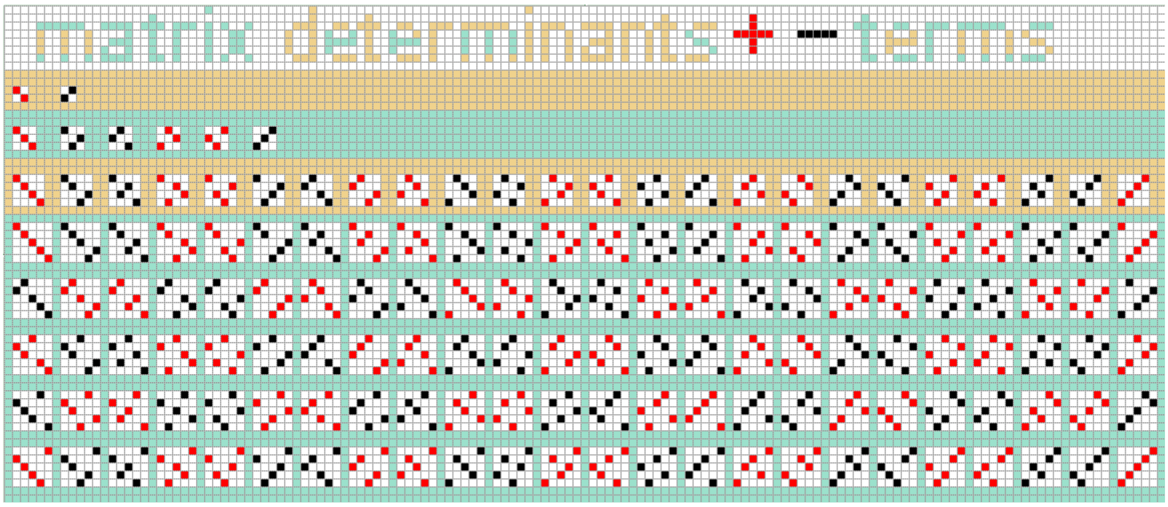
Determinanten



1) **Determinant**

In dit hoofdstuk willen aan elke vierkante matrix een getal associëren dat (onder andere) aangeeft of die matrix singulier is of niet.

a) ***Determinant van een 2x2-matrix***

Zij gegeven twee matrices $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ en $N = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ dan geldt voor hun product:

$$M \cdot N = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \left(ad-bc\right) . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left(ad-bc\right) . I \, .$$

We noemen $ad-bc$ de *determinant* van de matrix $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

We noteren dit symbolisch als $\boxed{\det M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc}$.

Uit het voorgaande blijkt dat (met $\det M \neq 0$): $M^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \cdot N = \dfrac{1}{\det M} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Stelling: $\forall M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \det\left(M_1 \cdot M_2\right) = \det M_1 \, . \det M_2$

Bewijs: Stel $M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ en $M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$, dan is $M_1 \cdot M_2 = \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}
&\det\left(M_1 \cdot M_2\right) \\
&= \left(a_1a_2 + b_1c_2\right).\left(c_1b_2 + d_1d_2\right) - \left(a_1b_2 + b_1d_2\right).\left(c_1a_2 + d_1c_2\right) \\
&= \cancel{a_1a_2c_1b_2} + a_1a_2d_1d_2 + b_1c_2c_1b_2 + \cancel{b_1c_2d_1d_2} - \cancel{a_1b_2c_1a_2} - a_1b_2d_1c_2 - b_1d_2c_1a_2 - \cancel{b_1d_2d_1c_2} \\
&= a_1d_1a_2d_2 + b_1c_1b_2c_2 - a_1d_1b_2c_2 - b_1c_1a_2d_2 = \left(a_1d_1 - b_1c_1\right)\left(a_2d_2 - b_2c_2\right) \\
&= \det M_1 . \det M_2 \quad \square
\end{aligned}$$

Stelling: $\forall M \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \ \det M \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad M$ is regulier.

Bewijs: "$\Rightarrow$" Stel $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, dan is $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, dus M is regulier.

"$\Leftarrow$" Noem M^{-1} de inverse matrix van M .

Dan geldt dat $\det M \, . \det M^{-1} = \det\left(M \cdot M^{-1}\right) = \det\left(I\right) = 1 \ \Rightarrow \ \det M \neq 0$. $\square$

Gevolg: $\forall M \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \ \det M = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M$ is singulier.

b) ***Minoren en cofactoren***

In de vorige paragraaf voerden we het begrip determinant in voor een 2×2-matrix. Voor een 1×1-matrix is dit uiteraard nog eenvoudiger: $\det[a]=|a|=a$.

Om het begrip determinant uit te breiden tot hogere dimensies hebben we twee andere belangrijke begrippen nodig:

- De *minor* m_{ij} van een element a_{ij} van een vierkante matrix A is de determinant van wat overblijft als we de i-de rij en de j-de kolom van dat element schrappen.
- De *cofactor* A_{ij} van een element a_{ij} van een vierkante matrix A is het product van de minor m_{ij} van dat element met het getal $(-1)^{i+j}$.

Voorbeeld: Is $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \\ -5 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, dan is $A_{23}=(-1)^{2+3}\,m_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 & \cancel{-1} \\ \cancel{5} & \cancel{-2} & \cancel{4} \\ -5 & -3 & \cancel{2} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}=-9$.

c) ***Determinant van een 3x3-matrix***

Stelling: De som van de producten van alle elementen uit een rij of een kolom van een matrix met hun cofactor is onafhankelijk van de gekozen rij of kolom.

Een algemeen bewijs van deze stelling valt buiten het bestek van deze cursus. We illustreren de stelling voor de tweede rij en de derde kolom van een 3×3-matrix.

Stel $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. We *ontwikkelen* de matrix naar zijn tweede rij en zijn derde kolom:

- Tweede rij: $a_{21}.A_{21}+\ a_{22}.A_{22}+\ a_{23}.A_{23}$

$$\begin{aligned}
&=-a_{21}.\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{22}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{23}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&=-a_{21}.(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})+a_{22}.(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-a_{23}.(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}) \\
&=-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{11}a_{22}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}
\end{aligned}$$

- Derde kolom: $a_{13}.A_{13}+\ a_{23}.A_{23}+\ a_{33}.A_{33}$

$$\begin{aligned}
&=a_{13}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}-a_{23}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}+a_{33}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&=a_{13}.(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})-a_{23}.(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})+a_{33}.(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) \\
&=a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{21}a_{33} \quad \square
\end{aligned}$$

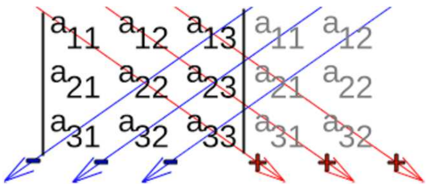
Je kan eenvoudig narekenen dat dit inderdaad ook voor de andere rijen en kolommen geldt.

Als $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, dan noemen we per definitie *de determinant van de matrix* A het getal

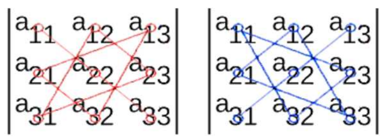
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Er zijn twee geheugensteuntjes om deze formule te onthouden:

De *regel van Sarrus*:
schrijf achter de determinant nogmaals de eerste en de tweede kolom. Evenwijdig aan de hoofddiagonaal vind je dan de producten met een positief teken (+) en evenwijdig met de nevendiagonaal die met een negatief teken (-).



De *regel van de driehoeken*:
Op de linkerfiguur staan de producten met een positief teken in rood aangeduid (+), op de rechterfiguur staan de producten met een negatief teken in blauw aangeduid (-).



Voorbeeld:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \\ -5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2.(-2).2 + 3.4.(-5) + (-1).5.(-3) - (-1).(-2).(-5) - 2.4.(-3) - 3.5.2 = -49$$

d) ***Determinanten van hogere orde***

Het getal dat we uitkomen door een matrix te *ontwikkelen* naar een van zijn rijen of kolommen noemen we de determinant van die matrix. De stelling die we boven illustreerden blijft wel degelijk gelden voor hogere ordes ook dus het maakt niet uit welke rij of kolom je neemt. We proberen dit nu in formulevorm te noteren (dit wordt ook wel eens de methode van Laplace genoemd):

Zij gegeven een matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, met $n \geq 2$ dan gelden de volgende formules ($\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$:

- $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik}$, dit noemen we de ontwikkeling naar de i-de rij.
- $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj}$, dit noemen we de ontwikkeling naar de j-de kolom.

In praktijk kies je bij het ontwikkelen voor die rij of kolom van de matrix met de meeste nullen.

Voorbeeld: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 3 & 7 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -2.(-111) - 3.65 = 27$, want $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -2-42-18-49 = -111$ en $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -10+6+168-90-16+7 = 65$.

2) Eigenschappen van determinanten

We bekijken nu enkele eigenschappen van determinanten van vierkante matrices. De algemene bewijzen vallen buiten het bewijs van deze cursus. Als oefening kunnen jullie deze eigenschappen wel illustreren voor lage ordes (2×2 of 3×3).

a) *De determinant van een getransponeerde matrix*

Eigenschap: De determinant van een vierkante matrix is gelijk aan de determinant van zijn getransponeerde matrix.

In symbolen: $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det A^T = \det A$

b) *Rijen of kolommen verwisselen*

Eigenschap: Als we twee rijen of kolommen van een vierkante matrix verwisselen, dan verandert de determinant van teken.

Gevolg: de determinant van een vierkante matrix met twee gelijke rijen of kolommen is nul.

Gevolg: de som van de producten van alle elementen uit een rij (of kolom) van een matrix met de cofactoren van een andere rij (of kolom) is nul.

Combineren we dit laatste gevolg met de definitie dan krijgen we de formules van Kronecker:

Zij gegeven een matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, met $n \geq 2$ dan gelden de volgende formules ($\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$:

- $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{jk} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \det A & (i = j) \end{cases}$
- $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}.A_{kj} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \det A & (i = j) \end{cases}$

c) *Lineaire combinaties van rijen en kolommen*

Eigenschap: Als in een matrix alle elementen van een rij of kolom vermenigvuldigd worden met eenzelfde getal dan wordt ook de determinant met dit getal vermenigvuldigd.

Gevolg: De determinant van een matrix waar twee rijen of kolommen evenredig zijn is nul.

Eigenschap: als we bij een rij of kolom van een vierkante matrix een veelvoud van een andere rij of kolom optellen, dan blijft de determinant onveranderd.

d) *Optelregel*

Als twee vierkante matrices op één rij (of kolom) na gelijk zijn dan is de som van hun determinanten gelijk aan de determinant van de matrix die je bekomt door de gelijke rijen (of kolommen) te behouden en de verschillende rijen (of kolommen) bij elkaar op te tellen.

e) ***Product van matrices***

Eigenschap: de determinant van het product van twee vierkante matrices is gelijk aan het product van de determinanten van deze matrices.

Deze eigenschap hadden we al nodig (en hebben we bewezen) bij het invoeren van de determinant van een 2×2-matrix.

f) ***Determinanten verlagen van orde***

Al deze voorgaande eigenschappen kan je gebruiken om determinanten makkelijker te berekenen door ervoor te zorgen dat je rijen of kolommen krijgt met veel nullen.

Voorbeeld 1: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & -2 \end{vmatrix} \underset{K_3-6K_1}{\overset{K_2+2K_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 13 & -25 \\ 3 & 13 & -20 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 13 & -25 \\ 13 & -20 \end{vmatrix} \overset{R_2-R_1}{=} \begin{vmatrix} 13 & -25 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 13.5 = 65$

Voorbeeld 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & -5 & 4 \\ -3 & -8 & 5 & -4 \\ 2 & 8 & -2 & 1 \end{vmatrix} \underset{R_4-2R_1}{\overset{\substack{R_2-R_1 \\ R_3+3R_1}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \overset{R_2-2R_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -(-7)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 56$$

Zeker bij dit tweede voorbeeld is duidelijk waarom deze werkwijze het *verlagen van de orde* heet.

3) De inverse matrix herbekeken

a) ***De adjunctmatrix***

De *adjunctmatrix* (of *geadjugeerde matrix*) van een vierkante matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is de getransponeerde van de $n\times n$-matrix die je krijgt door elk element van A te vervangen door zijn cofactor.

We noteren de adjunctmatrix met $\text{adj}\, A$. Er geldt dus: $\text{adj}\, A = \left[A_{ij} \right]^T = \left[A_{ji} \right]$.

Stelling: $A\cdot(\text{adj}\, A) = (\text{adj}\, A)\cdot A = (\det A).I$

Bewijs: Dit volgt onmiddellijk uit de formules van Kronecker:

$$A\cdot(\text{adj}\, A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix} = (\det A).I$$

Analoog bewijs je ook dat $(\text{adj}\, A)\cdot A = (\det A).I$ □

Gevolg: is $\det A \neq 0$, dan is A regulier en geldt $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A$.

De twee stellingen die we al bewezen hadden voor 2×2-matrices gelden dus ook algemeen:

Stelling:
- $\forall M \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det M \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad M$ is regulier.
- $\forall M \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det M = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M$ is singulier.

4) **Stelsels van Cramer**

a) ***Definitie***

Een stelsel van Cramer is een vierkant stelsel (evenveel vergelijkingen als onbekenden) waarvan de determinant van de coëfficiëntenmatrix niet gelijk is aan 0.

Met behulp van het voorgaande kunnen we voor stelsels met een reguliere coëfficiëntenmatrix schrijven dat:

$$A \cdot X = B \iff X = A^{-1} \cdot B \iff X = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} \cdot B$$

We bekijken dit eens specifieker voor een stelsel met $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ en $\det A \neq 0$:

$$X = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} \cdot B \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot b_1 - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot b_2 + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot b_3 \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot b_1 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot b_2 - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot b_3 \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot b_1 - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot b_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Noteren we met A_1 de matrix die je bekomt door de eerste kolom te vervangen door de kolom der constante termen, A_2 de matrix die je bekomt door de tweede kolom te vervangen door de kolom der constante termen en A_3 de matrix die je bekomt door de derde kolom te vervangen door de kolom der constante termen, dan wordt dit korter:

$x = \dfrac{\det A_1}{\det A}$, $y = \dfrac{\det A_2}{\det A}$, $z = \dfrac{\det A_3}{\det A}$.

Voorbeeld: Los op $\begin{cases} 2x-3y=13 \\ 4x+y=5 \end{cases}$, dan is $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 13 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{28}{14}=2$ en $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{-42}{14}=-3$.

b) ***Bespreken van stelsels met de methode van Cramer***

We hernemen het voorbeeld uit onze eerste bespreking: $\begin{cases} x+y+mz=1 \\ x+my+z=m \\ mx+y+z=m^2 \end{cases}$, met $m\in\mathbb{R}$.

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}=m+m+m-m^3-1-1=-m^3+3m-2\overset{\boxed{Horner}}{=}-(m-1)^2(m+2)$$

$$\det A_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m & 1 \\ m^2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=m+m^2+m^2-m^4-m-1=-m^4+2m^2-1\overset{\boxed{Horner}}{=}-(m-1)^2(m+1)^2$$

$$\det A_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & m^2 & 1 \end{vmatrix}=m+m^3+m-m^3-m^2-1=-m^2+2m-1\overset{\boxed{Horner}}{=}-(m-1)^2$$

$$\det A_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ m & 1 & m^2 \end{vmatrix}=m^3+m^2+1-m^2-m^2-m=m^3-m^2-m+1\overset{\boxed{Horner}}{=}(m-1)^2(m+1)$$

- In het geval $m\in\mathbb{R}\setminus\{1,-2\}$ geven de formules van Cramer ons de oplossing:

  $$x=\frac{-\cancel{(m-1)^2}(m+1)^2}{-\cancel{(m-1)^2}(m+2)},\ y=\frac{-\cancel{(m-1)^2}}{-\cancel{(m-1)^2}(m+2)},\ z=\frac{\cancel{(m-1)^2}(m+1)}{-\cancel{(m-1)^2}(m+2)}$$

  Dus dan is $V=\left\{\left(\dfrac{(m+1)^2}{m+2},\dfrac{1}{m+2},\dfrac{-m-1}{m+2}\right)\right\}$.

  De twee speciale waarden van m moeten besproken worden met de spilmethode:

- $m=1\Rightarrow A_b\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]\sim\ldots\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, dus $V=\{(1-k-l,k,l)\mid\mid k,l\in\mathbb{R}\}$.

- $m=-2\Rightarrow A_b\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]\sim\ldots\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, dus $V=\varnothing$.

Een opmerking over de rang van een matrix

In de cursus matrices & stelsels zagen we de volgende definitie: *de rang* van een matrix is het aantal niet-nulrijen van de rijgereduceerde echelonvorm van die matrix.

We leerden dat een $m\times n$-stelsel $A\cdot X=B$ een unieke oplossing had als en slechts als $rg\ A_b = rg\ A = n$. De methode van Cramer leert ons nu dat bij vierkante stelsels het volgende geldt:

Het $n\times n$ stelsel $A\cdot X=B$ heeft een unieke oplossing als en slechts als $\det A\neq 0$.

Combineren we deze twee stellingen dan krijgen we: $\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}: rg\ A=n \Leftrightarrow \det A\neq 0$.

De definitie van de rang van een matrix kunnen we nu dan ook anders formuleren als volgt:

Een $m\times n$-matrix heeft rang r als en slechts als elke vierkante deelmatrix van orde groter dan $r\times r$ determinant nul heeft en er een vierkante deelmatrix van orde $r\times r$ bestaat met determinant verschillend van nul.

c) ***Homogene 2x3 stelsels***

In de wiskunde worden we regelmatig geconfronteerd met homogene 2×3-stelsels. Dit zijn stelsels van de vorm: $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{cases}$.

Stel dat de rang van de coëfficientenmatrix 2 is, dus dat bijvoorbeeld $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$.

Schrijf dan het stelsel als stelsel van Cramer (met onbekenden x en y): $\begin{cases} a_1x+b_1y=-c_1z \\ a_2x+b_2y=-c_2z \end{cases}$.

Dit oplossen geeft $x=\dfrac{\begin{vmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\cdot z$ en $y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1z \\ a_2 & -c_2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=-\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\cdot z$.

Stel je hierbij dan $\lambda=\dfrac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$, dan wordt $x=\lambda\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $y=-\lambda.\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ en $z=\lambda\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

De oplossingenverzameling is dus: $V=\left\{\lambda\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, -\lambda.\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \lambda\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \parallel \lambda\in\mathbb{R}\right\}$.

Dit zal handig zijn in onder andere ruimtemeetkunde (op deze manier bereken je een richtingsvector van de snijlijn van twee vlakken).

d) ***Eliminatie***

Het elimineren van n onbekenden uit n+1 eerstegraadsvergelijkingen

We onderzoeken wanneer het 3×2-stelsel $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \\ a_3x+b_3y=c_3 \end{cases}$ oplossingen heeft.

We nemen hierbij aan dat de rang van de coëfficiëntenmatrix 2 is, dus dat bijvoorbeeld $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Je kan dit interpreteren als de vergelijking van drie concurrente rechten (drie rechten die door één punt gaan). De rang van de coëfficiëntenmatrix die 2 is houdt dan in dat de rechten niet allemaal evenwijdig zijn.

Met behulp van Cramer vinden we dat $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \overset{\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0}}{\Leftrightarrow} x=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \wedge y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$.

Opdat dit ook aan de derde vergelijking zou voldoen moet dus:

$$a_3\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}+b_3\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=c_3 \quad \Leftrightarrow a_3\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}-c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

Het gegeven stelsel zal dus een unieke oplossing hebben als en slechts als de determinant van de uitgebreide coëfficiëntenmatrix 0 is. We noemen dit de *coëxistentievoorwaarde* van dat stelsel. Omdat in deze voorwaarde geen sprake meer is van de onbekenden x en y zeggen we ook dat we deze onbekenden geëlimineerd hebben.

We noemen de determinant $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ de *eliminant* van het gegeven stelsel.

Wat we hier gedaan hebben voor 3×2 stelsels kan eenvoudig veralgemeend worden:

Een $(n+1)\times n$-stelsel heeft een unieke oplossing als en slechts als de determinant van de uitgebreide coëfficiëntenmatrix nul is, en de rang van de coëfficiëntenmatrix gelijk is aan n (dan geldt inderdaad zoals we vroeger zagen dat $rg\ A_b = rg\ A = n$).

Het elimineren van n onbekenden uit n homogene eerstegraadsvergelijkingen

Als voor een homogeen $n\times n$-stelsel van de vorm $A\cdot X = O$ geldt dat $\det A \neq 0$ dan heeft het stelsel één unieke oplossing, namelijk de nuloplossing (wegens de stelling van Cramer).

Een homogeen $n\times n$-stelsel van de vorm $A\cdot X = O$ zal dus nog andere oplossingen behalve de nuloplossing hebben als en slechts als $\det A = 0$ (dus als en slechts als de determinant van de coëfficiëntenmatrix gelijk is aan nul). We zagen inderdaad ook vroeger reeds dat een $m\times n$-stelsel onbepaald zal zijn als en slechts als $rg\ A = rg\ A_b < n$.

Toepassing: Wanneer zijn de punten $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ en $P_3(x_3, y_3)$ collineair?

Dit zal het geval zijn als en slechts als er een rechte $r \leftrightarrow ax+by+c=0$ (met $a,b,c\in\mathbb{R}$ en niet alle gelijk aan nul) bestaat waar de drie punten P_1, P_2 en P_3 op liggen, dus als en slechts als:

$$\begin{cases} ax_1+by_1+c=0 \\ ax_2+by_2+c=0 \\ ax_3+by_3+c=0 \end{cases} \text{ heeft een oplossing verschillend van de nuloplossing } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$