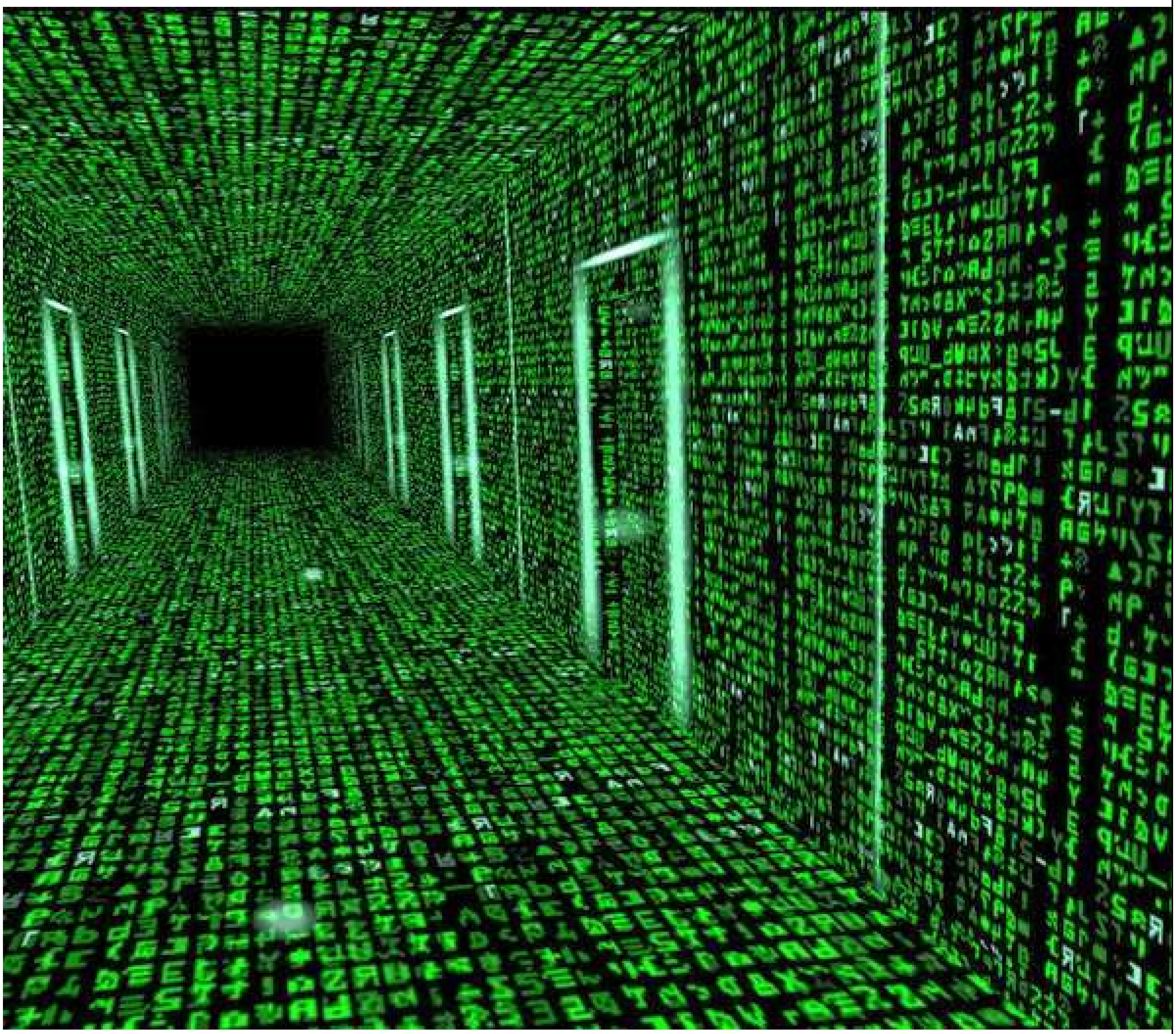
Matrices en stelsels



1) **Matrices en soorten matrices**

a) ***Definities en voorbeelden***

Definitie

Een *matrix* is een tabel met een aantal rijen en een aantal kolommen, die gevuld is met reële getallen. De reële getallen noemt men de *elementen* van de matrix, en de matrix wordt genoteerd met een grote letter.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ waarbij } a_{ij} \in \mathbb{R} \quad met\, 1 \le i \le m \; en\, 1 \le j \le n.$$

Deze matrix heeft m rijen en n kolommen en noemen we een $(m \times n)$-matrix of een matrix van dimensie $m \times n$. De verzameling van alle $(m \times n)$-matrices noteren we als $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Voorbeelden

Voorbeeld 1: *Afstanden*

Iemand wenst te gaan fietsen in de regio Antwerpen-Gent-Mechelen. Kilometerinformatie op voorhand is handig. Volgende wegen zijn hem bekend:

Gent-Lokeren : 26 km / Gent-Dendermonde : 30 km / Lokeren-Sint-Niklaas : 13 km / Lokeren-Dendermonde : 14 km / Sint-Niklaas-Antwerpen : 26 km / Sint-Niklaas-Mechelen : 34 km / Antwerpen-Mechelen : 25 km / Dendermonde-Mechelen : 28 km / …

Het is handig om al deze gegevens in een matrix te zetten:

$$K = \begin{array}{c} \\ a \\ d \\ g \\ l \\ m \\ s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & d & g & l & m & s \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 53 & 65 & 39 & 25 & 26 \\ 53 & 0 & 30 & 14 & 28 & 27 \\ 65 & 30 & 0 & 26 & 58 & 39 \\ 39 & 14 & 26 & 0 & 42 & 13 \\ 25 & 28 & 58 & 42 & 0 & 34 \\ 26 & 27 & 39 & 13 & 34 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dergelijke matrix noemt men een *vierkante matrix* (evenveel rijen als kolommen). De hoofddiagonaal bevat in dit geval enkel nullen.

Deze matrix is ook een *symmetrische matrix* (overeenkomstige rijen en kolommen zijn gelijk).

Voorbeeld 2: *Stelsels van lineaire vergelijkingen*

Bij het stelsel $S = \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x + 14y = -1 \end{cases}$ hoort de (uitgebreide) coëfficiëntenmatrix $A_b = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 14 & -1 \end{array}\right]$.

b) ***Soorten matrices***

Een matrix die bestaat uit één rij noemen we een *rijmatrix* en heeft als dimensie $1 \times n$.

Een matrix die bestaat uit één kolom noemen we een *kolommatrix* en heeft als dimensie $m \times 1$.

Een matrix met evenveel rijen n als kolommen n noemen we een *vierkante matrix van dimensie* n. Vierkante matrices hebben een *hoofddiagonaal*, bestaande uit de diagonaalelementen $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$. De elementen $a_{1n}, a_{2\,n-1}, a_{3\,n-2}, ..., a_{n1}$ vormen de *nevendiagonaal*.

Een vierkante matrix waarvan alle niet-diagonaalelementen nul zijn, noemen we een *diagonaalmatrix*, die we ook korter kunnen noteren.

Voorbeeld: $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = diag(4,5,-3,1)$

Een diagonaalmatrix waarbij alle elementen op de hoofddiagonaal precies 1 zijn, noemen we een *eenheidsmatrix*. Zo is de eenheidsmatrix van dimensie 3 (of van de derde orde):

Voorbeeld: $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Een vierkante matrix die onder (respectievelijk boven) de hoofddiagonaal enkel nullen bevat noemen we een *bovendriehoeksmatrix* (respectievelijk *onderdriehoeksmatrix*). Bijvoorbeeld:

$$\underbrace{B_1 = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{bovendriehoeksmatrix} \text{ en } \underbrace{B_2 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{onderdriehoeksmatrix}$$

Voor *symmetrische* matrices geldt:
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is symmetrisch
$\Leftrightarrow \forall i, j \in \{1,2,...,n\} : a_{ij} = a_{ji}$.

Voorbeeld: $S = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -4 & -5 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Voor *scheefsymmetrische* matrices geldt:
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is scheefsymmetrisch
$\Leftrightarrow \forall i, j \in \{1,2,...,n\} : a_{ij} = -a_{ji}$.

Voorbeeld: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

Een matrix waarvan alle elementen nul zijn, noemen we een *nulmatrix*. Deze hoeft niet noodzakelijk vierkant te zijn. In de onderindex noteren we soms de dimensie van de nulmatrix (al blijkt dit vaak ook uit de context en noteren we kortweg O). Bijvoorbeeld:

$$O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Een matrix met één rij en één kolom vereenzelvigen we met een getal. Zo stellen we $[5] = 5$.

2) **Bewerkingen met matrices**

a) ***Gelijke matrices***

Twee matrices A en B zijn gelijk als ze dezelfde dimensie hebben en als elk paar elementen op dezelfde positie gelijk is aan elkaar. Deze bewerking wordt meestal gebruikt om *matrixvergelijkingen* op te lossen.

Voorbeeld: Los op : $\begin{bmatrix} a-3 & 0 \\ -3 & d+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & b-2 \\ c+2 & 4 \end{bmatrix}$

Beide matrices zijn gelijk als en slechts als: $\begin{cases} a-3=2 \\ b-2=0 \\ c+2=-3 \\ d+4=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=2 \\ c=-5 \\ d=0 \end{cases}$.

b) ***Optellen van matrices***

Twee matrices A en B kunnen worden opgeteld als ze dezelfde dimensie hebben. De *sommatrix* heeft ook dezelfde dimensie. We tellen elementen op dezelfde positie op en plaatsen de som ook op dezelfde positie.

Voorbeeld: Als $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ dan is $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$.

c) ***Aftrekken van matrices***

De tegengestelde matrix $-A$ van een matrix A is een matrix met dezelfde dimensie waarvan de elementen het tegengestelde zijn van de overeenkomstige elementen van de oorspronkelijke matrix.

Een matrix B aftrekken van een matrix A is bij A de tegengestelde matrix van B optellen.

Voorbeeld: Als $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ dan is $A-B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 2 & -7 & 7 \end{bmatrix}$.

Eigenschappen van de optelling van matrices

Intern:	$\forall A,B \in \mathbb{R}^{m\times n} : A+B \in \mathbb{R}^{m\times n}$
Commutativiteit:	$\forall A,B \in \mathbb{R}^{m\times n} : A+B = B+A$
Associativiteit:	$\forall A,B,C \in \mathbb{R}^{m\times n} : (A+B)+C = A+(B+C)$
Neutraal element:	$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n} : A+O = O+A = A$
Symmetrisch element:	$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n} : A+(-A) = (-A)+A = O$

Deze vijf eigenschappen samen zorgen ervoor dat we $\mathbb{R}^{m\times n},+$ een *commutatieve groep* noemen.

d) ***Scalaire vermenigvuldiging met een matrix***

Elke matrix A kan worden vermenigvuldigd met een reëel getal r. Het resultaat is een matrix $r.A$ van dezelfde dimensie, waarbij elk element van die matrix vermenigvuldigd werd met dat reëel getal r.

Voorbeeld: Als $A=\begin{bmatrix}-1 & 4 & -2\\ 3 & -6 & 5\end{bmatrix}$, dan is $2A=\begin{bmatrix}-2 & 8 & -4\\ 6 & -8 & 10\end{bmatrix}$.

Eigenschappen van de scalaire vermenigvuldiging met matrices

Intern:	$\forall A\in\mathbb{R}^{m\times n},\forall r\in\mathbb{R}: r.A\in\mathbb{R}^{m\times n}$
Distributiviteit van product t.o.v. som:	$\forall A,B\in\mathbb{R}^{m\times n},\forall r\in\mathbb{R}: r\left(A+B\right)=r.A+r.B$
Distributiviteit van som t.o.v. product:	$\forall A\in\mathbb{R}^{m\times n},\forall r,s\in\mathbb{R}:\left(r+s\right).A=r.A+s.A$
Gemengde associativiteit:	$\forall A\in\mathbb{R}^{m\times n},\forall r,s\in\mathbb{R}:\left(r.s\right).A=r.\left(s.A\right)$
1 is neutraal element:	$\forall A\in\mathbb{R}^{m\times n}: 1.A=A$

Deze vijf eigenschappen samen met het feit dat $\mathbb{R}^{m\times n},+$ een commutatieve groep is, zorgen ervoor dat we $\mathbb{R},\mathbb{R}^{m\times n},+$ een *reële vectorruimte* noemen.

e) ***Vermenigvuldiging van matrices***

Inleidend voorbeeld

Een consumentenorganistie doet een actie bij nieuwe leden. Voor ieder nieuw lid bepaalt men welk warenhuis het voordeligste is voor de wekelijkse aankopen.
Hiervoor heeft de vereniging de prijzen van een groot aantal basisproducten in verschillende warenhuizen bij elkaar gebracht. Die kunnen in een matrix P worden bijgehouden.
Hier is een voorbeeld voor een deel van de gegevens:

$$\begin{array}{rl}
\begin{array}{r}\text{Dellijs}\rightarrow\\ \text{Zjeebee}\rightarrow\\ \text{Karfoer}\rightarrow\\ \text{Kolruit}\rightarrow\end{array} & \begin{bmatrix}1{,}50 & 0{,}80 & 2{,}00 & 10{,}95 & 9{,}50\\ 1{,}40 & 0{,}90 & 1{,}90 & 10{,}00 & 11{,}25\\ 1{,}65 & 0{,}85 & 1{,}85 & 10{,}65 & 10{,}00\\ 1{,}35 & 0{,}95 & 1{,}65 & 11{,}70 & 11{,}65\end{bmatrix}=P\\
 & \begin{array}{ccccc}\text{Aardappelen (in €/kg)} & \text{Wortelen (in €/kg)} & \text{Brood (in €/stuk)} & \text{Pils (in €/bak)} & \text{Kaas (in €/kg)}\end{array}
\end{array}$$

In realiteit gaat het uiteraard om veel meer producten en veel meer warenhuizen.
Bij de inschrijving als nieuw lid van de verbruikersvereniging kan je doorgeven hoeveel je per week van deze basisproducten verbruikt. Men rekent dan op basis van jouw gegevens uit welk warenhuis voor deze aankopen het goedkoopste is.

Als voorbeeld bekijken we twee gezinnen wiens verbruik we noteren in een matrix V :

$$\begin{array}{rl}
\begin{array}{r}\text{Aardappelen (in kg)}\rightarrow\\ \text{Wortelen (in kg)}\rightarrow\\ \text{Brood (stuks)}\rightarrow\\ \text{Pils (bakken)}\rightarrow\\ \text{Kaas (in kg)}\rightarrow\end{array} & \begin{bmatrix}3 & 2{,}5\\ 2 & 1\\ 10 & 8\\ 0{,}8 & 0\\ 0{,}5 & 0{,}6\end{bmatrix}=V\\
 & \begin{array}{cc}\text{Gezin Peeters} & \text{Gezin Janssens}\end{array}
\end{array}$$

Om te berekenen hoeveel het gezin Peeters zou uitgeven in Dellijs, zou je volgende berekening doen: $3.1,5+2.0,80+10.2,00+0,8.10,95+0,5.9,50=39,61$.

Dit komt neer op het vermenigvuldigen van alle elementen van de eerste rij (Delleis) van matrix P met de overeenkomstige elementen van de eerste kolom (Peeters) van matrix V.

We kunnen ook berekenen hoeveel het gezin Janssens zou uitgeven in Karfoer:
$2,5.1,65+1.0,85+8.1,85+0.10,65+0,6.10,00=23,275$

Dit komt neer op het vermenigvuldigen van alle elementen van de derde rij (Karfoer) van matrix P met de overeenkomstige elementen van de tweede kolom (Janssens) van matrix V.

Doen we dit nu voor beide gezinnen voor alle warenhuizen, dan kunnen we hun uitgaven ook noteren in een matrix U:

$$\begin{array}{r c}
\begin{array}{r} \text{Dellijs} \rightarrow \\ \text{Zjeebee} \rightarrow \\ \text{Karfoer} \rightarrow \\ \text{Kolruit} \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 39,61 & 26,25 \\ 38,625 & 26,35 \\ 35,67 & 23,275 \\ 37,635 & 24,515 \end{bmatrix} = U \\
 & \begin{array}{cc} \text{Gezin Peeters} & \text{Gezin Janssens} \end{array}
\end{array}$$

We stellen nu per definitie dat deze matrix U het product is van de matrices P en V:

$$P.V=\begin{bmatrix} 1,5 & 0,8 & 2 & 10,95 & 9,5 \\ 1,4 & 0,9 & 1,9 & 10 & 11,25 \\ 1,65 & 0,85 & 1,85 & 10,65 & 10 \\ 1,35 & 0,95 & 1,65 & 11,7 & 11,65 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 3 & 2,5 \\ 2 & 1 \\ 10 & 8 \\ 0,8 & 0 \\ 0,5 & 0,6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 39,61 & 26,25 \\ 38,625 & 26,35 \\ 35,67 & 23,275 \\ 37,635 & 24,515 \end{bmatrix}=U$$

Merk op dat je dus het element U_{ij} vindt door de som te maken van de producten van de overeenkomstige elementen uit de i-de rij van P met de j-de rij van V. We gebruiken dit voorbeeld nu om het product van matrices algemeen te definiëren.

Definitie

Zij $P\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $A\in\mathbb{R}^{m\times p}$ en $B\in\mathbb{R}^{p\times n}$, dan geldt dat:

$$P=A.B\Leftrightarrow\forall i\in\{1,2,...,m\},\forall j\in\{1,2,...,n\}:p_{ij}=a_{i1}.b_{1j}+a_{i2}.b_{2j}+...+a_{ip}.b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}.b_{kj}\ .$$

Merk op dat het product van twee matrices A en B dus enkel gedefinieerd is als A evenveel kolommen als B rijen heeft.

Het product is dan een matrix met evenveel rijen als A en evenveel kolommen als B.

Eigenschappen van de vermenigvuldiging van vierkante matrices

Intern:	$\forall A,B \in \mathbb{R}^{n\times n} : A.B \in \mathbb{R}^{n\times n}$
Associativiteit:	$\forall A,B,C \in \mathbb{R}^{n\times n} : (A.B).C = A.(B.C)$
Neutraal element:	$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A.I_n = I_n.A = A$
Distributiviteit t.o.v. de optelling:	$\forall A,B,C \in \mathbb{R}^{n\times n} : A.(B+C) = A.B + A.C$ *(linksdistributiviteit)*
Distributiviteit t.o.v. de optelling:	$\forall A,B,C \in \mathbb{R}^{n\times n} : (A+B).C = A.C + B.C$ *(rechtsdistributiviteit)*

Deze vijf eigenschappen samen met het feit dat $\mathbb{R}^{n\times n},+$ een commutatieve groep is, zorgen ervoor dat we $\mathbb{R}^{n\times n},+,.$ een *ring met eenheidselement* noemen.

Zowel groepen, vectorruimten, als ringen zijn van fundamenteel belang in het vak algebra.

Merk dus zeker op dat enkele eigenschappen niet gelden bij het vermenigvuldigen van matrices:

- Niet voor alle matrices geldt dat $A.B = B.A$. Deze eigenschap geldt slechts voor heel bijzondere (vierkante) matrices, die we dan ook *commuterende matrices* zullen noemen.
  Voorbeeld: Als $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$, dan is $A.B = B.A = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -8 \end{bmatrix}$.
- Niet alle matrices hebben voor de vermenigvuldiging een symmetrisch element. Hier komen we later uitvoerig op terug (we noemen die inverteerbare matrices).
- Uit $A.B = O$ volgt bij matrices niet noodzakelijk dat $A = O \vee B = O$. Matrices waarvoor geldt dat $A.B = O$, terwijl $A \neq O$ en $B \neq O$ noemen we *nuldelers*.
  Voorbeeld: Als $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ en $C = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$, dan zijn A, B en C nuldelers omdat $A.B = O$ en $C.A = O$ (Je kan nochtans ook narekenen dat $B.A \neq O$ en $A.C \neq O$).

f) Getransponeerde van een matrix

De *getransponeerde matrix* A^t van een matrix A is de matrix die men bekomt door rijen en kolommen te verwisselen.

Voorbeeld: Als $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$, dan is $A^t = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

De getransponeerde matrix van een symmetrische matrix is de matrix zelf.

De getransponeerde matrix van een scheefsymmetrische matrix is de tegengestelde van die matrix.

Eigenschappen van het transponeren van matrices

Getransponeerde van een som:	$\forall A,B \in \mathbb{R}^{m\times n} : (A+B)^t = A^t + B^t$
Getransponeerde van een scalair product:	$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall r \in \mathbb{R} : (r.A)^t = rA^t$
Getransponeerde van een product:	$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times p}, \forall B \in \mathbb{R}^{p\times n} : (A.B)^t = B^t.A^t$

g) ***Macht van een matrix – speciale vierkante matrices***

Macht van een matrix

De macht van een vierkante matrix definiëren we als $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times m}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : A^n = \underbrace{A.A.\ldots.A}_{n\ factoren}$.

Het is evident dat dit enkel zin heeft bij vierkante matrices.

Belangrijk om op te merken is dat heel veel merkwaardige producten die we kennen bij reële getallen niet meer gelden bij matrices, omdat het product niet commutatief is.

Zo zal bij wijze van voorbeeld $(A+B).(A-B) = A^2 - B^2$ enkel gelden als en slechts als A en B commuterende matrices zijn. Wat wel geldt is uiteraard: $(A+B).(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$.

Nilpotente matrices

Een vierkante matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ is een *nilpotente matrix met index* $n \Leftrightarrow A^n = O$ (en $A^{n-1} \neq 0$).

Voorbeeld: $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ is nilpotent met index 3, want $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ en $B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Idempotente matrices

Een vierkante matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ is een *idempotente matrix* $\Leftrightarrow A^2 = A$.

Voorbeeld: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ is een idempotente matrix, want $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} = A$.

Involutorische matrices

Een vierkante matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ is een *involutorische matrix* $\Leftrightarrow A^2 = I$.

Voorbeeld: $A = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$ is een involutorische matrix, want $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$.

h) ***De bewijsmethode door volledige inductie***

Een zeer krachtige bewijstechniek die ook vaak gebruikt wordt bij matrices is het *bewijs door volledige inductie*. We illustreren dit met twee voorbeelden:

Voorbeeld 1: Bewijs dat geldt: $1+4+9+\ldots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Bewijs: ① Controle voor $n=1$: $1 = \frac{1(1+1)(2.1+1)}{6}$ $\boxed{OK}$

② Stel nu dat het gestelde klopt voor n. We proberen hieruit af te leiden dat de stelling dan ook geldt voor $n+1$, dus dat geldt: $1+4+9+...+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

$$\begin{aligned} LL &= 1+4+9+...+(n+1)^2 = 1+4+9+...+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = RL \end{aligned}$$

③ De formule klopt voor $n=1$, dus wegens ② ook voor $n=2$, dan voor $n=3$, enz. □

Voorbeeld 2: Bewijs dat, als $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, geldt dat $\forall n \in \mathbb{N}_0 : A^n = 2^n.\begin{bmatrix} 1 & n/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bewijs: ① Controle voor $n=1$: $A^1 = 2^1.\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\boxed{OK}$

② Stel nu dat het gestelde klopt voor n. We proberen hieruit af te leiden dat de stelling dan ook geldt voor $n+1$, dus dat geldt: $A^{n+1} = 2^{n+1}.\begin{bmatrix} 1 & (n+1)/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

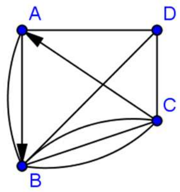
$$A^{n+1} = A^n.A = 2^n.\begin{bmatrix} 1 & n/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2^n.\begin{bmatrix} 2 & 1+n \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2^n.2.\begin{bmatrix} 1 & (1+n)/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = RL \quad □$$

3) Toepassingen op matrices

Zoals hierboven al meermaals ondervonden kunnen matrices rekenwerk vaak vereenvoudigen. We illustreren dit met drie aanvullende voorbeelden van realistische toepassingen.

a) *Wegenmatrix*

In Bulbapedia zijn er 4 gyms, die we voor de eenvoud met A, B, C en D noteren. De wegen tussen deze gyms onderling kunnen we schematisch als volgt voorstellen:



We noemen dit schema een *graaf*. Je leest er bijvoorbeeld af dat er twee wegen zijn tussen A en B waarvan één enkele richting, dat je op drie manieren van B naar C kan en omgekeerd, enzovoort. We kunnen deze gegevens ook weergeven in een directe-wegenmatrix W :

$$W = \begin{array}{cc} \text{van} & \\ \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \ \text{naar} \end{array}$$

Als we nu willen weten op hoeveel manieren we van bijvoorbeeld A naar C willen gaan met behulp van één tussenstap, dan tellen we volgende 4 elementen bij elkaar op:

- Van A naar A en dan van A naar C: 0x0 = 0 manieren
- Van A naar B en dan van B naar C: 2x3 = 6 manieren
- Van A naar C en dan van C naar C: 0x0 = 0 manieren
- Van A naar D en dan van D naar C: 1x1 = 1 manier

In totaal op 7 manieren.

Als je nu eens stil staat bij hoe deze som berekend is dan zie je dat je dit krijgt door de eerste rij van W te vermenigvuldigen met de derde kolom van W. Dit geldt voor alle mogelijke combinaties, dus kunnen we hieruit besluiten dat de matrix W^2 ons geeft op hoeveel manieren we van gym naar gym kunnen gaan met één tussenstap.

$$W^2 = \begin{array}{cc} \text{van} & \\ \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 12 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \ \text{naar} \end{array}$$

Zo kan je dus op de matrix W^2 hiernaast aflezen dat je op 7 manieren van A naar C kan met één tussenstap (tel deze manieren zeker eens na op de graaf).

Op dezelfde manier kan je beredeneren dat je bij W^3 kan aflezen op hoeveel manieren je met twee tussenstappen van de ene gym naar de andere gaat.

Wil je bijvoorbeeld weten op hoeveel manieren je met hoogstens twee tussenstappen van de ene gym naar de andere gaat dan kan dit met de matrix $W^3 + W^2 + W$.

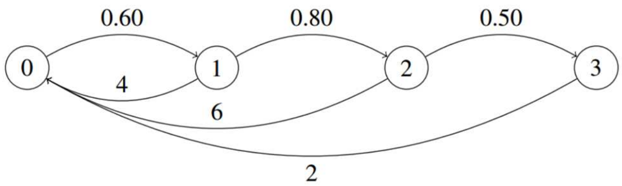
b) *Populatiematrices (Lesliematrices)*

Een bioloog ontdekt op een expeditie een exotische insectensoort.

Hij verdeelt de insecten in vier leeftijdscategorieën met gelijke tijdsintervallen van een jaar. Zijn onderzoek wijst uit dat de insecten vanaf het tweede levensjaar nakomelingen hebben. Elk insect uit deze leeftijdscategorie produceert gemiddeld vier nakomelingen. Dit stijgt in het derde levensjaar tot zes om in het laatste levensjaar te dalen tot twee.

Verder stelt hij vast dat veertig procent van de insecten het eerste jaar niet overleeft. Het tweede jaar zijn ze sterker en overleeft 80%. Slechts de helft hiervan bereikt de laatste leeftijdscategorie.

We kunnen de bevindingen van de bioloog in een graaf en in een matrix weergeven als volgt:



$$L = \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \ \text{naar}$$

Deze soort matrices wordt ook wel eens Lesliematrices genoemd.

Stel dat de bioloog bij aanvang van het onderzoek observeerde dat er in elke leeftijdscategorie een aantal insecten waren die hij weergeeft in de populatiematrix P_0. Hoe ziet de populatie er dan volgend jaar uit?

$$P_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 125 \\ 120 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Om te weten hoeveel er in categorie ⓪ komen moet je de volgende berekening doen: Er komen 4x150 + 6x125 + 2x120 = 1590 nieuwe insecten bij. Dit vind je dus eigenlijk door de eerste rij van de matrix L te vermenigvuldigen met de (start) populatiematrix P_0.

Om te weten hoeveel er in categorie ① komen bereken je: 0,6x100=60. Dit vind je ook door de tweede rij van de Lesliematrix te vermenigvuldigen met P_0. Deze redenering blijft ook opgaan voor ② en ③.

Na één jaar is de populatie dus gelijk aan: $P_1 = L.P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 125 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1590 \\ 60 \\ 120 \\ 62{,}5 \end{bmatrix}$.

Wil je de populatie na twee jaar kennen dan kan je $L.P_1$ berekenen of rechtstreeks $L^2.P_0$.

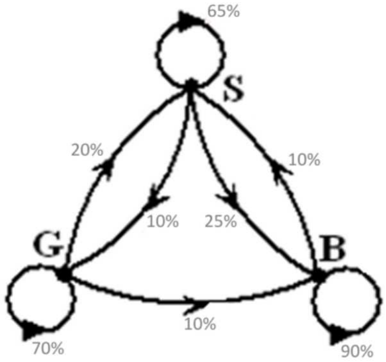
Als je de situatie na 10 jaar bekijkt ($P_{10} = L^{10}.P$) zal je merken dat deze insectenpopulatie een ware plaag wordt want er zijn dan al meer dan een kwart miljard van deze insecten.

c) ***Overgangsmatrices***

In een natuurreservaat zijn er drie types biotopen: struikgewas (S), grasweiden (G) en bos (B).

Elk jaar verschuift het aandeel van deze biotopen binnen het reservaat volgens het hiernaast staande schema.
Ook deze gegevens kunnen we noteren in een matrix:

$$\begin{array}{ccc} & \text{van} & \\ & \begin{array}{ccc} \text{S} & \text{G} & \text{B} \end{array} & \\ M = & \begin{bmatrix} 0{,}65 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}70 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{S} \\ \text{G} \\ \text{B} \end{array} \quad \text{naar} \end{array}$$



Je kan dit gerust beschouwen als een speciaal type Lesliematrix, met als opmerking dat er nu lussen zijn (er zijn populatiestukken die niet verschuiven). En verder is de som per kolom hier altijd 1 omdat er van het reservaat zelf niets verloren gaat.

Stel dat het reservaat nu bestaat uit 100 ha struikgewas, 75 ha grasweiden en 225 ha bos (het reservaat is dus in totaal 400 ha groot).

Na één jaar ziet het reservaat er dus zo uit: $R_1 = M.R_0 = \begin{bmatrix} 0{,}65 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}70 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 75 \\ 225 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102{,}5 \\ 62{,}5 \\ 235 \end{bmatrix}$.

Merk op dat de totale grootte dus inderdaad niet verandert. We bekijken nu eens de situatie op lange termijn:

$$R_5 = M^5.R_0 \approx \begin{bmatrix} 99{,}8 \\ 40{,}76 \\ 259{,}40 \end{bmatrix},\ R_{10} = M^{10}.R_0 \approx \begin{bmatrix} 97 \\ 34{,}03 \\ 268{,}97 \end{bmatrix},\ R_{100} = M^{100}.R_0 \approx \begin{bmatrix} 96 \\ 32 \\ 272 \end{bmatrix}.$$

Ons vermoeden is dus dat er na verloop van tijd biologisch evenwicht optreedt. We kunnen zelfs bewijzen dat dit de enige mogelijkheid is voor biologisch evenwicht, want:

$$R_\infty = M.R_\infty \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0{,}65 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}70 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s \\ g \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ g \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}65s + 0{,}20g + 0{,}10b = s \\ 0{,}10s + 0{,}70g = g \\ 0{,}25s + 0{,}10g + 0{,}9b = b \\ (s + g + b = 400) \end{cases} \overset{\boxed{GRM}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} s = 96 \\ g = 32 \\ b = 272 \end{cases}.$$

De extra voorwaarde die we bij het stelsel hebben bijgevoegd is de totale grootte van het reservaat.

4) Stelsels van eerstegraadsvergelijkingen

a) Definities

Een *stelsel* van m eerstegraadsvergelijkingen met n onbekenden is een verzameling vergelijkingen van de vorm:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Een *oplossing* van zo 'n stelsel is een geordend n-tal $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dat voldoet aan alle vergelijkingen van dit stelsel.

We noemen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, $X \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ en $A_b \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ respectievelijk de *coëfficiëntenmatrix*, de *constantenmatrix*, de *onbekendenmatrix* en de *uitgebreide coëfficiëntenmatrix* bij het stelsel:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \text{ en } A_b = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Merk op dat het stelsel dan kan geschreven worden in matrixnotatie: $A.X = B$.

Als de constantenmatrix B een nulmatrix is noemen we het stelsel *homogeen*.

Als er evenveel vergelijkingen als onbekenden zijn, is de coëfficiëntenmatrix A een vierkante matrix. We noemen dan ook het stelsel een *vierkant* stelsel.

Voorbeeld 1: $\begin{cases} 3x + y - 4z = 12 \\ 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$ is een vierkant stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden.

De enige oplossing is het drietal $(3, -1, -1)$. De oplossingsverzameling is: $V = \{(3, -1, -1)\}$.

Voorbeeld 2: $\begin{cases} x + y = 4 \\ -2x - 2y = 5 \end{cases}$ is een vierkant stelsel van orde 2. Er zijn geen oplossingen: $V = \varnothing$.

Voorbeeld 3: $\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ x - y + 5z = 6 \end{cases}$ is een stelsel van twee vergelijkingen met drie onbekenden.

Er zijn oneindig veel oplossingen: $V = \{(2 - k, -4 + 4k, k) \mid\mid k \in \mathbb{R}\}$.

b) ***Gelijkwaardige stelsels***

Twee stelsels zijn *gelijkwaardig* als ze dezelfde oplossingenverzameling hebben.

Eigenschappen:

① Wissel je twee vergelijkingen in een stelsel van plaats dan bekom je een gelijkwaardig stelsel.

② Vermenigvuldig je in een vergelijking van een stelsel beide leden met eenzelfde van nul verschillend getal dan bekom je een gelijkwaardig stelsel.

③ Tel bij een vergelijking van een stelsel een veelvoud van een andere vergelijking op dan krijg je een gelijkwaardig stelsel.

Combineer je ② en ③ dan krijg je een eigenschap die ook gelijkwaardige stelsels oplevert:

❸ Vervang een vergelijking van een stelsel door de som van een van nul verschillend veelvoud van de vergelijking zelf met een veelvoud van een andere vergelijking.

Het bewijs van deze eigenschappen is triviaal!

c) ***Elementaire rij-operaties op matrices***

Deze drie eigenschappen die gelden voor stelsels, kunnen we rechtstreeks overnemen op de uitgebreide coëfficiëntenmatrix van het stelsel. We noemen ze dan de *elementaire rij-operaties*.

① Rijen van de uitgebreide matrix mogen verwisseld worden.
Notatie : R_{ij} (de i-de en j-de rij worden verwisseld)

② Een rij van de uitgebreide matrix mag vermenigvuldigd worden met $k \in \mathbb{R}_0$.
Notatie : $k.R_i$ (de i-de rij wordt vermenigvuldigd met k)

③ Een rij van de uitgebreide matrix kan vervangen worden door een lineaire combinatie van zichzelf met een andere rij. De factor die bij de rij zelf hoort moet verschillend zijn van nul.
Notatie : $k.R_i + m.R_j$ (de i-de rij wordt vervangen door k maal zichzelf vermeerderd met m maal de j-de rij, met $k \in \mathbb{R}_0$ en $m \in \mathbb{R}$).

Als we, door rij-operaties uit te voeren, de coëfficiëntenmatrix kunnen omzetten naar de eenheidsmatrix (of een matrix die daar zo goed mogelijk op lijkt) wordt ons gelijkwaardig stelsel veel eenvoudiger. De oplossing is meestal gewoon af te lezen.

Een matrix is in *rij-echelonvorm* als elke volgende rij met meer nullen begint dan de voorgaande, tenzij deze een nulrij is. Een *nulrij* is een rij met enkel nullen, als er een of meerdere nulrijen in de matrix voorkomen dan staan deze altijd onderaan. Als bovendien in elke niet-nulrij de leidende term (meest linkse term verschillend van 0) gelijk is aan 1 en in elke kolom waar een leidende 1 staat voor de rest alleen 0-en, dan is de matrix in *rijgereduceerde echelonvorm*. Deze vorm is voor elke matrix uniek.

De methode van Gauss-Jordan (eerste vorm)

Om een matrix via elementaire rij-operaties te herleiden tot zijn *rijgereduceerde echelonvorm* gaan we zeer gestructureerd te werk. We zullen dit illustreren met enkele voorbeelden:

Voorbeeld 1: Los het stelsel op $\begin{cases} 2x-y+2z=6 \\ x-2y+4z=9 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 9 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

stap 1: vertrek van de uitgebreide coëfficiëntenmatrix van het stelsel.

$$\overset{R_{12}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

stap 2: gebruik ① of ② om in de eerste rij in de eerste kolom een 1 te krijgen.

$$\underset{R_3-3R_1}{\overset{R_2-2R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & -12 \\ 0 & 7 & -13 & -25 \end{array}\right]$$

Stap 3: gebruik ③ om van alle andere elementen in de eerste kolom 0 te maken.

$$\overset{\frac{1}{3}R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 7 & -13 & -25 \end{array}\right]$$

Stap 4: gebruik ① of ② om in de tweede rij in de tweede kolom een 1 te krijgen.

$$\underset{R_3-7R_2}{\overset{R_1+2R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Stap 5: gebruik ③ om van alle andere elementen in de tweede kolom 0 te maken.

$$\overset{R_2+2R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Dit tweetal stappen blijf je nu herhalen zolang je er voor kan zorgen dat er op de i-de rij op de i-de kolom een 1 staat en overal anders in die kolom een 0.

Dit geeft ons het gelijkwaardig stelsel: $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$. De oplossingenverzameling is dus $V=\{(1,2,3)\}$.

Voorbeeld 2: Los het stelsel op $\begin{cases} 3x-7y+2z=-5 \\ -x+3y=5 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{R_{13}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & -7 & 2 & -5 \end{array}\right] \underset{R_3-3R_1}{\overset{R_2+R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right] \underset{R_3+R_2}{\overset{R_1+2R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

We krijgen nu het gelijkwaardige stelsel: $\begin{cases} x+3z=10 \\ y+z=5 \\ 0=0 \end{cases}$, of dus nog: $\begin{cases} x=10-3z \\ y=5-z \end{cases}$.

Dit stelsel heeft dus oneindig veel oplossingen. We noteren: $V=\{(10-3k,5-k,k) \mid\mid k\in\mathbb{R}\}$.

Voorbeeld 3: Los het stelsel op $\begin{cases} x-3y-z=1 \\ -2x+5y+3z=-2 \\ 4x-11y-5z=3 \end{cases}$

$$A_b=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 3 & -2 \\ 4 & -11 & -5 & 3 \end{array}\right] \underset{R_3-4R_1}{\overset{R_2+2R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \overset{R_{23}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{R_3+R_2}{\overset{R_1+3R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

We krijgen nu het gelijkwaardige stelsel: $\begin{cases} x-4z=-2 \\ y-z=-1 \\ 0=-1 \end{cases}$. Dit kan uiteraard niet, dus $V=\varnothing$.

De spilmethode (tweede vorm van de methode van Gauss-Jordan)

Het zorgen voor de enen (stappen 2 en 4 in het eerste voorbeeld boven) kan met zich meebrengen dat er al heel snel met breuken zou moeten gewerkt worden. Dit kan eenvoudig vermeden worden. We illustreren ook hier met een voorbeeld:

Voorbeeld 4: Los het stelsel op $\begin{cases} 2x-y+3z=14 \\ 3x+2y+2z=10 \\ 5x+3y-z=4 \end{cases}$

$$A_b=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 2 & 10 \\ 5 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right] \underset{2R_3-5R_1}{\overset{2R_2-3R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 14 \\ 0 & 7 & -5 & -22 \\ 0 & 11 & -17 & -62 \end{array}\right] \underset{7R_3-11R_2}{\overset{7R_1+R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 16 & 76 \\ 0 & 7 & -5 & -22 \\ 0 & 0 & -64 & -192 \end{array}\right] \underset{\frac{-R_3}{64}}{\overset{\frac{R_1}{2}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 8 & 38 \\ 0 & 7 & -5 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_2+5R_3}{\overset{R_1-8R_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{\frac{R_2}{7}}{\overset{\frac{R_1}{7}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$. We krijgen het gelijkwaardige stelsel: $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$.

De oplossingenverzameling is dus $V=\{2,-1,3\}$.

d) ***Rang van een matrix – oplosbaarheid***

Het aantal niet-nulrijen van de rijgereduceerde echelonvorm van een matrix noemen we *de rang* van die matrix. We noteren de rang van matrix M met $rg(M)$. We herbekijken nu even de voorbeelden (allemaal stelsel van $m=3$ vergelijkingen met $n=3$ onbekenden):

Voorbeelden 1 en 4: $rg\ A=rg\ A_b=n=3 \Rightarrow$ het stelsel heeft een unieke oplossing

Voorbeeld 2: $rg\ A=rg\ A_b=2, n=3 \Rightarrow$ het stelsel heeft oneindig veel oplossingen (één parameter)

Voorbeeld 3: $rg\ A=2, rg\ A_b=3 \Rightarrow$ het stelsel is strijdig

We leiden uit de voorbeelden dus deze drie eenvoudige eigenschappen af:

Stelling: Voor een stelsel met coëfficiëntenmatrix A en uitgebreide coëfficiëntenmatrix A_b met n onbekenden geldt

- $rg\ A = rg\ A_b = n \ \Rightarrow$ het stelsel heeft een unieke oplossing
- $rg\ A = rg\ A_b < n \ \Rightarrow$ het stelsel heeft oneindig veel oplossingen ($n - rg\ A$ vrijheidsgraden)
- $rg\ A < rg\ A_b \ \Rightarrow$ het stelsel is strijdig en heeft dus geen oplossingen.

e) ***Vraagstukken***

Vraagstukken geven vaak aanleiding tot stelsels. We illustreren dit met een voorbeeldje:

Voorbeeld: Een groothandel in meststoffen heeft 3 soorten tuinmest A, B en C. Ze bevatten respectievelijk 5%, 10% en 20% stikstof. Er komt nu een bestelling van 1200kg mest dat een stikstofgehalte van 15% moet hebben. Men maakt hiervoor een mengeling van de voorradige meststoffen. Om logistieke redenen wil men van soort C driemaal zoveel gebruiken als van soort A. Hoeveel kg van elke soort moet men mengen?

We nemen als onbekenden a, b, c voor de hoeveelheden meststof per soort. De gegevens vertalen zich dan tot het stelsel:

$$\begin{cases} a+b+c=1200 \\ 0,05a+0,1b+0,2c=180 \\ c=3a \end{cases} \Rightarrow A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1200 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 180 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{rref}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 240 \\ 0 & 1 & 0 & 240 \\ 0 & 0 & 1 & 720 \end{array}\right]$$

Antwoord: Ze moeten van soorten A en B telkens 240 kg gebruiken en van soort C 720 kg.

f) ***Bespreken van stelsels met parameter(s)***

Als er in de opgave van een stelsel parameters te vinden zijn dan hangt de oplosbaarheid van het stelsel uiteraard af van de waarde van die parameter. We bekijken enkele voorbeelden:

Voorbeeld 1: Bespreek het stelsel $\begin{cases} x+y+mz=1 \\ x+my+z=m \\ mx+y+z=m^2 \end{cases}$ naargelang de waarde van parameter $m \in \mathbb{R}$.

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & m^2 \end{array}\right] \underset{R_3 - mR_1}{\overset{R_2 - R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-1 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & m^2-m \end{array}\right] \underset{\substack{\frac{R_3}{1-m} \\ \boxed{m \neq 1}}}{\overset{\frac{R_2}{m-1}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+m & -m \end{array}\right]$$

$$\underset{R_3 - R_2}{\overset{R_1 - R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m+1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & m+2 & -m-1 \end{array}\right] \underset{\substack{(m+2)R_2 + R_3 \\ \boxed{m \neq -2}}}{\overset{(m+2)R_1 - (m+1)R_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} m+2 & 0 & 0 & (m+1)^2 \\ 0 & m+2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m+2 & -m-1 \end{array}\right]$$

We onderscheiden dus drie gevallen voor de oplossingenverzameling:

- $m \in \mathbb{R} \setminus \{1,-2\}$: bepaald stelsel $V = \left\{ \left(\frac{(m+1)^2}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{-m-1}{m+2} \right) \right\}$.
- $m = 1 \Rightarrow A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, dus onbepaald stelsel $V = \{(1-k-l,k,l) \parallel k,l \in \mathbb{R}\}$.
- $m = -2 \Rightarrow A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, dus vals stelsel $V = \varnothing$.

Voorbeeld 2: Bespreek $\begin{cases} x+ky=m \\ 2x+ly=1 \end{cases}$ naargelang de waarde van parameters $k,l,m \in \mathbb{R}$.

$$A_b = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & k & m \\ 2 & l & 1 \end{array}\right] \overset{R_2-2R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & k & m \\ 0 & l-2k & 1-2m \end{array}\right] \underset{\boxed{l-2k \neq 0}}{\overset{(l-2k)R_1-kR_2}{\sim}} \left[\begin{array}{cc|c} l-2k & 0 & lm-k \\ 0 & l-2k & 1-2m \end{array}\right]$$

We onderscheiden dus eerst en vooral al twee gevallen:

- $l \neq 2k$: bepaald stelsel: $V = \left\{ \left(\frac{lm-k}{l-2k}, \frac{1-2m}{l-2k} \right) \right\}$
- $l = 2k \Rightarrow A_b = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & k & m \\ 0 & 0 & 1-2m \end{array}\right]$. Binnen dit geval moeten we dus nog onderscheid maken:
  - $m = \frac{1}{2} \Rightarrow A_b = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, dus onbepaald stelsel $V = \{(1/2-k.r, r) \parallel r \in \mathbb{R}\}$
  - $m \neq \frac{1}{2} \Rightarrow A_b \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, dus vals stelsel $V = \varnothing$.

5) **Inverse matrix van een vierkante matrix**

Definitie

De inverse matrix A^{-1} van een vierkante matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is die matrix waarvoor geldt:

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n .$$

Het is dus het symmetrische element van A t.o.v. e matrixvermenigvuldiging.

Voorbeeld: Als $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ dan is $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -5 & 10 & -3 \\ -3 & 6,5 & -2 \end{bmatrix}$.

Merk op dat niet elke matrix een inverse heeft. Zo is het onmogelijk om voor $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$ een inverse te vinden. Probeer dit zelf maar eens.

Matrices die een inverse hebben noemen we *inverteerbare* of *reguliere* matrices. Matrices die geen inverse hebben noemen we *niet-inverteerbaar* of *singulier.*

Berekening van een inverse matrix

Om de inverse $A^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$ van een matrix $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ te berekenen, kunnen we de matrixvergelijking $A.A^{-1} = I$ oplossen. Dit zou geven:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} = 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} = 0 \\ a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + a_{13}x_{32} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{32} = 1 \\ a_{31}x_{12} + a_{32}x_{22} + a_{33}x_{32} = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} a_{11}x_{13} + a_{12}x_{23} + a_{13}x_{33} = 0 \\ a_{21}x_{13} + a_{22}x_{23} + a_{23}x_{33} = 0 \\ a_{31}x_{13} + a_{32}x_{23} + a_{33}x_{33} = 1 \end{cases}$$

Deze drie stelsels hebben telkens dezelfde coëfficiëntenmatrix. We kunnen dus om ze alle drie tegelijk op te lossen de drie uitgebreide coëfficiëntenmatrices, die gegeven worden door:

$$A_{b_1} = \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right],\ A_{b_2} = \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right] \text{ en } A_{b_3} = \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{array}\right],$$

te bundelen tot één grote uitgebreide coëfficiëntenmatrix en dan deze matrix reduceren tot zijn rij-echelonvorm. We krijgen dan dus samengevat:

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{rref}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 1 & 0 & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & 1 & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{array}\right]$$

Dit natuurlijk op voorwaarde dat de matrix A regulier is. Anders is het stelsel vals. Merk op dat in principe dan ook moet worden gecontroleerd dat $A^{-1}.A = I$, maar we zullen later zien dat dit niet nodig is.

We hebben dus voor 3×3 -matrices aangetoond (en de stelling kan eenvoudig uitgebreid worden naar hogere dimensies) dat:

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \text{ is regulier} \Leftrightarrow \text{de rijgereduceerde echelonvorm van } A \text{ is de eenheidsmatrix}}$$

We herbekijken het voorbeeld uit de vorige paragraaf:

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R_3-5R_1}{\overset{R_2-2R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & -20 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{4R_3-13R_2}{\overset{2R_1+R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & -13 & 4 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_2-3R_3}{\overset{R_1+R_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 6 & -12 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -20 & 40 & -12 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & -13 & 4 \end{array}\right] \underset{-R_3/2}{\overset{R_1/2,\ R_2/4}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6,5 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -5 & 10 & -3 \\ -3 & 6,5 & -2 \end{bmatrix}$$

Eigenschappen

Eigenschap ①: De inverse van een reguliere matrix is uniek.

Bewijs: Stel dat A twee inversen zou hebben: M_1 en M_2. Den geldt per definitie dat:

$A.M_1 = M_1.A = I$ en $A.M_2 = M_2.A = I$, zodat

$$M_2 = I\cdot M_2 = (M_1\cdot A)\cdot M_2 = M_1\cdot(A\cdot M_2) = M_1\cdot I = M_1. \ \square$$

Eigenschap ②: Een eenheidsmatrix is zijn eigen inverse.

Bewijs: $I\cdot I = I$ □

Eigenschap ③: Als je een reguliere matrix tweemaal inverteert krijg je weer de matrix zelf.

Bewijs: $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = 1$ (de definitie is perfect symmetrische voor A en A^{-1}). □

Eigenschap ④: Als $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reguliere matrices zijn, dan geldt: $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$.

Bewijs: $(A\cdot B)\cdot(B^{-1}\cdot A^{-1}) = A\cdot(B\cdot B^{-1})\cdot A^{-1} = A\cdot I\cdot A^{-1} = A\cdot A^{-1} = I$ en

$$(B^{-1}\cdot A^{-1})\cdot(A\cdot B) = B^{-1}\cdot(A^{-1}\cdot A)\cdot B = B^{-1}\cdot I\cdot B = B^{-1}\cdot B = I. \ \square$$

Eigenschap ⑤: Als $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, en A is regulier dan geldt: $A \cdot B = A \cdot C \Leftrightarrow B = C$

Bewijs: Dat "$\Leftarrow$" geldt is wel duidelijk (en daarvoor hoeft A zelfs niet regulier te zijn).

"$\Rightarrow$": dit kan bewezen worden door beide leden links te vermenigvuldigen met A^{-1}, dus

$$\begin{aligned} A \cdot B = A \cdot C \quad &\Rightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot (A \cdot C) \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot B = (A^{-1} \cdot A) \cdot C \\ &\Rightarrow I \cdot B = I \cdot C \Rightarrow B = C \quad \square \end{aligned}$$

Oplossen van een stelsel van Cramer

Een *Stelsel van Cramer* is een stelsel van n lineaire vergelijkingen in n onbekenden waarvan de coëfficiëntenmatrix regulier is. Dan geldt dus:

$$A \cdot X = B \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}B \Leftrightarrow I \cdot X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B .$$

Voorbeeld: Los het stelsel van Cramer op $\begin{cases} x - 2y + 4z = 1 \\ 2x + 2z = 2 \\ 5x + 3y = -3 \end{cases}$.

De coëfficiëntenmatrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ heeft als inverse matrix $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -5 & 10 & -3 \\ -3 & 6,5 & -2 \end{bmatrix}$. Er geldt

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -5 & 10 & -3 \\ -3 & 6,5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 24 \\ 16 \end{bmatrix}$. Dus $V = \{(-15, 24, 16)\}$.