Machten

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

1) Machten met gehele exponenten

Volgende definities kennen we al enkele jaren:

- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^n = \overbrace{a.a.a.\ldots.a}^{n\ factoren}$.
- $\forall a \in \mathbb{R}_0 : a^0 = 1$ (merk op dat 0^0 niet gedefinieerd is).
- $\forall a \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{N} : a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Je kent ook al een hele tijd de bekende rekenregels:

❶ $\forall a \in \mathbb{R}_0, \forall m,n \in \mathbb{Z}:$	$a^m . a^n = a^{m+n}$	❹ $\forall a,b \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{Z}:$	$(a.b)^n = a^n . b^n$
❷ $\forall a \in \mathbb{R}_0, \forall m,n \in \mathbb{Z}:$	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	❺ $\forall a,b \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{Z}:$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
❸ $\forall a \in \mathbb{R}_0, \forall m,n \in \mathbb{Z}:$	$\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$	❻ $\forall a,b \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{Z}:$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

2) Vierkantswortels en n-de machtswortels

a) *Vierkantswortels*

Een vierkantswortel van een reëel getal is een reëel getal waarvan het kwadraat gelijk is aan het gegeven getal. Enkel positieve getallen hebben dus vierkantswortels.

De notatie $\sqrt{\ }$ wordt enkel gebruikt voor de positieve vierkantswortel.

Toegepast geeft dit dat -3 *een* vierkantswortel is van 9, maar dat $\sqrt{9} = 3$ en $\sqrt{9} \neq -3$. Als er in een context sprake is van *de* vierkantswortel dan gaan we er van uit dat de positieve wordt bedoeld!

Tot nog toe kennen jullie al de volgende eigenschappen:

• $\forall a \in \mathbb{R}^+ :$	$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a = \sqrt{a^2}$	• $\forall a \in \mathbb{R}^- :$	$\sqrt{a^2} = -a$
• $\forall a,b \in \mathbb{R}^+ :$	$\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$	• $\forall a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}_0^+ :$	$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

b) *n-de machtswortels*

Een n-de machtswortel van een reëel getal is een reëel getal waarvan de n-de macht gelijk is aan het gegeven getal. We moeten dus een onderscheid maken tussen even en oneven exponenten:

n is oneven

Is n oneven dan heeft elk reëel getal een unieke n-de machtswortel: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.

n is even

Is n even dan zijn er drie gevallen te onderscheiden:

- Strikt negatieve getallen hebben geen n-de machtswortels.
- Nul heeft één n-de machtswortel, namelijk nul zelf.
- Strikt positieve getallen hebben twee tegengestelde n-de machtswortels. Zoals bij de vierkantswortel gebruiken we de notatie $\sqrt[n]{\ }$ enkel voor de positieve wortel.

  $b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a} \vee b = -\sqrt[n]{a}$

Beperken we ons tot de positieve getallen dan geldt: $\boxed{\forall a,b \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}_0 : \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a}$.

Een onmiddellijk gevolg is dus: $\forall a,b \in \mathbb{R}^+ : a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$ (merk op dat dit in $\mathbb{R}$ niet geldt!).

Rekenregels

Voor n-de machtswortels gelden de volgende rekenregels:

① $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}_0 :\quad \sqrt[n]{a^n} = a$

② $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}_0 :\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

③ $\forall a,b \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}_0 :\quad \sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

④ $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}_0^+, \forall n \in \mathbb{N}_0 :\quad \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

⑤ $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}_0 :\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

<u>*Bewijs:*</u>

① $a^n = a^n$

$\Leftrightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$ (definitie)

② $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

③ stel $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = c$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}\right)^n = c^n$ (gevolg definitie)

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{a}\right)^n.\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = c^n$ (rekenregel machten ❹,❺)

$\Leftrightarrow ab = c^n$ (rekenregel ②)

$\Leftrightarrow \sqrt[n]{ab} = c$ (definitie)

④ stel $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = c$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}\right)^n = c^n$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{a}\right)^n : \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = c^n$

$\Leftrightarrow a : b = c^n$

$\Leftrightarrow \sqrt[n]{a : b} = c$

⑤ stel $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = c$

$\Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = c^m$ (definitie)

$\Leftrightarrow a = \left(c^m\right)^n$ (definitie)

$\Leftrightarrow a = c^{mn}$ (rekenregel machten ❸)

$\Leftrightarrow \sqrt[mn]{a} = c$ (definitie)

Een onmiddellijk gevolg van rekenregel ③ is dat geldt: $\forall a \in \mathbb{R}_0^+, \forall n \in \mathbb{N}_0, \forall m \in \mathbb{Z} : \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

c) ***<u>Machten met rationale exponenten</u>***

We proberen nu de definitie van macht uit te breiden tot rationale exponenten.

Hiertoe bekijken we volgend voorbeeld: $\sqrt[3]{2^{21}} = \sqrt[3]{\left(2^7\right)^3} = 2^7 = 2^{\frac{21}{3}}$.

We definiëren dus de macht met gebroken exponent als: $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}_0^+, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$

Om effectief machten te berekenen is het soms handiger te schrijven $\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$

<u>**Voorbeelden:**</u> $4^{2,5} = 4^{\frac{5}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^5 = 2^5 = 32$ en $27^{-\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^{-2} = 3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

Rekenregels

Volgende rekenregels blijven ook gelden bij rationale exponenten:

$\boxed{1}\quad \forall a \in \mathbb{R}_0^+, \forall p,q \in \mathbb{Q}: \quad a^p . a^q = a^{p+q}$

$\boxed{2}\quad \forall a \in \mathbb{R}_0^+, \forall p,q \in \mathbb{Q}: \quad \dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

$\boxed{3}\quad \forall a \in \mathbb{R}_0^+, \forall p,q \in \mathbb{Q}: \quad \left(a^p\right)^q = a^{p \cdot q}$

$\boxed{4}\quad \forall a,b \in \mathbb{R}_0^+, \forall p \in \mathbb{Q}: \quad \left(a.b\right)^p = a^p . b^p$

$\boxed{5}\quad \forall a,b \in \mathbb{R}_0^+, \forall p \in \mathbb{Q}: \quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$

<u>Bewijs:</u> In alle bewijzen nemen we aan dat $p = \dfrac{m}{n}$ en $q = \dfrac{m'}{n'}$, met $m, m' \in \mathbb{Z}$ en $n, n' \in \mathbb{N}_0$ (♣).

$\boxed{1}\ a^p . a^q = a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{m'}{n'}}$ (zie ♣)

$= a^{\frac{mn'}{nn'}} . a^{\frac{m'n}{nn'}}$ (rekenregel breuken)

$= \sqrt[nn']{a^{mn'}} . \sqrt[nn']{a^{m'n}}$ (definitie)

$= \sqrt[nn']{a^{mn'} . a^{m'n}}$ (rekenregel ③, ④)

$= \sqrt[nn']{a^{mn'+m'n}}$ (rekenregel ❶, ❷)

$= a^{\frac{mn'+m'n}{nn'}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}} = a^{p+q}$ (rekenregels breuken, ♣)

$\boxed{2}\ a^p : a^q = a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{m'}{n'}}$

$= a^{\frac{mn'}{nn'}} : a^{\frac{m'n}{nn'}}$

$= \sqrt[nn']{a^{mn'}} : \sqrt[nn']{a^{m'n}}$

$= \sqrt[nn']{a^{mn'} : a^{m'n}}$

$= \sqrt[nn']{a^{mn'-m'n}}$

$= a^{\frac{mn'-m'n}{nn'}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{m'}{n'}} = a^{p-q}$

$\boxed{3}\ \left(a^p\right)^q = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{m'}{n'}}$ (zie ♣)

$= \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{m'}{n'}} = \left(\sqrt[n']{\sqrt[n]{a^m}}\right)^{m'}$ (definitie)

$= \left(\sqrt[nn']{a^m}\right)^{m'}$ (rekenregel ⑤)

$= \sqrt[nn']{\left(a^m\right)^{m'}}$ (gevolg rekenregel ③)

$= \sqrt[nn']{a^{mm'}}$ (rekenregel ❸)

$= a^{\frac{mm'}{nn'}}$ (definitie)

$= a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{m'}{n'}} = a^{p \cdot q}$ (rekenregels breuken, ♣)

$\boxed{4}\ \left(a.b\right)^p = \left(a.b\right)^{\frac{m}{n}}$ (zie ♣)

$= \sqrt[n]{\left(a.b\right)^m}$ (definitie)

$= \sqrt[n]{a^m . b^m}$ (rekenregel ❹, ❺)

$= \sqrt[n]{a^m} . \sqrt[n]{b^m}$ (rekenregel ③, ④)

$= a^{\frac{m}{n}} . b^{\frac{m}{n}} = a^p . b^q$ (definitie, ♣)

$\boxed{5}\ \left(a : b\right)^p = \left(a : b\right)^{\frac{m}{n}}$

$= \sqrt[n]{\left(a : b\right)^m}$

$= \sqrt[n]{a^m : b^m}$

$= \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{b^m}$

$= a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = a^p : b^q$

d) ***Machten met reële exponenten***

De definitie van een macht met een reële exponent valt buiten het bestek van deze cursus. Wat wel kan opgemerkt worden is dat we de waarde willekeurig dicht kunnen benaderen met behulp van de vorige paragraaf.

Voorbeeld: We benaderen 2^{π} op 5 decimalen nauwkeurig, met behulp van rationale exponenten:

q	2^q
3	8
3,1	8,5741877
3,14	8,815240927
3,142	8,82746992
3,1415	8,824411082
3,14159	8,824961595
3,141593	8,824979946
3,1415927	8,824978111
3,14159265	8,824977805

We kunnen dus opmerken dat:

$$3{,}14159265 < \pi < 3{,}1415927 \overset{*}{\Leftrightarrow} 2^{3{,}14159265} < 2^{\pi} < 2^{3{,}1415927}$$

Dus $2^{\pi} \approx 8{,}82498$.

*: Deze equivalentie volgt uit het feit dat $f(x) = 2^x$ een strikt stijgende functie is. We zullen dit inzien in het volgende hoofdstuk.

De rekenregels voor machten met rationale exponenten blijven natuurlijk ook gelden voor machten met reële exponenten.

Een macht waarbij zowel het grondtal als de exponent irrationaal is, is niet noodzakelijk zelf irrationaal:

Stelling: Er bestaan irrationale getallen $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, zodat $a^b \in \mathbb{Q}$.

Bewijs: Stel $a = b = \sqrt{2}$. Als $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ dan is de stelling bewezen.

Is $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, stel dan $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ en $b = \sqrt{2}$ zodat dan geldt:

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2 \in \mathbb{Q}. \square$$