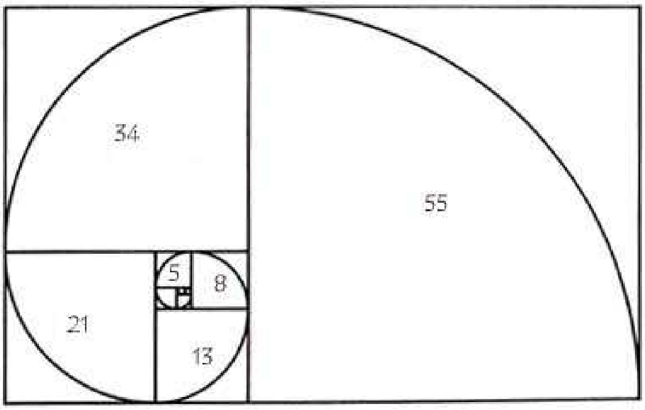
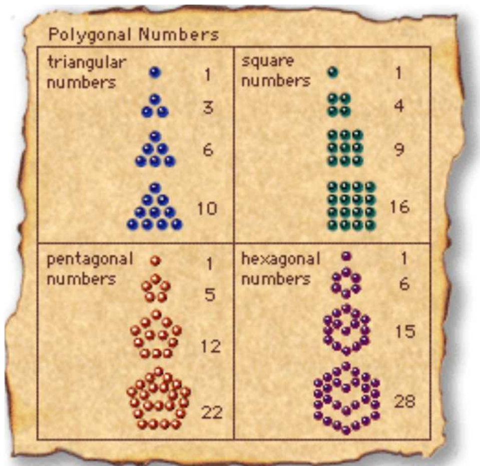
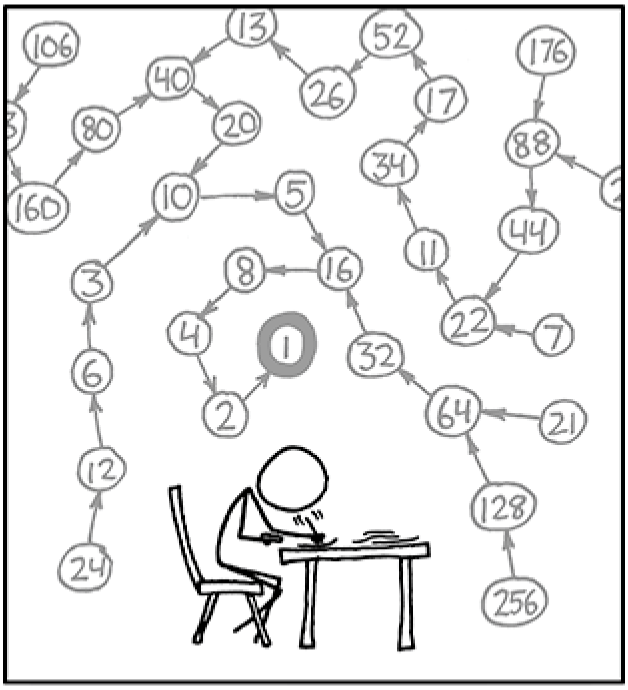
# *Rijen*






THE COLLATZ CONJECTURE STATES THAT IF YOU PICK A NUMBER, AND IF IT'S EVEN DIVIDE IT BY TWO AND IF IT'S ODD MULTIPLY IT BY THREE AND ADD ONE, AND YOU REPEAT THIS PROCEDURE LONG ENOUGH, EVENTUALLY YOUR FRIENDS WILL STOP CALLING TO SEE IF YOU WANT TO HANG OUT.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

# 1) Definitie, rekenkundige en meetkundige rijen

## a) *Definitie en notatie*

Een *rij* is een afbeelding van $\mathbb{N}_0$ in $\mathbb{R}$. We noteren een rij als $(u_n): u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$.

Hierbij zijn $u_1, u_2, u_3, ...$ de *termen* van die rij, en $u_n$ is de algemene term van de rij (de $n$-de term).

De *onderindex* bij een term geeft zijn *rangnummer* aan.

**Voorbeeld:** De rij der kwadraten is $(k_n): 1, 4, 9, ..., n^2, ...$. Hier is bijvoorbeeld $k_{15} = 225$.

## b) *Bepalen van een rij*

Een rij noemen we volledig bepaald als we elke term ervan kunnen berekenen. Dit kan op verschillende manieren.

*Expliciet voorschrift*

Bij sommige rijen kan je een formule $f$ bepalen voor de algemene term: $u_n = f(n)$. Deze formule noemen we het *expliciet voorschrift*. Je kan elke term direct berekenen.

**Voorbeeld:** De rij bepaald door het voorschrift $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ is $(u_n): 1, 5, 14, 30, 55, ...$.

*Recursief voorschrift*

Soms kan je bij een rij ook een formule vinden die toelaat een term te berekenen met behulp van één of meer voorgaande termen. Om de rij dan volledig vast te leggen moet je ook de waarde van de eerste term(en) kennen. De bijhorende formule noemen we de *recursieformule*.

**Voorbeeld 1:** De rij bepaald door $u_1 = 1$; $u_{n+1} = u_n + (n+1)^2$ is $(u_n): 1, 5, 14, 30, ...$.

**Voorbeeld 2:** De rij $(a_n)$ is gedefinieerd: $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_{n+2} = 2.a_n + a_{n+1} - n$.

Geef de eerste 7 termen van deze rij.

Stel $n = 1 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 2.a_1 + a_2 - 1 = 2.2 + 3 - 1 = 6$

$n = 2 \quad \Rightarrow \quad a_4 = 2.a_2 + a_3 - 2 = 2.3 + 6 - 2 = 10$

$n = 3 \quad \Rightarrow \quad a_5 = 2.a_3 + a_4 - 3 = 2.6 + 10 - 3 = 19$

$n = 4 \quad \Rightarrow \quad a_6 = 2.a_4 + a_5 - 4 = 2.10 + 19 - 4 = 35$

$n = 5 \quad \Rightarrow \quad a_7 = 2.a_5 + a_6 - 5 = 2.19 + 35 - 5 = 68$

*Belangrijke opmerking*

Bij sommige rijen is het niet mogelijk een expliciet of een recursief functievoorschrift te vinden. Een eenvoudig voorbeeld is de rij van de priemgetallen $(p_n): 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...$.

## c) *Kortere notatie voor som en product*

Voor een som gebruiken we volgende notatie: $u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$ ($\Sigma$ is de *Griekse Sigma*).

Voor een product gebruiken we volgende notatie: $u_1.u_2.....u_n = \prod_{i=1}^{n} u_i$ ($\Pi$ is de *Griekse Pi*).

Deze notaties zijn ingevoerd om lange sommen (en producten) op een kortere manier te noteren. Het symbool $\sum_{i=n_1}^{n_2}...$ spreek je uit als: *'de som voor $i$ gaande van $n_1$ tot $n_2$ van …'*. Het aantal termen in deze som is $n_2 - n_1 + 1$ (bovengrens – ondergrens + 1). Analoog voor het product.

**Voorbeeld:** $\sum_{i=1}^{100}(2i-1)$ is een kortere notatie voor $1+3+5+7+9+11+...+199$ $(=10000)$.

Een ander belangrijk symbool is het faculteitssymbool '!'. Dit wordt gedefinieerd als $n! = \prod_{i=1}^{n} i$. Zo is bijvoorbeeld $6! = 1.2.3.4.5.6 = 720$. Dit symbool gaan we vaak gebruiken bij kansrekenen.

## d) ***Rekenkundige rijen***

*Definitie*

Een *rekenkundige rij* is een rij waarbij elke term gelijk is aan de som van de vorige term met een constant getal $v$, dat we het *verschil* van die rij noemen.

| |
|---|
| Recursieve definitie: $(u_n)$ is een R.R. met verschil $v \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : u_{n+1} = u_n + v$ |

We kunnen een rekenkundige rij ook makkelijk expliciet definiëren, als we opmerken dat:

$u_2 = u_1 + v\,;\, u_3 = u_2 + v = u_1 + 2v\,;\, u_4 = u_3 + v = u_1 + 3v\,;\, ...\, u_n = u_{n-1} + v = u_1 + (n-1)v$.

| |
|---|
| Expliciete definitie: $(u_n)$ is een R.R. met verschil $v \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : u_n = u_1 + (n-1)v$ |

**Voorbeeld:** Bepaal de duizendste term in de rij $(u_n): -6327, -6320, -6313, -6306, -6299, ...$.

Dit is een rekenkundige rij met eerste term $u_1 = -6327$ en verschil $v = 7$.

De duizendste term is dus: $u_{1000} = u_1 + 999v = -6327 + 999.7 = 666$.

| |
|---|
| Veralgemening: $(u_n)$ is een R.R. met verschil $v \Leftrightarrow \forall k, l \in \mathbb{N}_0 : u_k = u_l + (k-l)v$ |

**Voorbeeld:** Bepaal het verschil bij R.R. $(u_n)$, als je weet dat $u_{100} = -200$ en $u_{150} = 1200$.

De formule geeft ons $u_{150} = u_{100} + 50v \Leftrightarrow 1200 = -200 + 50v \Leftrightarrow v = \dfrac{1200+200}{50} = 28$.

Deze formule laat toe rechtstreekser te werken (je hoeft niet altijd de eerste term te bepalen).

*Eigenschappen*

In verband met rekenkundige rijen kennen we twee heel belangrijke eigenschappen:

| |
|---|
| Eigenschap ①: $a, b, c$ zijn drie opeenvolgende termen in een R.R. als en slechts als $b = \dfrac{a+c}{2}$. |

Opmerking: $b = \dfrac{a+c}{2}$ noemen we het *rekenkundig gemiddelde* van $a$ en $c$.

| |
|---|
| Eigenschap ②: voor de som van de eerste $n$ termen van een R.R. geldt: $s_n = n.\dfrac{u_1 + u_n}{2}$ . |

## e) ***Meetkundige rijen***

*Definitie*

Een *meetkundige rij* is een rij waarbij elke term gelijk is aan het product van de vorige term met een constant getal $q$ , dat we het *quotiënt* van die rij noemen (soms wordt hiervoor ook *reden* gebruikt).

| |
|---|
| Recursieve definitie: $(u_n)$ is een M.R. met quotiënt $q \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : u_{n+1} = u_n.q$ |

We kunnen een meetkundige rij ook makkelijk expliciet definiëren, als we opmerken dat:

$u_2 = u_1.q$ ; $u_3 = u_2.q = u_1.q^2$ ; $u_4 = u_3.q = u_1.q^3$ ; ... $u_n = u_{n-1}.q = u_1.q^{n-1}$ .

| |
|---|
| Expliciete definitie: $(u_n)$ is een M.R. met quotiënt $q \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : u_n = u_1.q^{n-1}$ |

**Voorbeeld:** Bepaal de twintigste term in de rij $(u_n): -1, 2, -4, 8, -16, \ldots$ .

Dit is een meetkundige rij met eerste term $u_1 = -1$ en quotiënt $q = -2$ .

De twintigste term is dus: $u_{20} = u_1.q^{19} = -1.(-2)^{19} = 524288$ .

| |
|---|
| Veralgemening: $(u_n)$ is een M.R. met quotiënt $q \Leftrightarrow \forall k,l \in \mathbb{N}_0 : u_k = u_l.q^{k-l}$ |

*Eigenschappen*

In verband met meetkundige rijen zijn er twee heel belangrijke eigenschappen:

| |
|---|
| Eigenschap ①: $a,b,c$ zijn drie opeenvolgende termen in een M.R. als en slechts als $b^2 = ac$ . |

Opmerking: voor positieve getallen noemen we $b = \sqrt{ac}$ het *meetkundige gemiddelde* van $a$ en $c$ .

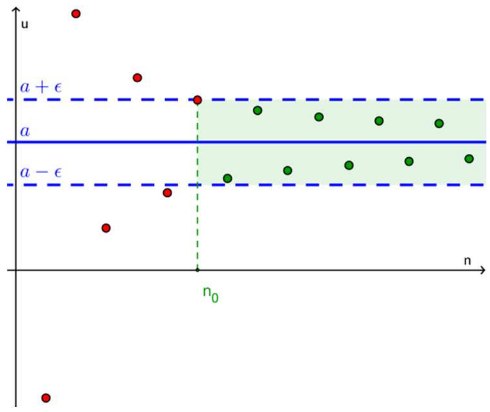
| |
|---|
| Eigenschap ②: voor de som van de eerste $n$ termen van een M.R. geldt: $s_n = u_1.\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ . |

# 2) De limiet van een rij

## a) *Eindige limieten*

*Definitie*

Een rij waarvan de waarden als $n$ zeer groot wordt een vast getal naderen, noemen we *convergent*. Dit getal noemen we *de limiet* van die rij, en we zeggen ook dat de rij *convergeert naar* dat getal.




De definitie van een *convergente rij* $(u_n)$ *met limiet* $a$ is:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$$

In woorden betekent dit het volgende: hoe klein je ook een positieve waarde $\varepsilon$ neemt, er bestaat altijd een rangnummer $n_0$ vanaf waar alle termen dichter bij $a$ zullen liggen dan $\varepsilon$.

Op de figuur zie je dit grafisch geïllustreerd.

**Voorbeeld:** Toon met behulp van de definitie aan dat $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{n+1} = 3$.

We moeten dus bewijzen dat $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{3n}{n+1} - 3\right| < \varepsilon$

Er geldt: $\left|\frac{3n}{n+1} - 3\right| = \left|\frac{3n-3n-3}{n+1}\right| = \left|\frac{-3}{n+1}\right| = \frac{3}{n+1}$,

dus: $\left|\frac{3n}{n+1} - 3\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow 3 < \varepsilon n + \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{3-\varepsilon}{\varepsilon}$.

Kiezen we dus $n_0 \in \mathbb{N}_0$ zodat $n_0 > \frac{3-\varepsilon}{\varepsilon}$, dan volgt onmiddellijk wat we moesten bewijzen!

## b) *Oneindige limieten*

Veel rijen hebben geen eindige limiet. Soms worden rijen willekeurig groot (of klein). We spreken dan van oneindige limieten.

*Definitie*

De limiet van een rij is $+\infty$: $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow u_n > r$.

In woorden betekent dit: hoe groot je een reëel getal $r$ ook neemt, er zal altijd een rangnummer $n_0$ bestaan vanaf waar alle termen groter zijn dan $r$.

De limiet van een rij is $-\infty$: $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow u_n < r$.

In woorden betekent dit: hoe klein je een reëel getal $r$ ook neemt, er zal altijd een rangnummer $n_0$ bestaan vanaf waar alle termen kleiner zijn dan $r$.

**Voorbeeld:** Toon met behulp van de definitie aan dat $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3} = +\infty$.

We moeten dus bewijzen dat $\forall r \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow u_n > r$.

Als $r \leq 0$ is het gestelde waar voor alle $n_0 \in \mathbb{N}$ want alle termen zijn positief. Stel dus dat $r \in \mathbb{R}_0^+$.

Er geldt: $u_n > r \Leftrightarrow \frac{2^n}{3} > r \Leftrightarrow 2^n > 3r \Leftrightarrow n > {}^2\log 3r$,

Nemen we dus een $n_0 > {}^2\log 3r$ dan volgt het gestelde onmiddellijk.

## c) *Uniciteit van limieten*

Niet elke rij heeft een limiet. Zo kan een rij bijvoorbeeld alterneren (per term wisselen van teken), terwijl de absolute waarde van de termen toeneemt. Dit type rijen heeft geen limiet.

**Voorbeeld:** De rij $(u_n) = 0, 2, -4, 6, -8, 10, \ldots$ met voorschrift $u_n = 2(-1)^n (n-1)$ heeft geen limiet.

| |
|---|
| *Stelling:* Een rij kan hoogstens één limiet hebben. |

*Bewijs:* Uit het voorgaande voorbeeld blijkt dat een rij alvast geen limiet kan hebben.
Stel nu dat de rij wel een limiet heeft, bijvoorbeeld $a_1 \in \mathbb{R}$, en daarnaast nog een limiet $a_2 \in \mathbb{R}$.

Dan geldt: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a_1 \Leftrightarrow \forall \frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{R}_0^+ : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow |u_n - a_1| < \frac{\varepsilon}{2}$

en ook: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a_2 \Leftrightarrow \forall \frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{R}_0^+ : \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_2 \Rightarrow |u_n - a_2| < \frac{\varepsilon}{2}$

Nemen we nu $n_0 = \max(n_1, n_2)$, dan geldt:

$$n > n_0 \quad \Rightarrow n > n_1 \ \wedge \ n > n_2 \ \Rightarrow |u_n - a_1| < \frac{\varepsilon}{2} \ \wedge \ |u_n - a_2| < \frac{\varepsilon}{2} \ \Rightarrow |u_n - a_1| + |u_n - a_2| < \varepsilon$$

Dus: $|a_2 - a_1| = |a_2 - u_n + u_n - a_1| \leq |a_2 - u_n| + |u_n - a_1| = |u_n - a_1| + |u_n - a_2| < \varepsilon$

Dit geldt voor alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$, dus moet $|a_2 - a_1| = 0$, waaruit onmiddellijk volgt dat $a_1 = a_2$. □

Een rij heet *begrensd* als en slechts als er een $M \in \mathbb{R}^+$ bestaat zodat $\forall n \in \mathbb{N}_0 : |u_n| < M$.

| |
|---|
| *Stelling:* Een convergente rij is begrensd. |

*Bewijs:* De rij is convergent dus heeft ze een unieke limiet $a \in \mathbb{R}$. Neem een $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$, dan weten we wegens de definitie dat er een $n_0 \in \mathbb{N}_0$ bestaat zodat $\forall n > n_0 : |u_n - a| < \varepsilon$. Hieruit volgt dat $\forall n > n_0 : |u_n| = |u_n - a + a| \leq |u_n - a| + |a| < \varepsilon + |a|$.

Definieer dan $M = \max\left(|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_{n_0}|, \varepsilon + |a|\right)$, dan geldt $\forall n \in \mathbb{N}_0 : |u_n| < M$. □

## d) *Enkele standaardlimieten*

### *De constante rij*

| |
|---|
| *Stelling:* Voor de constante rij $(u_n) = c$, met $c \in \mathbb{R}$ geldt $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$ |

Bewijs: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ : \forall n \in \mathbb{N} : |u_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, waarmee het gestelde direct is bewezen. □

### *De machtrijen*

**Stelling:** Voor de rijen $(u_n) = n^k$, met $k \in \mathbb{N}_0$, geldt $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Bewijs: We nemen een willekeurig groot getal $r \in \mathbb{R}^+$. Dan geldt $n^k > r \Leftrightarrow n > \sqrt[k]{r}$.

Nemen we dus een $n_0 > \sqrt[k]{r}$, dan geldt $n > n_0 \Rightarrow u_n = n^k > r$. □

**Stelling:** Voor de rijen $(u_n) = \dfrac{1}{n^k}$, met $k \in \mathbb{N}_0$, geldt $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

*Bewijs:* We nemen een willekeurig klein getal $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$. Dan geldt $\dfrac{1}{n^k} < \varepsilon \Leftrightarrow n^k > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \sqrt[k]{\dfrac{1}{\varepsilon}}$.

Nemen we dus een $n_0 > \sqrt[k]{\dfrac{1}{\varepsilon}}$, dan geldt $n > n_0 \Rightarrow |u_n - 0| = \dfrac{1}{n^k} < \varepsilon$. □

## e) ***Rekenregels voor limieten***

### *Rekenregels voor eindige limieten*

**Stelling:** Als $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \in \mathbb{R}$ en $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b \in \mathbb{R}$, dan geldt:

① $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a + b$

② $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a - b$

③ $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n.v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n . \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a.b$

④ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{u_n}\right) = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n} = \dfrac{1}{a}$ (op voorwaarde dat $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \neq 0$)

⑤ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n} = \dfrac{a}{b}$ (op voorwaarde dat $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b \neq 0$)

*Bewijs:* Uit het gegeven volgt:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}_0^+ : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon_1$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_0^+ : \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_2 \Rightarrow |v_n - b| < \varepsilon_2$$

Het zal er hier vooral op aankomen om $\varepsilon_1$ en $\varepsilon_2$ zo te kiezen dat we een elegant bewijs bekomen.

① Kies een $n_1 \in \mathbb{N}$ zodat $n > n_1 \Rightarrow |u_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ en een $n_2 \in \mathbb{N}$ zodat $n > n_2 \Rightarrow |v_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Nemen we dan $n_0 = \max(n_1, n_2)$, dan geldt:

$$n > n_0 \Rightarrow |(u_n + v_n) - (a + b)| = |(u_n - a) + (v_n - b)| \leq |(u_n - a)| + |(v_n - b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \ \square$$

② Kies een $n_1 \in \mathbb{N}$ zodat $n > n_1 \Rightarrow |u_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ en een $n_2 \in \mathbb{N}$ zodat $n > n_2 \Rightarrow |v_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Nemen we dan $n_0 = \max(n_1, n_2)$, dan geldt:

$$n > n_0 \Rightarrow |(u_n - v_n) - (a - b)| = |(u_n - a) - (v_n - b)| \leq |(u_n - a)| + |(v_n - b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \ \square$$

③ De rij $(v_n)$ is convergent en dus begrensd. Er is dus een $M \in \mathbb{R}^+$ zodat $\forall n \in \mathbb{N}_0 : |v_n| < M$ .

Kies een $n_1 \in \mathbb{N}$ zodat $n > n_1 \Rightarrow |u_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ en een $n_2 \in \mathbb{N}$ zodat $n > n_2 \Rightarrow |v_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2|a|}$.

Nemen we dan $n_0 = \max(n_1, n_2)$, dan geldt:

$$\begin{aligned} n > n_0 \Rightarrow |u_n.v_n - a.b| &= |u_n.v_n - a.v_n + a.v_n - a.b| \\ &\le |u_n.v_n - a.v_n| + |a.v_n - a.b| \\ &= |v_n|.|u_n - a| + |a|.|v_n - b| \\ &< M.\frac{\varepsilon}{2M} + |a|.\frac{\varepsilon}{2|a|} = \varepsilon \quad \square \end{aligned}$$

(in het geval dat $a = 0$ neem je $|u_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ en dan is $|u_n v_n| = |u_n||v_n| < \dfrac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$ )

④ Kies een $n_1 \in \mathbb{N}$ zodat $n > n_1 \Rightarrow |a - u_n| < \dfrac{|a|}{2} \Leftrightarrow |u_n| > \dfrac{|a|}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{|u_n|} < \dfrac{2}{|a|}$,

en een $n_1' \in \mathbb{N}$ zodat $n > n_1' \Rightarrow |a - u_n| < \varepsilon.\dfrac{|a|^2}{2}$ .

Nemen we dan $n_0 = \max(n_1, n_1')$, dan geldt:

$$n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - u_n}{a.u_n}\right| < \frac{\varepsilon.\frac{|a|^2}{2}}{|a.u_n|} < \frac{\varepsilon.|a|}{2} \cdot \frac{1}{|u_n|} < \frac{\varepsilon.|a|}{2} \cdot \frac{2}{|a|} = \varepsilon . \ \square$$

⑤ Dit volgt uit het voorgaande, want $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n.\dfrac{1}{v_n}\right) \overset{\boxed{3}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n . \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{v_n} \overset{\boxed{4}}{=} a.\dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{b}$ . $\square$

## *Rekenregels voor oneindige limieten*

*<u>Stelling:</u>* Als $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ , dan geldt:

Symbolische notatie:

① $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$ $\qquad$ $+\infty + \infty = +\infty$

② $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n.v_n) = +\infty$ $\qquad$ $(+\infty).(+\infty) = +\infty$

③ $\forall x \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to+\infty}(x + u_n) = +\infty$ $\qquad$ $x + \infty = +\infty$

④ $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : \lim\limits_{n\to+\infty}(x.u_n) = +\infty$ $\qquad$ $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : x.(+\infty) = +\infty$

⑤ $\forall x \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x}{u_n}\right) = 0$ $\qquad$ $\forall x \in \mathbb{R} : \dfrac{x}{+\infty} = 0$

⑥ $\forall k \in \mathbb{N}_0 : \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[k]{u_n}\right) = +\infty$ $\qquad$ $\forall k \in \mathbb{N}_0 : \sqrt[k]{+\infty} = +\infty$

en $\lim\limits_{n\to+\infty}\left((u_n)^k\right) = +\infty$ $\qquad$ en $(+\infty)^k = +\infty$

*<u>Bewijs:</u>* Uit het gegeven volgt:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall r_1 \in \mathbb{R} : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow u_n > r_1$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \Leftrightarrow \forall r_2 \in \mathbb{R} : \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_2 \Rightarrow v_n > r_2$$

Het zal er hier dus vooral op aan komen de $r_1$ en $r_2$ zo te kiezen dat we een elegant bewijs krijgen.

① Kies een $n_1 \in \mathbb{N}$ zodat $n > n_1 \Rightarrow u_n > \frac{r}{2}$ en een $n_2 \in \mathbb{N}$ zodat $n > n_2 \Rightarrow v_n > \frac{r}{2}$.

Nemen we dan $n_0 = \max(n_1, n_2)$, dan geldt: $n > n_0 \Rightarrow u_n + v_n > \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. □

② Kies een $n_1 \in \mathbb{N}$ zodat $n > n_1 \Rightarrow u_n > \sqrt{r}$ en een $n_2 \in \mathbb{N}$ zodat $n > n_2 \Rightarrow v_n > \sqrt{r}$.

Nemen we dan $n_0 = \max(n_1, n_2)$, dan geldt: $n > n_0 \Rightarrow u_n . v_n > \sqrt{r}.\sqrt{r} = r$

(merk op dat we hier $r > 0$ eisen, maar dat vormt geen beperking). □

③ Kies een $n_0 \in \mathbb{N}$ zodat $n > n_0 \Rightarrow u_n > r - x$, dan geldt $n > n_0 \Rightarrow x + u_n > x + r - x = r$. □

④ Kies een $n_0 \in \mathbb{N}$ zodat $n > n_0 \Rightarrow u_n > \frac{r}{x}$, dan geldt $n > n_0 \Rightarrow x.u_n > x.\frac{r}{x} = r$. □

⑤ Kies een willekeurige $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$ en een $n_0 \in \mathbb{N}$ zodat $n > n_0 \Rightarrow u_n > \frac{x}{\varepsilon}$.

Daaruit volgt onmiddellijk dat $n > n_0 \Rightarrow u_n > \frac{x}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} < \frac{\varepsilon}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{u_n} < \varepsilon$. □

⑥ Kies een $n_0 \in \mathbb{N}$ zodat $n > n_0 \Rightarrow u_n > r^k$, dan geldt $n > n_0 \Rightarrow \sqrt[k]{u_n} > r$. □

Kies een $n_0 \in \mathbb{N}$ zodat $n > n_0 \Rightarrow u_n > \sqrt[k]{r}$, dan geldt $n > n_0 \Rightarrow (u_n)^k > r$. □

Volledig analoog kan je ook de volgende uitdrukkingen bewijzen:

- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $(-\infty).(+\infty) = -\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R} : x + (-\infty) = -\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : x.(-\infty) = -\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x}{-\infty} = 0$
- $\forall k \in \mathbb{N}_0 : \left(\sqrt[k]{-\infty}\right) = -\infty$ ($k$ oneven)
- $(-\infty).(-\infty) = +\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}_0^- : x.(+\infty) = -\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}_0^- : x.(-\infty) = +\infty$
- $\forall k \in \mathbb{N}_0 : (-\infty)^k = -\infty$ ($k$ oneven)
- $\forall k \in \mathbb{N}_0 : (-\infty)^k = +\infty$ ($k$ even)

Al zijn sommige limieten per definitie onbepaald, toch bestaan er soms eenvoudige rekentechnieken om de onbepaaldheden op te heffen.

**Voorbeeld 1:** Bereken $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(4n^3 - 3n^2 + 5n + 6\right)$ (*)

Enerzijds: * $= \lim\limits_{n \to +\infty} 4n^3 - \lim\limits_{n \to +\infty} 3n^2 + \lim\limits_{n \to +\infty} 5n + \lim\limits_{n \to +\infty} 6 = +\infty - \infty + \infty + 6$, wat onbepaald is. Maar:

$$* = \lim_{n \to +\infty} \left(4n^3 . \left(1 - \frac{3}{4n} + \frac{5}{4n^2} + \frac{3}{2n^3}\right)\right) = \lim_{n \to +\infty} 4n^3 . \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{4n} + \frac{5}{4n^2} + \frac{3}{2n^3}\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} 4n^3 . \left(\lim_{n \to +\infty} 1 - \lim_{n \to +\infty} \frac{3}{4n} + \lim_{n \to +\infty} \frac{5}{4n^2} + \lim_{n \to +\infty} \frac{3}{2n^3}\right) = +\infty.(1 - 0 + 0 + 0) = +\infty$$

Op deze laatste manier is de onbepaaldheid opgeheven.

**Algemeen:** Bij het berekenen van de limiet voor een veeltermuitdrukking, kijk je enkel naar de hoogstegraadsterm *(zie ook: asymptotisch gedrag in de cursus elementaire functies)*.

**Voorbeeld 2:** Bereken $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2-5n+1}{n^2-2}$ (*)

Enerzijds: * $=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3n^2-5n+1\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2-2\right)}=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}3n^2-\lim\limits_{n\to+\infty}5n+\lim\limits_{n\to+\infty}1}{\lim\limits_{n\to+\infty}n^2-\lim\limits_{n\to+\infty}2}=\dfrac{+\infty-\infty+1}{+\infty-2}$ : onbepaald. Maar:

* $=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3n^2-5n+1\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2-2\right)}=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3n^2\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\right)}$ $(zie\ vb\,1)$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}3=3$

**Algemeen:** Bij het berekenen van de limiet voor een rationale uitdrukking, kijk je enkel naar de hoogstegraadstermen in teller en noemer.

**Voorbeeld 3:** Bereken $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{4n^2+n}-2n$ (*)

* $=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{4n^2+n}-2n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{4n^2+n}-\lim\limits_{n\to+\infty}2n=\sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4n^2+n\right)}-\lim\limits_{n\to+\infty}2n=+\infty-\infty$ , maar:

* $=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right).\left(\sqrt{4n^2+n}+2n\right)}{\sqrt{4n^2+n}+2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cancel{n}}{2\cancel{n}.\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{4n}}+1\right)}=\dfrac{1}{2.\left(\sqrt{1+0}+1\right)}=\dfrac{1}{4}.$

**Algemeen:** Onbepaaldheden van de vorm $+\infty-\infty$ kan je soms ook wegwerken door te vermenigvuldigen met de toegevoegde vorm (vooral handig bij wortelvormen).

## 3) Enkele eenvoudige convergentiestellingen

### a) *Convergentie bij meetkundige rijen*

Het is duidelijk dat rekenkundige rijen divergeren van zodra het verschil van de rij verschillend van nul is. Is het verschil $v > 0$ dan zal $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ en is $v < 0$ dan zal $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Om de convergentie van meetkundige rijen te bespreken hebben we enkele stellingen nodig.

*De ongelijkheid van Bernouilli*

*Stelling:* $\forall x \in \left]-1,+\infty\right[, \forall n \in \mathbb{N}_0 : (1+x)^n \geq 1+nx$

*Bewijs:* We bewijzen de stelling met behulp van inductie.

De stelling klopt voor $n=1$ want $(1+x)^1 = 1+1.x$.

Neem nu aan dat ze klopt voor $n$, we bewijzen dat ze dan ook geldt voor $n+1$:

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$. □

*Convergentie van meetkundige rijen*

*Stelling:* Met $a \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\begin{array}{ll} a > 1 & \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty \\ a = 1 & \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 1 \\ -1 < a < 1 & \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0 \\ a \leq -1 & \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a^n \text{ bestaat niet} \end{array}$$

*Bewijs:* We bewijzen deze vier gevallen apart:

① Neem $a > 1$. We willen bewijzen dat $\forall r \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow a^n > r$

We weten dat $a^n = (1+(a-1))^n \underset{Bern.}{\geq} 1+n(a-1)$, dus als we stellen dat $n_0 \geq \dfrac{r-1}{a-1}$, is bewezen dat:

$$a^n > 1+n(a-1) > 1+\frac{r-1}{\cancel{a-1}}\cancel{(a-1)} = r.$$

② Neem $a=1$. Dan is de rij constant $1$ en dus de limiet gelijk aan de constante $1$.

③ Neem $-1 < a < 1$. Als $a=0$ dan is de rij constant $0$ en dus de limiet gelijk aan de constante $0$.

In het andere geval geldt $0 < |a| < 1$, noem dan $b = \dfrac{1}{|a|} > 1$. Dan geldt dus wegens geval ① dat:

$$\lim_{n\to+\infty} |a^n| = \lim_{n\to+\infty} |a|^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} b^n} = 0 \quad \left(\text{want } \frac{1}{+\infty} = 0\right) \text{ en dus ook } \lim_{n\to+\infty} a^n = 0.$$

④ Neem $a \leq -1$. Als $a=-1$ dan is de rij afwisselend $1$ en $-1$ en dus de limiet onbestaande.

Als $a < -1$ dan is $|a| > 1$ en dus wegens het eerste geval $\lim\limits_{n\to+\infty} |a^n| = \lim\limits_{n\to+\infty} |a|^n = +\infty$. Maar ook hier is het een alternerende rij (teken wisselt telkens) dus is de limiet onbestaande. □

*Opmerking:* De eerste stelling kan je ook bewijzen met behulp van logaritmen:

Als $r \leq 0$ klopt dit altijd omdat $a^n > 0$. Neem dus $r > 0$. Neem $n_0 = {}^a\log r$, dan geldt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Leftrightarrow a^n > a^{n_0} \Leftrightarrow a^n > a^{{}^a\log r} \Leftrightarrow a^n > r.$$

Over het algemeen wordt dit bewijs niet aanvaard omdat de stelling ook wordt gebruikt bij het bewijs dat de exponentiële functie stijgend is als $a > 1$, waar je hier op steunt.

*Gevolg:* Een meetkundige rij $(u_n)$ met quotiënt $q$ en eerste term $u_1 \neq 0$ convergeert $\Leftrightarrow -1 < q \leq 1$.

*Bewijs:* Voor die rij geldt $u_n = u_1 \,.\, q^{n-1} = \dfrac{u_1}{q} \cdot q^n$, zodat $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{u_1}{q} \lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ waaruit het gestelde onmiddellijk volgt wegens de vorige stelling.

*De som van alle termen van een meetkundige rij*

We weten reeds dat voor de som van de eerste $n$ termen van een meetkundige rij $(u_n)$ met quotiënt $q$ en eerste term $u_1 \neq 0$ geldt dat $s_n = u_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

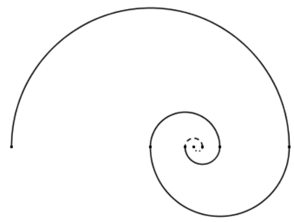
De som van alle termen is dus $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{u_1}{1-q}\left(1 - \lim\limits_{n\to+\infty} q^n\right)$.

Uit de vorige paragraaf volgt dan dat $-1 < q < 1 \Rightarrow S = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} u_n = \dfrac{u_1}{1-q}$.

In alle andere gevallen (dus $|q| \geq 1$) divergeert de som.

**Voorbeeld 1:** $0{,}999... = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + ... = \dfrac{0{,}9}{1-0{,}1} = 1$

**Voorbeeld 2:** Men construeert een spiraal op de volgende manier: Teken een halve cirkel met straal 2 cm; aan een eindpunt hiervan teken je een halve cirkel met straal 1 cm; aan dit nieuwe eindpunt teken je weer een halve cirkel met straal 0,5 cm; … dit proces herhaalt zich door telkens weer de straal te halveren (zie figuur). Hoe lang is de spiraal?



De halve cirkels vormen een MR met $u_1 = \dfrac{2\pi.2}{2} = 2\pi$ en $q = \dfrac{1}{2}$, dus $l = \dfrac{2\pi}{1-1/2} = 4\pi$.

## b) ***Enkele aanvullende definities***

Een rij $(u_n)$ is *stijgend* $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : u_n \leq u_{n+1}$

- Een rij $(u_n)$ is *stijgend* $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : u_n \leq u_{n+1}$
- Een rij $(u_n)$ is *strikt stijgend* $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : u_n < u_{n+1}$
- Een rij $(u_n)$ is *dalend* $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : u_n \geq u_{n+1}$
- Een rij $(u_n)$ is *strikt dalend* $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : u_n > u_{n+1}$
- Een rij $(u_n)$ is *constant* $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : u_n = u_{n+1}$
- Een rij $(u_n)$ is *alternerend* $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : u_n \cdot u_{n+1} < 0$
- Een rij $(u_n)$ is *monotoon* $\Leftrightarrow (u_n)$ is stijgend of dalend
- Het getal $b \in \mathbb{R}$ is een *majorant* van de rij $(u_n)$ $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : u_n \leq b$
- Het getal $b \in \mathbb{R}$ is een *minorant* van de rij $(u_n)$ $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : u_n \geq b$

In plaats van majorant en minorant worden soms ook *bovengrens* en *ondergrens* gebruikt.

- Een rij $(u_n)$ is *naar boven begrensd* $\Leftrightarrow (u_n)$ heeft minstens één majorant
- Een rij $(u_n)$ is *naar onder begrensd* $\Leftrightarrow (u_n)$ heeft minstens één minorant
- Een rij $(u_n)$ is *begrensd* $\Leftrightarrow (u_n)$ is naar boven begrensd en naar onder begrensd
- Het getal $b \in \mathbb{R}$ is het *supremum* van de rij $(u_n)$ $\Leftrightarrow$ $b$ is een bovengrens van $(u_n)$ én $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : b - \varepsilon < u_{n_0} \leq b$
- Het getal $b \in \mathbb{R}$ is het *infimum* van de rij $(u_n)$ $\Leftrightarrow$ $b$ is een ondergrens van $(u_n)$ én $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : b \leq u_{n_0} < b + \varepsilon$

Het supremum is de *kleinste bovengrens* en het infimum is de *grootste ondergrens* van een rij. Men kan bewijzen dat elke naar boven begrensde rij een supremum bezit en dat elke naar onder begrensde rij een infimum bezit. Het bewijs van deze stelling valt buiten het bestek van deze cursus.

**Voorbeeld:** We beschouwen de rij $(u_n) = 4, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \ldots$ met $u_n = 3 + \frac{1}{n}$ .

$(u_n)$ is naar boven begrensd want $\forall n \in \mathbb{N}_0 : u_n \leq 4$. $4$ is de kleinste bovengrens van deze rij en dus het supremum van deze rij. Er bestaat geen kleinere bovengrens want $u_1 = 4$, dit is het maximum van de rij.

$(u_n)$ is ook naar onder begrensd (en dus begrensd) want $\forall n \in \mathbb{N}_0 : u_n = 3 + \frac{1}{n} > 3$.

Dat $3$ ook het infimum is van deze rij volgt uit:

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ : 3 < 3 + \frac{1}{n} < 3 + \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Dus met $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ is $3 \leq u_{n_0} < 3 + \varepsilon$ .

Omdat $u_{n+1} - u_n = \left(3 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(3 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$ is ze strikt dalend.

## c) ***Convergentiekenmerk voor monotone rijen***

*Stelling:* Een stijgende rij die naar boven begrensd is, convergeert.

*Bewijs:* Zij $(u_n)$ een naar boven begrensde rij, met supremum $b$ . We bewijzen dat $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = b$ .

Het getal $b$ is een bovengrens voor de rij $(u_n)$ dus geldt: $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : u_n \leq b$

Omdat $b$ het supremum is van de rij geldt: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : b - \varepsilon < u_{n_0} \leq b$ .

Maar de rij is ook stijgend, dus $\forall n \in \mathbb{N}_0 : u_n \leq u_{n+1}$ .

Vatten we deze drie gegevens samen dan krijgen we:

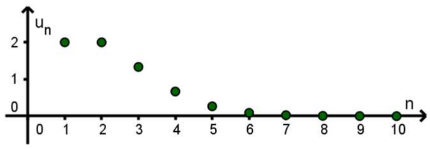
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow b - \varepsilon < u_n \leq b \Leftrightarrow b - \varepsilon < u_n < b + \varepsilon \Leftrightarrow |u_n - b| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = b \quad \square$$

*Stelling:* Een dalende rij die naar onder begrensd is, convergeert.

*Bewijs:* Analoog aan de vorige stelling bewijs je dat elke zulke rij convergeert naar haar infimum.

**Voorbeeld:** Bewijs dat de rij $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ convergeert.




We tonen aan dat de rij dalend is en naar beneden begrensd.

De rij is dalend omdat $\forall n \in \mathbb{N}_0 : u_{n+1} - u_n = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2^{n+1} - 2^n (n+1)}{(n+1)!} = \dfrac{2^n (1-n)}{(n+1)!} \leq 0$.

De rij is ook naar onder begrensd want ze is duidelijk overal positief: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : u_n = \dfrac{2^n}{n!} > 0$ □

## d) *De insluitstelling*

*Stelling:* Als $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ en $\exists m \in \mathbb{N}_0, \forall n \in \mathbb{N} : n > m \Rightarrow v_n \leq u_n \leq V_n$ dan is $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

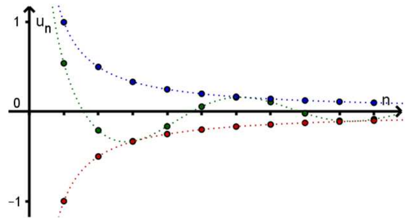
*Bewijs:* Neem een willekeurige $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$ , dan geldt wegens de limietdefinitie dat:

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow |v_n - a| < \varepsilon$ en

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = a \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n_2 \Rightarrow |V_n - a| < \varepsilon$

Neem $n_0 = \max(n_1, n_2)$, dan is $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n > n_0 \Rightarrow |v_n - a| < \varepsilon \wedge |V_n - a| < \varepsilon \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$ □

**Voorbeeld:** Bewijs dat de rij $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$ convergeert.




Omdat $\forall n \in \mathbb{N}_0 : -1 \leq \cos n \leq 1$ zal $\forall n \in \mathbb{N}_0 : -\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\cos n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$.

Definieer je dus $(v_n)$ en $(V_n)$ als $v_n = -\dfrac{1}{n}$ en $V_n = \dfrac{1}{n}$ dan zal:

$\forall n \in \mathbb{N}_0 : v_n \leq u_n \leq V_n$, en is dus $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ want $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ □

## e) *Convergentie bij recursief gedefinieerde rijen*

Voor recursief gedefinieerde rijen $(u_n)$ die convergeren kan je steunen op $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$ om de limiet te berekenen. Let wel op dat dit enkel kan gebruikt worden als die limiet bestaat.

**Voorbeeld:** De rij met eerste term $u_1 = 1$ en recursieformule $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{5}{u_n}\right)$ convergeert. Bewijs dat haar limiet gelijk is aan $\sqrt{5}$.

De rij convergeert dus we stellen dat $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = k \in \mathbb{R}$. Neem je de limiet in de recursieformule, dan krijg je:

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty} u_n + \frac{5}{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}\right) \Rightarrow k = \frac{1}{2}\left(k + \frac{5}{k}\right) \Rightarrow k^2 = 5 \Rightarrow k = \sqrt{5} \vee \cancel{k = -\sqrt{5}}.$$

*Opmerking: deze methode om vierkantswortels te bereken heet de methode van Heroon, genoemd naar de Griekse wiskundige Hero van Alexandrië, en bestaat al zo'n 2000 jaar.*