

1. Algebraïsche functies

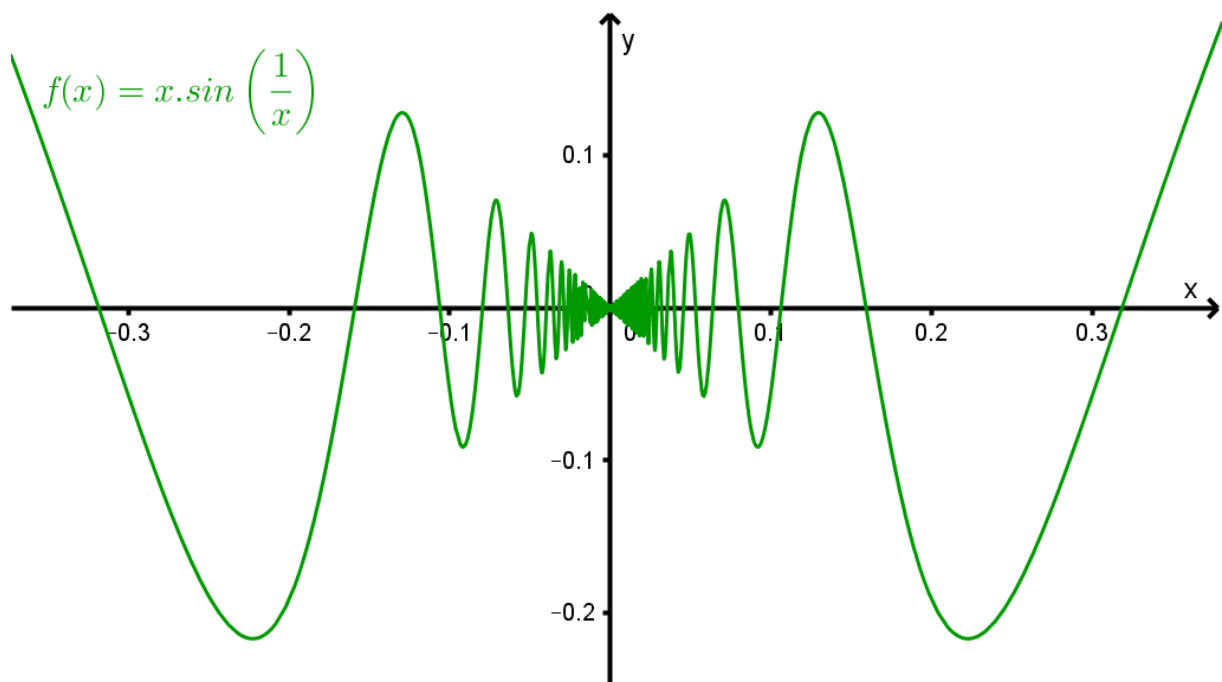


Sir Isaac Newton



Gottfried Wilhelm Leibniz

1.1. Algemene begrippen



1) Definities in verband met functies

a) Het functiebegrip

Een *relatie* is een verzameling koppels (x, y) , waarbij alle x -waarden samen een verzameling vormen die we het *definitiegebied* of *domein* noemen, en alle y -waarden een verzameling vormen die we de *waardenverzameling* of *beeld* noemen. Als het verband tussen x -waarden en y -waarden in een wiskundige formule kan worden gegoten, dan noemen we die het *relatievoorschrift*.

Voorbeeld 1:

Beschouw de relatie $R_1 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = 25\}$.

Hier is het voorschrift dus $x^2 + y^2 = 25$. Deze relatie bestaat uit 12 koppels gehele getallen:

$$R_1 = \{(0, 5), (0, -5), (5, 0), (-5, 0), (3, 4), (3, -4), (-3, 4), (-3, -4), (4, 3), (4, -3), (-4, 3), (-4, -3)\}.$$

Het domein en het beeld zijn de verzamelingen $\text{dom } R_1 = \text{bld } R_1 = \{-5, -4, -3, 0, 3, 4, 5\}$.

Als elke x -waarde uit het domein hoogstens één keer voorkomt dan noemen we die relatie een *functie*. Voorbeeld R_1 is dus geen functie, maar voorbeeld R_2 wel:

Voorbeeld 2:

Beschouw de relatie $R_2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y = 2x + 1\}$ (y zit dus automatisch ook in $\mathbb{N}$).

Hier is het voorschrift $y = 2x + 1$. Deze relatie bestaat uit oneindig veel koppels natuurlijke getallen:

$$R_2 = \{(0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7), \dots\}.$$

Het domein is $\text{dom } R_2 = \mathbb{N}$ en het beeld is de verzameling der oneven natuurlijke getallen.

Wij zullen in deze cursus enkel *reële functies* beschouwen. Dit zijn functies waarbij zowel het domein als het beeld deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}$.

De meeste functies kunnen eenvoudig worden voorgesteld door een functievoorschrift. We definiëren een reële functie dan ook in symbolen als: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \rightarrow f(x)$. We zullen in deze cursus ook vaak een functie vereenzelvigen met zijn functievoorschrift.

Voorbeelden:

- $f(x) = 3x^2 - x + 7$ is een veeltermfunctie van de tweede graad.
- $g(t) = \frac{3t-4}{6t+1}$ is een rationale functie, meer specifiek zelfs een homografische functie.
- $p(z) = 2^z$ is een exponentiële functie.

In verband met functies zijn volgende begrippen heel belangrijk:

- De *functiewaarde* van een reëel getal a bij een functie f is het reëel getal dat je bekomt door de veranderlijke in het functievoorschrift te veranderen in a . We noteren dit met $f(a)$.

Voorbeeld: Als $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$ dan is $f(6) = \frac{6^2}{6+3} = 4$.

- Het *domein* van een functie f is die deelverzameling van elementen van $\mathbb{R}$ waarvoor je een functiewaarde kan berekenen. We noteren deze verzameling met $\text{dom } f$.

In symbolen: $\text{dom } f = \{a \in \mathbb{R} \mid \exists b \in \mathbb{R} : f(a) = b\}$.

Voorbeeld: Als $f(x) = \sqrt{x}$ dan is $\text{dom } f = \mathbb{R}^+$.

- Het *beeld* van een functie is die deelverzameling van elementen van $\mathbb{R}$ die een functiewaarde zijn. We noteren deze verzameling met $\text{bld } f$.

In symbolen: $\text{bld } f = \{b \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R} : f(a) = b\}$.

Voorbeeld: Als $f(x) = x^2 + 2$ dan is $\text{bld } f = [2, +\infty[$.

- De *nulwaarden* van een functie zijn die elementen uit het domein van de functie waarvoor de functiewaarde 0 is. We noteren deze verzameling met $f^{-1}(0)$.

Voorbeeld: Als $f(x) = x^2 + 3x - 4$ dan is $f^{-1}(0) = \{-4; 1\}$.

Dan zijn er nog enkele begrippen die belangrijk zijn in verband met functies, die je zeker moeten kunnen aflezen aan de hand van de grafiek van een functie:

- Het *tekenverloop* van een functie is een duidelijke tabel waarin je aangeeft wat het teken is van de functiewaarden voor alle waarden uit het domein.
- Het *verloop* (*stijgen en dalen*) van een functie is een duidelijke tabel waarin je aangeeft in welke intervallen de functie stijgt, daalt of constant blijft.
- Een functie f is (strikt) *stijgend* in een interval $[a, b] \subset \text{dom } f$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- Een functie f is (strikt) *dalend* in een interval $[a, b] \subset \text{dom } f$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Een uitgewerkt voorbeeld: Bespreek de functie $f(x) = 6x - 4 - x^2$, en schets de grafiek.

We berekenen de top: $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-2} = 3$ en $\beta = f(a) = 6 \cdot 3 - 4 - 3^2 = 5 \rightarrow T(3, 5)$,

en de nulpunten: $-x^2 + 6x - 4 = 0 \xrightarrow{\Delta=20} x = \frac{-6 \pm \sqrt{20}}{-2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{5}}{-2} = 3 \mp \sqrt{5} \begin{cases} x_1 = 3 - \sqrt{5} \\ x_2 = 3 + \sqrt{5} \end{cases}$

- Domein: $\text{dom } f = \mathbb{R}$

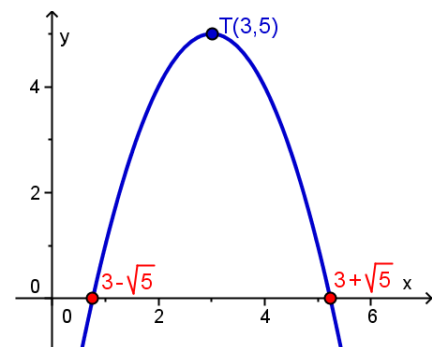
- Beeld: $\text{bld } f =]-\infty, 5]$

- Stijgen en dalen:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	MAX (5)	$\searrow$

- Tekenverloop:

x	$-\infty$	$3-\sqrt{5}$	$3+\sqrt{5}$	$+\infty$	
$6x-4-x^2$	-	0	+	0	-



Het hoofddoel van de cursus wiskunde in de vijfdes zal onder meer zijn deze bespreking voor alle elementaire functies algebraïsch te kunnen doen.

b) Extrema

De functie f bereikt een *relatief minimum* in c

$$\Leftrightarrow \exists a, b \in \text{dom } f \text{ (met } c \in]a, b[): \forall x \in [a, b] \setminus \{c\} : f(x) > f(c).$$

De functie f bereikt een *relatief maximum* in c

$$\Leftrightarrow \exists a, b \in \text{dom } f \text{ (met } c \in]a, b[): \forall x \in [a, b] \setminus \{c\} : f(x) < f(c).$$

De functie f bereikt een *globaal minimum* in c

$$\Leftrightarrow \forall x \in \text{dom } f : f(x) \geq f(c).$$

De functie f bereikt een *globaal maximum* in c

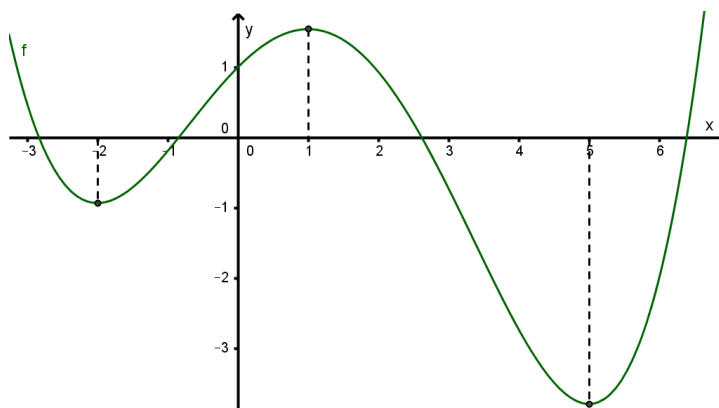
$$\Leftrightarrow \forall x \in \text{dom } f : f(x) \leq f(c).$$

Voorbeeld:

Hiernaast staat de grafiek getekend van een vierdegraadsveelterm.

De functie bereikt een:

- lokaal minimum voor $x = -2$,
- lokaal maximum voor $x = 1$,
- globaal minimum voor $x = 5$.



c) Differentiequotiënt

Het differentiequotiënt van een functie in een interval geeft de gemiddelde verandering weer van die functie in dat interval. In wiskundige formule wordt dit:

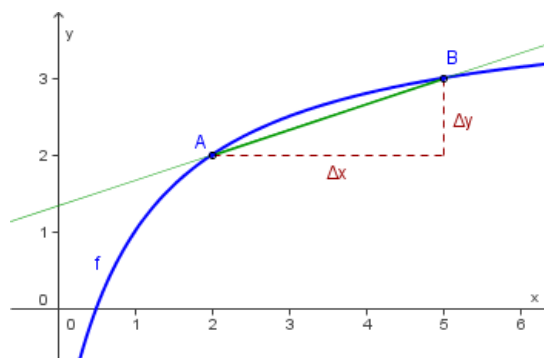
Het differentiequotiënt van de functie $y = f(x)$ in het interval $[a, b]$ is $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{[a, b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Grafisch gezien is het de richtingscoëfficiënt van de rechte die de punten $A(a, f(a))$ en $B(b, f(b))$ verbindt. Het kan dus geïnterpreteerd worden als de gemiddelde helling in dat interval.

Voorbeeld: Als $f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$, bereken dan het differentiequotiënt voor het interval $[2, 5]$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{[2, 5]} &= \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} \\ &= \frac{3 - 2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Hiernaast op de figuur zie je dat dit de richtingscoëfficiënt is van de rechte AB .



d) Symmetrie

Even en oneven functies

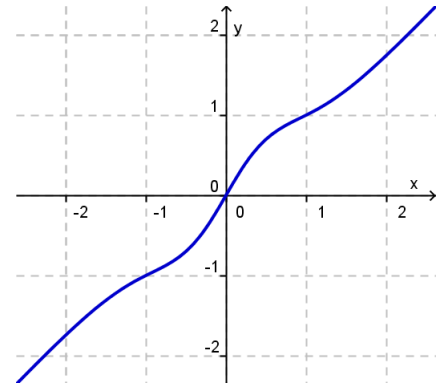
Als voor een functie f geldt dat $\forall x \in \text{dom } f : f(-x) = f(x)$, dan is f een *even functie*. De grafiek van f is dan symmetrisch t.o.v. de y-as.

Als voor een functie f geldt dat $\forall x \in \text{dom } f : f(-x) = -f(x)$, dan is f een *oneven functie*. De grafiek van f is dan symmetrisch t.o.v. de oorsprong.

Voorbeeld: De functie $f : x \rightarrow \frac{x \cdot \sqrt{x^4 + 3}}{x^2 + 1}$ is een oneven functie,

$$\text{want: } f(-x) = \frac{-x \cdot \sqrt{(-x)^4 + 3}}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x \cdot \sqrt{x^4 + 3}}{x^2 + 1} = -f(x).$$

Je ziet de symmetrie duidelijk op de grafiek van de functie rechts.



Symmetrieassen

De rechte met vergelijking $x = a$ is een symmetrieas van de grafiek van de functie f als en slechts als geldt:

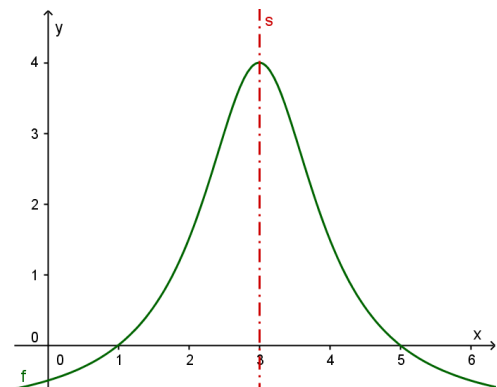
$$\forall x \in \mathbb{R} : a - x \in \text{dom } f \Rightarrow f(a - x) = f(a + x).$$

Voorbeeld: De functie $f(x) = \frac{5}{x^2 - 6x + 10} - 1$ vertoont symmetrie t.o.v. de rechte $s \leftrightarrow x = 3$, want:

$$f(3 - x) = \frac{5}{(3 - x)^2 - 6(3 - x) + 10} - 1 = \frac{5}{x^2 + 1} - 1, \text{ en}$$

$$f(3 + x) = \frac{5}{(3 + x)^2 - 6(3 + x) + 10} - 1 = \frac{5}{x^2 + 1} - 1,$$

$$\text{dus } f(3 - x) = f(3 + x).$$



Symmetriepunten

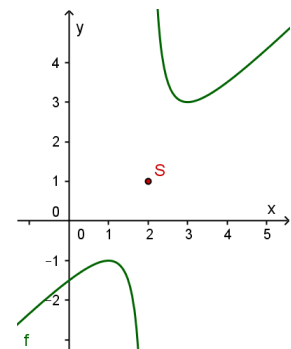
Het punt $S(p, q)$ is een symmetriepunt van de grafiek van de functie f als en slechts als geldt:

$$\forall x \in \mathbb{R} : p - x \in \text{dom } f \Rightarrow \frac{f(p - x) + f(p + x)}{2} = q.$$

Voorbeeld: De functie $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$ vertoont symmetrie t.o.v. het punt $S(2, 1)$, want:

$$\begin{aligned} f(2 - x) + f(2 + x) &= \frac{(2 - x)^2 - 3(2 - x) + 3}{(2 - x) - 2} + \frac{(2 + x)^2 - 3(2 + x) + 3}{(2 + x) - 2} \\ &= \frac{x^2 - x + 1}{-x} + \frac{x^2 + x + 1}{x} = \frac{2x}{x} = 2 \quad (\text{met } x \neq 0), \end{aligned}$$

$$\text{dus } \frac{f(2 - x) + f(2 + x)}{2} = 1.$$

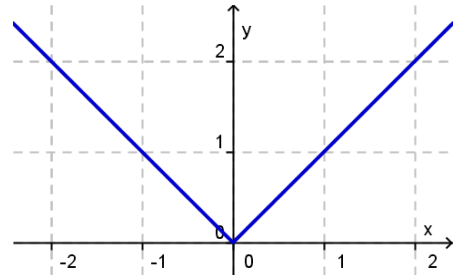


2) Enkele speciale functies

a) De absolute waarde functie

De *absolute waarde* van een getal is dat getal zonder toestandsteken. We noteren de absolute waarde van a als $|a|$, of als $\text{abs}(a)$. In symbolen kan je dit op 2 elegante manieren definiëren:

- $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = \begin{cases} x & , x \in \mathbb{R}^+ \\ -x & , x \in \mathbb{R}_0^- \end{cases}$
- $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = \sqrt{x^2}$



Enkele voorbeelden: $|2| = 2$, $|-4| = 4$, $|0| = 0$.

De grafiek zie je hiernaast getekend.

Voor domein en beeld geldt: $\text{dom abs} = \mathbb{R}$, $\text{bld abs} = \mathbb{R}^+$.

Voorbeeld: Los op: $8|x+1| - 20|x| + 5|2x-1| - |2x-3| = 0$

We doen eerst een tekenverloop van de veeltermen waarvan we de absolute waarde nemen:

x	$-\infty$	-1		0		$1/2$		$3/2$	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
x	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$2x-1$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$2x-3$	-	-	-	-	-	-	-	0	+

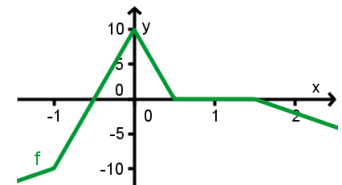
We doen dan een gevallenonderzoek naar de mogelijke liggingen van x :

- $x \leq -1$: $8(-x-1) - 20(-x) + 5(-2x+1) - (-2x+3) = 0 \Leftrightarrow 4x-6=0 \Leftrightarrow x = 3/2$
- $-1 \leq x \leq 0$: $8(x+1) - 20(-x) + 5(-2x+1) - (-2x+3) = 0 \Leftrightarrow 20x+10=0 \Leftrightarrow x = -1/2$
- $0 \leq x \leq 1/2$: $8(x+1) - 20(x) + 5(-2x+1) - (-2x+3) = 0 \Leftrightarrow -20x+10=0 \Leftrightarrow x = 1/2$
- $1/2 \leq x \leq 3/2$: $8(x+1) - 20(x) + 5(2x-1) - (-2x+3) = 0 \Leftrightarrow 0x=0 \Leftrightarrow x \in [1/2, 3/2]$
- $x \geq 3/2$: $8(x+1) - 20(x) + 5(2x-1) - (2x-3) = 0 \Leftrightarrow -4x+6=0 \Leftrightarrow x = 3/2$

Nemen we de unie van alle oplossingen dan vinden we:

$$V = \{-1/2\} \cup [1/2, 3/2]$$

We kunnen deze oplossing ook grafisch controleren (zie grafiek).



Met behulp van deze net geïllustreerde techniek kan je elke vergelijking waarin een absolute waarde optreedt oplossen.

Stelling (de driehoeksongelijkheid): $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x+y| \leq |x| + |y|$

Bewijs: Het is duidelijk dat geldt: $\forall x \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R}^+ : -a \leq x \leq a \Leftrightarrow |x| \leq a$ (*). Dus:

$$\begin{aligned} & -|x| \leq x \leq |x| \wedge -|y| \leq y \leq |y| \\ \Leftrightarrow & -|x| - |y| \leq x+y \leq |x| + |y| \\ \Leftrightarrow & -(|x| + |y|) \leq x+y \leq |x| + |y| \end{aligned}$$

waaruit via (*) onmiddellijk het gestelde volgt.

b) De functie van Legendre of integerfunctie

De functie wordt genoteerd met $\lfloor \dots \rfloor$, en definiëren we: $\forall x \in \mathbb{R} : \lfloor x \rfloor = z \Leftrightarrow z \leq x < z+1 \wedge z \in \mathbb{Z}$.

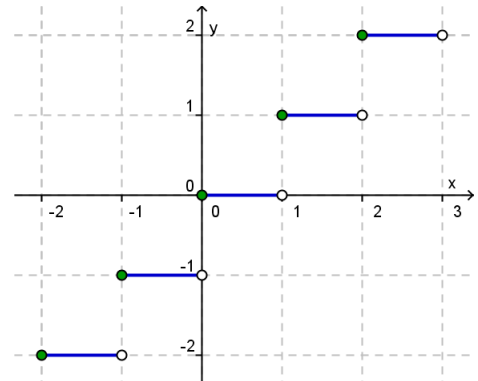
Een alternatieve notatie is $G(x)$, dus $G(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} : x \rightarrow \lfloor x \rfloor$.

In woorden is deze definitie eenvoudiger: de functie van Legendre is de functie die elk reëel getal afbeeldt op het grootste gehele getal dat kleiner of gelijk is aan dat reële getal.

Enkele voorbeelden: $\lfloor 2,7 \rfloor = 2$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$, $\lfloor 10 \rfloor = 10$.

De grafiek van deze functie zie je rechts. Let vooral op het gebruik van de volle en de holle bollen. Vol wil zeggen dat het effectief een functiewaarde is, en hol wil zeggen dat het net *geen* functiewaarde is.

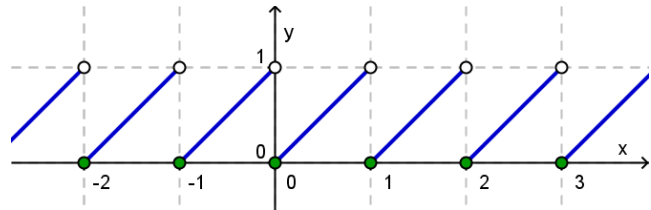
Voor domein en beeld geldt: $\text{dom } G = \mathbb{R}$, $\text{bld } G = \mathbb{Z}$.



c) De mantissefunctie

Deze functie wordt gedefinieerd als:

$\forall x \in \mathbb{R} : M(x) = x - \lfloor x \rfloor$. Het is dus het decimale deel van een getal dat we verkrijgen door van dat getal het grootste geheel getal kleiner dan dat getal er van af te trekken.



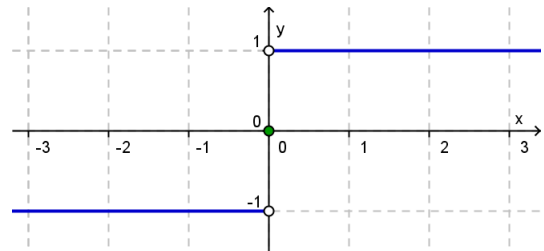
Enkele voorbeelden: $M(3,48) = 0,48$, $M(-2) = 0$, $M(-3,41) = 0,59$.

Voor domein en beeld geldt: $\text{dom } M = \mathbb{R}$, $\text{bld } M = [0,1[$.

d) De signumfunctie

Deze functie wordt gedefinieerd als:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{R}_0^+ \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x \in \mathbb{R}_0^- \end{cases}$$



Enkele voorbeelden: $\text{sign}(\pi) = 1$, $\text{sign}(-2/7) = -1$.

Voor domein en beeld geldt: $\text{dom } \text{sign} = \mathbb{R}$, $\text{bld } \text{sign} = \{-1, 0, 1\}$.

3) Bewerkingen met functies

a) De som van twee functies

We definiëren de *som van twee functies* als de functie die we bekomen door de functievoorschriften van de twee gegeven functies op te tellen.

In symbolen: $f + g : x \rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Voor het domein geldt: $\text{dom } f + g = \text{dom } f \cap \text{dom } g$.

b) Het product van een functie met een scalair

Een *scalair* is letterlijk een schaalfactor. In onze context is dit altijd een reëel getal.

We definiëren *het product van een functie met een scalair* als de functie die we bekomen door het functievoorschrift van de gegeven functie te vermenigvuldigen met de gegeven scalair.

In symbolen: $r.f : x \rightarrow (r.f)(x) = r.f(x)$.

Voor het domein geldt: $\text{dom } r.f = \text{dom } f$.

c) Het product van twee functies

We definiëren *het product van twee functies* als de functie die we bekomen door de functievoorschriften van de twee gegeven functies te vermenigvuldigen.

In symbolen: $f.g : x \rightarrow (f.g)(x) = f(x).g(x)$.

Voor het domein geldt: $\text{dom } f.g = \text{dom } f \cap \text{dom } g$.

d) Het quotiënt van twee functies

We definiëren *het quotiënt van twee functies* als de functie die we bekomen door de functievoorschriften van de twee gegeven functies te delen door elkaar.

In symbolen: $\frac{f}{g} : x \rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Voor het domein geldt: $\text{dom } \frac{f}{g} = \text{dom } f \cap \text{dom } g \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$.

(Het is duidelijk dat deze quotiëntfunctie niet gedefinieerd is in de nulpunten van g .)

e) De samenstelling van twee functies

Voor twee gegeven functies f en g definiëren we de *samenstelling* $g \circ f$ als de verzameling koppels $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ waarvoor er een $z \in \mathbb{R}$ bestaat zodat $(x, z) \in f$ en $(z, y) \in g$.

Anders gezegd geldt in symbolen dat: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Voorbeeld: Beschouw $f(x) = x + 3$ en $g(x) = x^2$. We bekijken nu de functies $g \circ f$ en $f \circ g$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 3.$$

We kunnen dus meteen opmerken dat het samenstellen van functies **niet** commutatief is!

f) De inverse van een functie

De *inverse* f^{-1} van een functie f definiëren we als de relatie die bestaat uit de verzameling koppels $(y, x) \in \mathbb{R}^2$ waarvoor geldt dat $(x, y) \in f$.

In symbolen is dit: $f^{-1} = \{(y, x) \mid y = f(x)\}$ of anders geschreven $f^{-1} = \{(x, y) \mid x = f(y)\}$.

Enkele eigenschappen zijn meteen duidelijk:

- $(f^{-1})^{-1} = f$.
- $\text{dom } f^{-1} = \text{bld } f$ en $\text{bld } f^{-1} = \text{dom } f$.
- De inverse van een functie hoeft niet altijd zelf een functie te zijn.

De inverse relatie van een functie is opnieuw een functie als er geen twee waarden uit het domein zijn die hetzelfde beeld hebben. We noemen zo een functie omkeerbaar, en noemen de inverse relatie dan ook de inverse functie.

Voorbeeld 1: We bepalen de inverse van de functie $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

Om de inverse te bepalen is het eenvoudig de functie te beschouwen als verzameling koppels:

$$f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{2x-1}{x+1} \right\} \Leftrightarrow f^{-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{2y-1}{y+1} \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{-x-1}{x-2} \right\}$$

$$(\text{Want: } x = \frac{2y-1}{y+1} \Leftrightarrow x(y+1) = 2y-1 \Leftrightarrow xy-2y = -x-1 \Leftrightarrow y(x-2) = -x-1 \Leftrightarrow y = \frac{-x-1}{x-2}).$$

Hier is de functie dus wel degelijk omkeerbaar.

Voorbeeld 2: We bepalen de inverse van de functie $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

$$f^{-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2 - 4y + 5 \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2 \pm \sqrt{x-1} \right\}$$

$$(\text{Want: } x = y^2 - 4y + 5 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 5 - x = 0 \stackrel{\Delta=4x-4}{\Leftrightarrow} y = \frac{4 \pm \sqrt{4x-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{x-1})$$

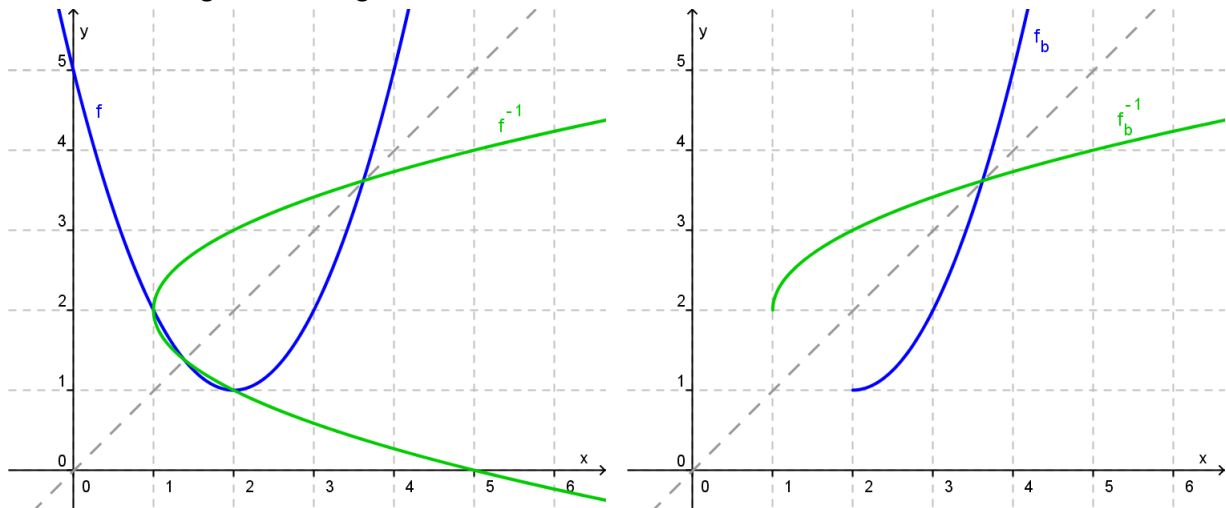
Hier is de inverse relatie dus geen functie. We proberen het domein van f nu te begrenzen opdat de functie wel omkeerbaar zou zijn!

Stel dus $f_b = x^2 - 4x + 5$, met $x \geq 2$. Dan wordt:

$$f_b = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 4x + 5 \wedge x \geq 2 \right\}. \text{ De inverse relatie wordt dan:}$$

$$f_b^{-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2 - 4y + 5 \wedge y \geq 2 \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2 + \sqrt{x-1} \right\}$$

We stellen deze grafieken nu grafisch voor:



Op de linkse grafiek zien we inderdaad bevestigd dat de inverse relatie f^{-1} geen functie is, terwijl de inverse f_b^{-1} van de begrensde functie f_b dat duidelijk wel is.

Wat verder opvalt is dat de grafieken van inverse relaties (of functies) elkaars spiegelbeeld zijn ten opzichte van de eerste bissectrice (de rechte met vergelijking $y = x$). Dit is natuurlijk logisch want

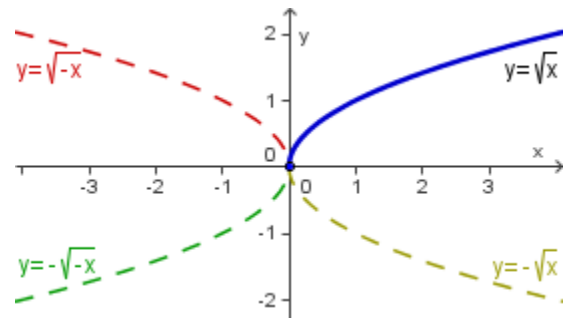
we draaien bij inversie de rollen van x en y om, en dat is net wat spiegelen om de eerste bissectrice doet (die spiegeling beeldt de x -as af op de y -as en omgekeerd).

4) Elementaire transformaties

a) Invloed van het teken

Op de figuur zie je de grafieken van vier functies getekend. We gebruiken deze om het effect na te gaan van het toestandsteken (+ of -) in het functievoorschrift:

- De grafieken van $y = f(x)$ en $y = -f(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. de x -as. We noteren deze spiegeling met S_x .
- De grafieken van $y = f(x)$ en $y = f(-x)$ zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. de y -as. We noteren deze spiegeling met S_y .
- De grafieken van $y = f(x)$ en $y = -f(-x)$ zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. de oorsprong. We noteren deze spiegeling met S_o .



b) Invloed van constanten op een functievoorschrift

Verticaal uitrekken (of inkrimpen)

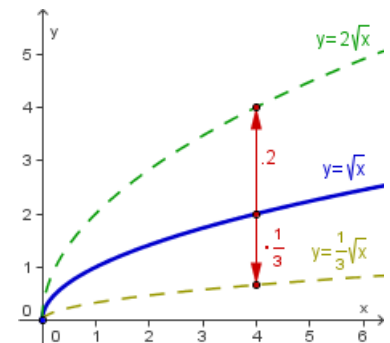
We bekijken de invloed van parameter $a \in \mathbb{R}_0^+$ op het functievoorschrift $y = a \cdot f(x)$.

Op de figuur hiernaast zie je de grafieken getekend van $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ en $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$. We besluiten:

We bekomen de grafiek van $y = a \cdot f(x)$ door de grafiek van $f(x)$ uit te rekken in de richting van de y -as met factor a .

(als $0 < a < 1$ spreken we van inkrimpen met factor $\frac{1}{a}$).

We noteren deze transformatie korter als $u_y(a)$.



Horizontaal uitrekken (of inkrimpen)

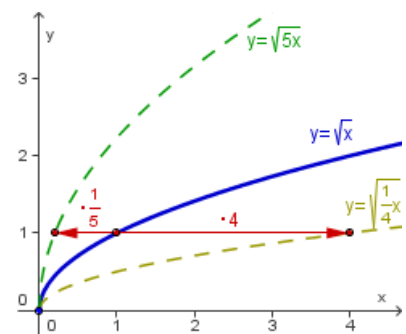
We bekijken de invloed van parameter $b \in \mathbb{R}_0^+$ op het functievoorschrift $y = f(b \cdot x)$.

Op de figuur hiernaast zie je de grafieken getekend van $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{5x}$ en $y = \sqrt{\frac{1}{4}x}$. We besluiten:

We bekomen de grafiek van $y = f(b \cdot x)$ door de grafiek van $f(x)$ uit te rekken in de richting van de x -as met factor $1/b$.

(als $b > 1$ spreken we ook van inkrimpen met factor b).

We noteren deze transformatie korter als $u_x(1/b)$.



Horizontaal verschuiven

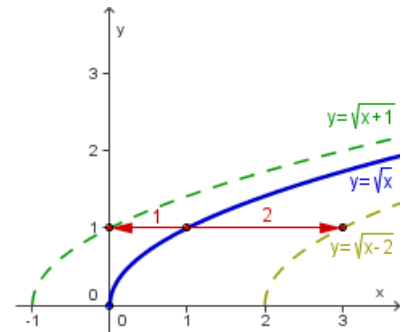
We bekijken de invloed van parameter $c \in \mathbb{R}$ op het functievoorschrift $y = f(x+c)$.

Op de figuur hiernaast zie je de grafieken getekend van $y = \sqrt{x}$,
 $y = \sqrt{x+1}$ en $y = \sqrt{x-2}$. We besluiten:

We bekomen de grafiek van $y = f(x+c)$ door de grafiek van $f(x)$ met c eenheden naar links te schuiven.

(als $c < 0$ schuiven we $|c|$ eenheden naar rechts).

We noteren deze transformatie korter als $\vec{v}(-c, 0)$.



Verticaal verschuiven

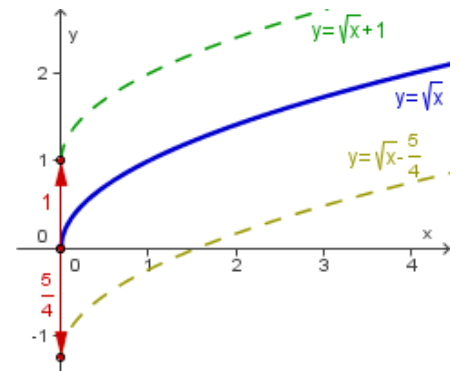
We bekijken de invloed van parameter $d \in \mathbb{R}$ op het functievoorschrift $y = f(x) + d$.

Op de figuur hiernaast zie je de grafieken getekend van $y = \sqrt{x}$,
 $y = \sqrt{x} + 1$ en $y = \sqrt{x} - \frac{5}{4}$. We besluiten:

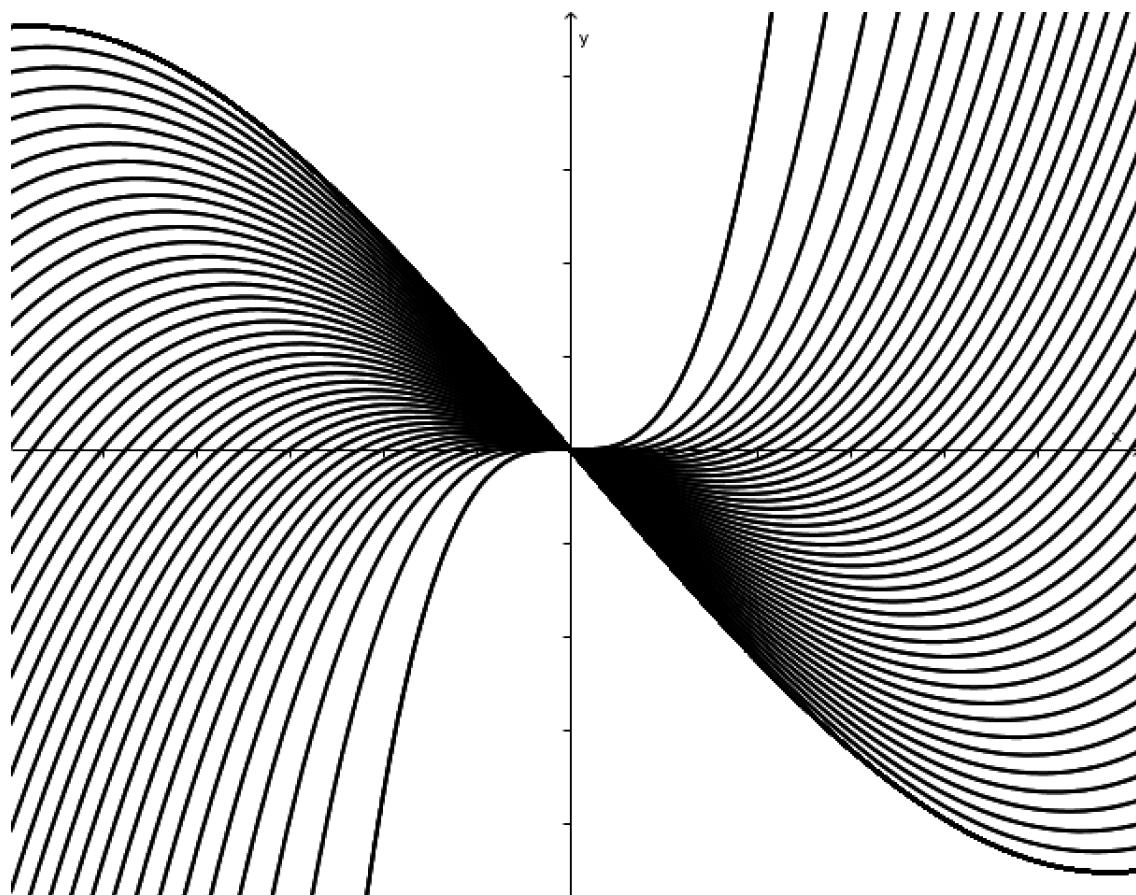
We bekomen de grafiek van $y = f(x) + d$ door de grafiek van $f(x)$ met d eenheden naar boven te schuiven.

(als $d < 0$ schuiven we $|d|$ eenheden naar onder).

We noteren deze transformatie korter als $\vec{v}(0, d)$.



1.2. Veeltermfuncties



1) Definities en notatie

Een *veeltermfunctie* in de veranderlijke x met reële coëfficiënten is een uitdrukking van de vorm:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \text{ met } a_n \in \mathbb{R}_0; a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}.$$

De reële getallen $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ noemen we de *coëfficiënten* van die veelterm.

De *graad* van een veelterm is de hoogst voorkomende exponent n (waarvan de coëfficiënt $\neq 0$ is).

De verzameling veeltermfuncties noteren we met de verzameling waaruit de coëfficiënten komen en de variabele tussen rechte haakjes: in ons geval dus meestal $\mathbb{R}[x]$.

2) Deelbaarheid bij veeltermen

a) De Euclidische deling

De definitie van Euclidische deling van veeltermen herinneren we ons uit de tweede graad:

We noemen $Q(x)$ en $R(x)$ respectievelijk het quotiënt en de rest bij Euclidische deling van het deeltal $A(x)$ door de deler $D(x)$ als en slechts als geldt:

$$A(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x), \text{ met } gr(R(x)) < gr(D(x)) \text{ of } R(x) = 0.$$

Quotiënt en rest kan je vinden met het algoritme van de Euclidische deling, dat we hier herhalen met een voorbeeld: de deling van $A(x) = 6x^4 - 17x^3 + 20x^2 - 15x + 1$ door $D(x) = 2x^2 - x + 3$.

$6x^4$	$-17x^3$	$+20x^2$	$-15x$	$+1$	$2x^2$	$-x$	$+3$
$6x^4$	$-3x^3$	$+9x^2$			$3x^2$	$-7x$	$+2$
	$-14x^3$	$+11x^2$	$-15x$	$+1$			
	$-14x^3$	$+7x^2$	$-21x$				
		$4x^2$	$+6x$	$+1$			
		$4x^2$	$-2x$	$+6$			
			$8x$	-5			

Voor het quotiënt en de rest vinden we dus als uitkomst: $Q(x) = 3x^2 - 7x + 2$ en $R(x) = 8x - 5$.

Dit algoritme zullen we vaak nodig hebben bij het onderzoeken van rationale functies.

b) De reststelling

Ook van vorig jaar herinneren we ons de reststelling.

De reststelling: De rest bij deling van een veelterm $A(x)$ door een deler van de vorm $D(x) = x - a$ (met $a \in \mathbb{R}$) wordt gegeven door de functiewaarde $A(a)$.

Deze stelling heeft als onmiddellijk gevolg dat $(x - a) \mid P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$. Dit laat ons toe veeltermen te ontbinden in factoren, met behulp van het algoritme van Horner.

c) Ontbinden in factoren

Het gevolg van de reststelling zegt in woorden dat we een factor $(x - a)$ kunnen afzonderen bij een veeltermfunctie als en slechts als a een nulpunt is van die veeltermfunctie. We herhalen deze werkwijze aan de hand van een voorbeeld: de ontbinding van $6x^4 + 13x^3 - 22x^2 + 13x - 28$.

De nulpunten (die je vindt met je GRM) zijn $-\frac{7}{2}$ en $\frac{4}{3}$.

$-\frac{7}{2}$	6	13	-22	13	-28	Het eerste algoritme van Horner (boven) geeft:
		-21	28	-21	28	$6x^4 + 13x^3 - 22x^2 + 13x - 28 = \left(x + \frac{7}{2}\right)(6x^3 - 8x^2 + 6x - 8)$
$\frac{4}{3}$	6	-8	6	-8	0	Onmiddellijk nog eens Horner toepassen geeft:
		8	0	8		$6x^3 - 8x^2 + 6x - 8 = \left(x - \frac{4}{3}\right)(6x^2 + 6)$
	6	0	6	0		

Dus: $6x^4 + 13x^3 - 22x^2 + 13x - 28 = \left(x + \frac{7}{2}\right)\left(x - \frac{4}{3}\right)\underbrace{(6x^2 + 6)}_{=6(x^2+1)} = (2x+7)(3x-4)(x^2+1).$

Vergeet echter niet de nog eerder geziene methoden om te ontbinden in factoren:

Methode	Voorbeeld
• Factor afzonderen:	$7x - 21x^3 = 7x(1 - 3x^2)$
• Merkwaardige producten:	
★ $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	$49 - x^2 = (7 - x)(7 + x)$
★ $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$	$4p^2 - 20pq + 25q^2 = (2p - 5q)^2$
★ $A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$	$27 - x^3 = (3 - x)(9 + 3x + x^2)$
• Discriminantmethode:	$3x^2 - 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{1}{3}$ $\Delta = 49$
★ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$	$\Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 3(x - 2)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (x - 2)(3x + 1)$
• Gericht samen nemen van termen:	$3x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = x^2(3x - 2) + 2(3x - 2)$ $= (x^2 + 2)(3x - 2)$

3) Kenmerken van een veeltermfunctie

a) Domein

Het domein van elke veeltermfunctie is $\mathbb{R}$.

b) Gedrag op oneindig en beeld

Het beeld van een veeltermfunctie is minder vanzelfsprekend. Voor veeltermfuncties van oneven graad is ook het beeld altijd $\mathbb{R}$, maar voor veeltermfuncties van even graad is het beeld altijd van de vorm $[a, +\infty[$ of $]-\infty, a]$, met $a \in \mathbb{R}$. (Denk bijvoorbeeld eens aan eerste- en tweedegraadsfuncties).

De verklaring hiervoor ligt bij het gedrag op oneindig van veeltermfuncties. Het is eenvoudig in te zien dat vooral de hoogstegraadsterm een rol speelt als je naar de functiewaarden gaat kijken van zeer grote of zeer kleine getallen ($x \rightarrow +\infty$ of $x \rightarrow -\infty$). Als we dan effectief gaan kijken naar het gedrag op oneindig, geldt ook voor de functiewaarden dat $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$.

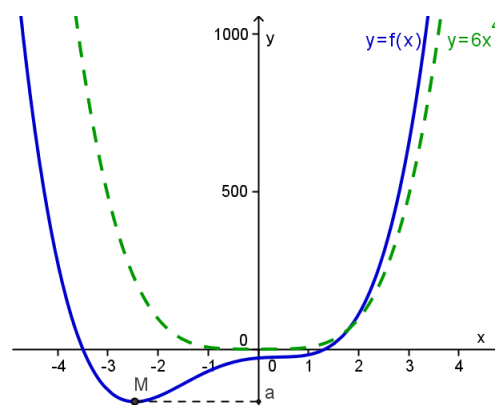
Deze limieten zijn dan intuïtief zeer eenvoudig te berekenen. Als voorbeeld kijken we naar de veeltermfunctie uit de vorige paragraaf:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (6x^4 + 13x^3 - 22x^2 + 13x - 28) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (6x^4) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^4 + 13x^3 - 22x^2 + 13x - 28) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^4) = +\infty$$

Op de grafiek rechts is de tussenstap intuïtief gerechtvaardigd. De echte bewijsvoering zien we later in deze cursus.

Het minimum dat bereikt wordt leren we ook later algebraïsch berekenen. Nu vinden we met onze GRM dat $a \approx -166,91$, dus is bld $f = [-166,91; +\infty[$.



c) Tekenverloop

Het tekenverloop van een veeltermfunctie is eenvoudig als je denkt aan de ontbinding van de veelterm, of dus eigenlijk aan de nulpunten (en de multipliciteit ervan).

We noemen n een nulpunt met multipliciteit m van de veeltermfunctie $f(x)$ als:

$$(x-n)^m \mid f(x), \text{ maar } (x-n)^{m+1} \nmid f(x).$$

Het teken wisselt bij het nulpunt van een veeltermfunctie als de multipliciteit van het nulpunt oneven is, en verandert niet als de multipliciteit even is. Als voorbeeld geven we het tekenonderzoek van de veeltermfunctie uit voorgaande paragrafen:

x	$-\infty$	$-7/2$		$4/3$	$+\infty$	
$6x^4 + 13x^3 - 22x^2 + 13x - 28$		+	0	-	0	+

Onthoud bij het ontbinden in factoren (en dus ook het zoeken naar nulpunten) volgende stellingen:

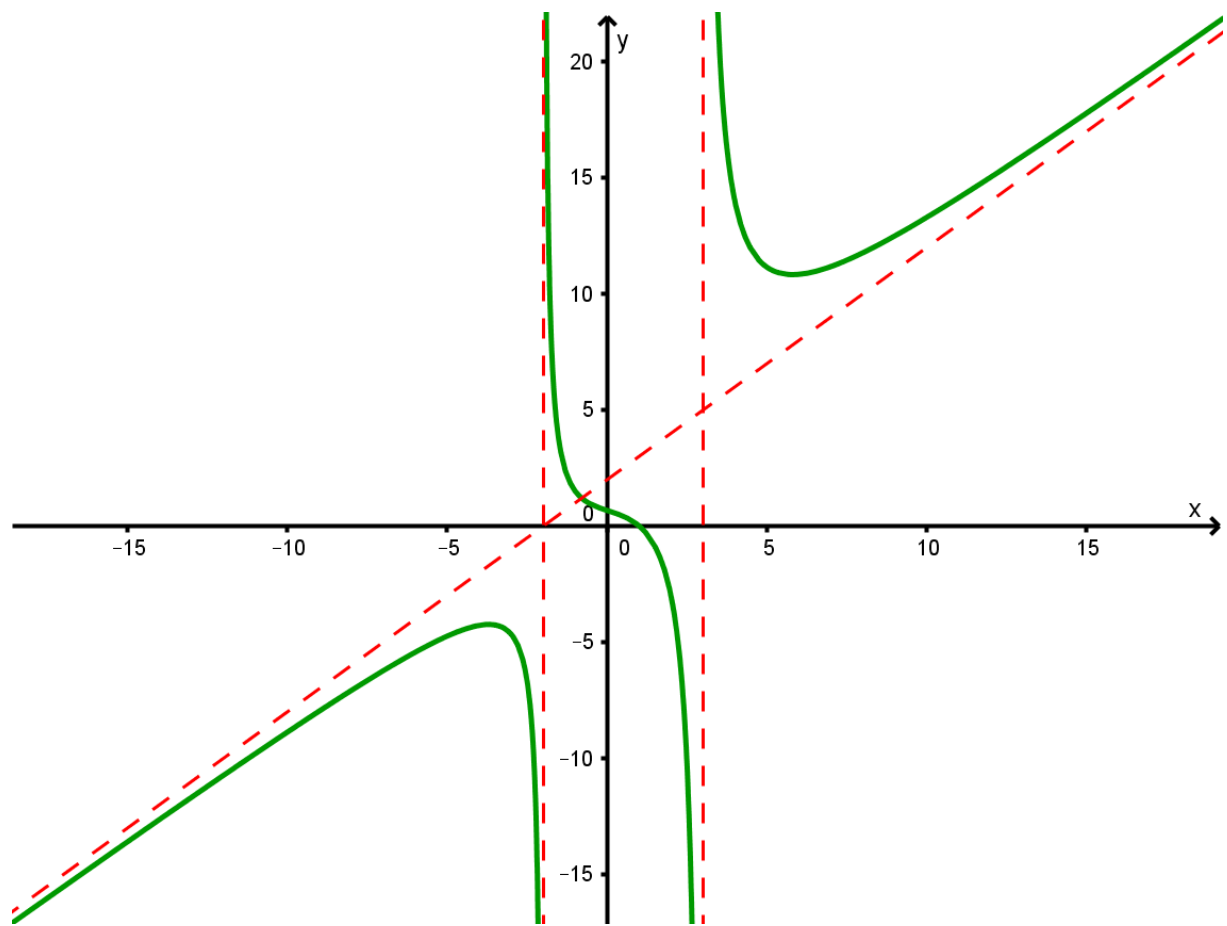
- ★ Bij een veelterm met gehele coëfficiënten is elk geheel nulpunt een deler van de constante term van die veelterm (maar uiteraard niet omgekeerd!).
- ★ Een veelterm van graad n heeft hoogstens n (al dan niet verschillende) nulpunten.
- ★ Hoofdstelling van de algebra: elke veelterm kan ontbonden worden in eerste- en tweedegraadsfactoren.

Deze eerste stelling volgt vrijwel onmiddellijk uit het feit dat $(x-a) \mid P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$. De tweede (en derde) stelling bewijzen is helemaal niet vanzelfsprekend. De Zwitser Argand was de eerste die deze stelling correct bewees, in 1806.

d) Stijgen en dalen

Voor veeltermfuncties van graad 3 of hoger moeten jullie het verloop voorlopig enkel kunnen aflezen van een rekenmachine. Later zullen we dit ook op algebraïsche manier leren via afgeleiden (zie cursus differentiaalrekening).

1.3. Rationale functies



1) Homografische functies

Een speciale soort rationale functie is de *homografische functie*. Dit is een functie van de vorm:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ met } c \neq 0 \text{ en } ad-bc \neq 0.$$

Een homografische functie is *monotoon*: de functie is ofwel overal stijgend, ofwel overal dalend in haar domein (dit naargelang het teken van $ad-bc$). De grafiek van een homografische functie noemen we een *hyperbool*. In de tweede graad heb je gezien dat je elke hyperbool kan verkrijgen door elementaire transformaties uit te voeren op de grafiek van de standaardhyperbool $y=1/x$.

We bekijken als voorbeeld eens de homografische functie $f(x) = \frac{2x-6}{x+1}$.

Deze functie is te herschrijven als $f(x) = \frac{2(x+1)-8}{x+1} = 2 - \frac{8}{x+1}$. Je kan dit ook vinden door de

Euclidische deling uit te voeren. Het transformatieschema is:

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

$$f_1(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f_2(x) = \frac{8}{x+1}$$

: 1 eenheid naar links
schuiven.

: rekken met factor 8 langs de
y-as.

$$f_3(x) = -\frac{8}{x+1}$$

: spiegelen om de x-as.

$$f(x) = 2 - \frac{8}{x+1}$$

: 2 eenheden naar boven
schuiven.

We proberen deze functie nu volledig te bespreken:

Domein

Deze functie is overal gedefinieerd, behalve in het nulpunt van de noemer, -1.

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Nulpunt

$$\frac{2x-6}{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \wedge x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x=3.$$

Tekenverloop

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	+		- 0	+

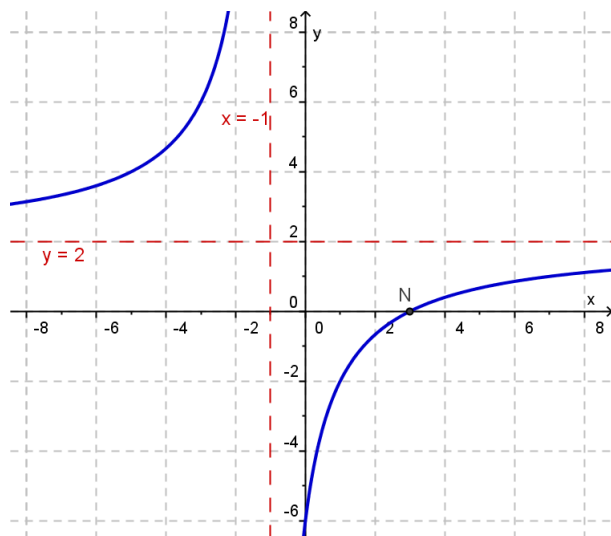
Beeld

Op de grafiek zien we dat $\text{bld } f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Een *asymptoot* van een functie is een rechte waar de grafiek van die functie willekeurig dicht toe nadert. De term is afgeleid uit het Grieks en betekent letterlijk "niet samenvallen".

De hierboven besproken functie heeft twee asymptoten. De rechten met vergelijking $x=-1$ en $y=2$ zijn respectievelijk een verticale en een horizontale asymptoot.

Dat $x=-1$ een verticale asymptoot is, is eenvoudig in te zien als volgt: hoe dichter je x bij -1 neemt hoe dichter de noemer het getal 0 nadert. De functiewaarden in de buurt van -1 worden dus altijd maar groter in absolute waarde.



Dat $y = 2$ een horizontale asymptoot is zie je eenvoudig in door het omgevormde functievoorschrift te bekijken ($f(x) = 2 - \frac{8}{x+1}$). Hoe groter $|x|$, hoe dichter de tweede term naar nul nadert, en dus de functiewaarde naar 2 nadert.

In een tabel kunnen we deze intuïtieve redeneringen verifiëren:

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
-1,1	82	-0,9	-78	-10	2,8888...	10	1,2727...
-1,01	802	-0,99	-798	-100	2,0808...	100	1,9208...
-1,001	8002	-0,999	-7998	-1000	2,0080...	1000	1,9920...
-1,0001	80002	-0,9999	-79998	-10000	2,0008...	10000	1,9992...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	$-\infty$	2	$+\infty$	2

We noteren deze bevindingen in limietvorm als $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ en $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

In latere hoofdstukken komen we hier zeker op terug. Voorlopig volstaat het dat jullie begrijpen waarvoor deze notatie staat.

2) Kenmerken van rationale functies

a) Definities

Een *rationale functie* is een quotiënt van twee veeltermfuncties, waarbij de noemer niet de nulveelterm is.

De *nulpunten* van een rationale functie zijn de nulpunten van de teller die geen nulpunt zijn van de noemer.

De *polen* van een rationale functie zijn de nulpunten van de noemer.

b) Domein

Een rationale functie is overal gedefinieerd, behalve in de nulpunten van de noemer.

In formulevorm geeft dit: $\text{dom } \frac{f}{g} = \mathbb{R} \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$.

c) Nulpunten

Bij het oplossen van de vergelijking om de nulpunten te zoeken is het belangrijk dat de bestaansvoorwaarde (het domein van de functie) niet wordt vergeten.

Voorbeeld: Bepaal de nulpunten van de functie $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 + 2x - 15}$.

$$\frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 + 2x - 15} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0 \quad \wedge \quad x^2 + 2x - 15 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3/2 \quad \wedge \quad x \neq 3 \wedge x \neq -5$$

$$\Leftrightarrow x = -3/2$$

d) Geperforeerde grafieken

Zijn er getallen waarvoor zowel de functiewaarde in de teller als in de noemer nul is, dan kunnen we wegens de reststelling het functievoorschrift vereenvoudigen. Het is hierbij wel belangrijk niet te vergeten dat de oorspronkelijke functie voor deze waarde niet gedefinieerd is.

Voorbeeld: We kijken terug naar de functie $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 + 2x - 15}$. Uit de vorige paragraaf bleek dat 3 een nulpunt was van zowel teller als noemer.

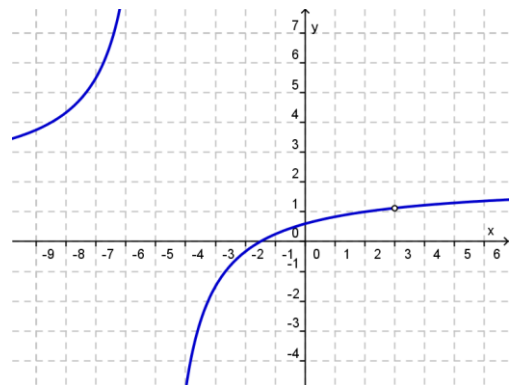
We proberen te vereenvoudigen: $f_v(x) = \frac{(x-3)(2x+3)}{(x-3)(x+5)} = \frac{2x+3}{x+5}$.

Het is nu belangrijk in te zien dat $f \neq f_v$. De functies zijn fundamenteel verschillend, want f_v is gedefinieerd in $x=3$ maar f niet. In haar domein echter zal f zich volledig hetzelfde gedragen als f_v . Het enige verschil is dat de grafiek van f in één punt, namelijk $(3, 9/8)$, zal geperforeerd zijn.

We bekijken de grafiek eens:

De grafiek van f is dus inderdaad identiek aan de hyperbool die bij f_v hoort, behalve in het *perforatiepunt* $(3, 9/8)$. We noemen de grafiek dan ook een *geperforeerde hyperbool*.

In het geval dat de multiplicititeit van het getal als nulpunt van de noemer groter is dan dat van de teller, zijn beide functies wel identiek. Zelfs na vereenvoudiging zal de functie nog altijd niet gedefinieerd zijn in dat punt. In dat geval mag je dus zonder problemen vereenvoudigen.



e) Gedrag op oneindig - asymptoten

Bij homografische functies zagen we al dat bij rationale functies asymptoten kunnen optreden. Deze redenering gaan we nu veralgemenen naar alle rationale functies. Uit de vorige paragraaf volgt dat we mogen kijken naar de vereenvoudigde functies, want het is duidelijk dat perforatiepunten geen invloed hebben op asymptotisch gedrag.

Verticale asymptoten

Een rationale functie f heeft verticale asymptoten met vergelijking $x = p$ voor elke pool p van de vereenvoudigde functie f_v . Dit is te verklaren analoog aan wat we deden bij homografische functies.

Horizontale en schuine asymptoten

Voor horizontale en schuine asymptoten van een rationale functie f is het nuttig te kijken naar het functievoorschrift van de vereenvoudigde functie f_v na uitvoering van de Euclidische deling.

Is het quotiënt een getal b dan vinden we net als bij de homografische functies een horizontale asymptoot met vergelijking $y = b$.

Is het quotiënt een eerstegraadsfunctie $mx + q$ (met dus $m \neq 0$) dan heeft de functie een schuine asymptoot met vergelijking $y = mx + q$.

Voorbeeld: Bepaal de vergelijking van de asymptoten van de functie $f(x) = \frac{8x^3 - 2x^2 - 8x + 2}{2x^2 - 3x + 1}$.

We proberen teller en noemer te ontbinden in factoren:

Teller: $8x^3 - 2x^2 - 8x + 2 = x^2(8x - 2) - (8x - 2) = (x^2 - 1)(8x - 2) = 2(x - 1)(x + 1)(4x - 1)$

Noemer: $2x^2 - 3x + 1 = (x - 1)(2x - 1)$

De vereenvoudigde functie is dus $f_v = \frac{2\cancel{(x-1)}(x+1)(4x-1)}{\cancel{(x-1)}(2x-1)} = \frac{8x^2 + 6x - 2}{2x - 1}$.

De functie f is identiek aan de functie f_v op een perforatie bij $(1, 12)$ na.

De nulpunten van zijn -1 en $1/4$ en de pool is $1/2$.

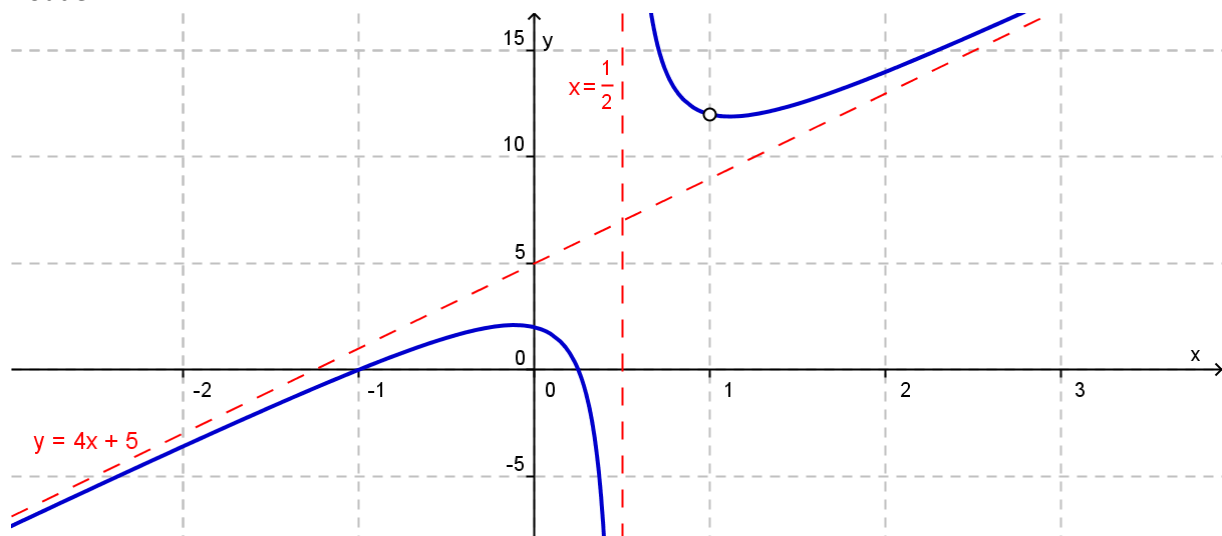
Aangezien $\frac{1}{2}$ een pool is van f_v heb je een verticale asymptoot: $x = \frac{1}{2}$

Om het asymptotisch gedrag voor $x \rightarrow \pm\infty$ te bekijken, voeren we de Euclidische deling uit bij f_v :

$$\begin{array}{r|l} 8x^2 & +6x & -2 \\ 8x^2 & -4x & \\ \hline 10x & -2 & \\ 10x & -5 & \\ \hline & 3 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x & -1 \\ \hline 4x+5 \end{array}$$

Dus $\frac{8x^2 + 6x - 2}{2x - 1} = 4x + 5 + \frac{3}{2x - 1}$. Als $x \rightarrow \pm\infty$ nadert de breuk $\frac{3}{2x - 1}$ naar nul, zodat we een schuine asymptoot hebben, namelijk $y = 4x + 5$.

We controleren onze bevindingen eens op de grafiek van f . Merk op dat deze grafiek hier getekend is in een assenstelsel met verschillende ijken op de x-as en de y-as om de grafiek overzichtelijk te houden.



In de oefeningen zullen we vaak ook de ligging van de grafiek ten opzichte van deze asymptoten bepalen.

Algemeen kan je het volgende opmerken voor een rationale functie $f(x) = \frac{T(x)}{N(x)}$:

- Als $gr(T) < gr(N)$ dan is er een horizontale asymptoot $y = 0$.
- Als $gr(T) = gr(N)$ dan is er een horizontale asymptoot $y = b$, met b het quotiënt van de hoogstegraadstermen.
- Als $gr(T) = gr(N) + 1$ dan is er een schuine asymptoot $y = mx + q$, met $mx + q$ het quotiënt bij Euclidische deling van $T(x)$ door $N(x)$.

f) Beeld en verloop

Voor rationale functies moet je zowel het verloop (stijgen en dalen) als het beeld voorlopig enkel kunnen aflezen van de grafiek. Om dit op algebraïsche manier te bespreken hebben we afgeleiden nodig (zie cursus differentiaalrekening).

We sluiten dit hoofdstuk af met een volledige bespreking van een rationale functie:

Voorbeeld: We bespreken de functie $f: x \rightarrow \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x - 3}$.

Domein

$$B.V.: x^2 - 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \wedge x \neq 3$$

$$\text{Dus dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$$

Nulpunten

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$$

Beide nulpunten zitten in het domein, dus we weten meteen ook dat $f_v = f$.

Asymptoten

Verticale asymptoten: $x = -1$ en $x = 3$.

$$gr(T) = gr(N) \Rightarrow \text{Horizontale asymptoot: } y = 1.$$

Snijpunten met de assen

Snijpunten met de x-as: $(-3, 0)$ en $(2, 0)$.

Snijpunt met de y-as: $(0, 2)$.

Tekenverloop

Alle nulpunten en polen zijn enkelvoudig:

x	$-\infty$	-3	-1	2	3	$+\infty$		
$f(x)$		+	0	-	+	0	-	+

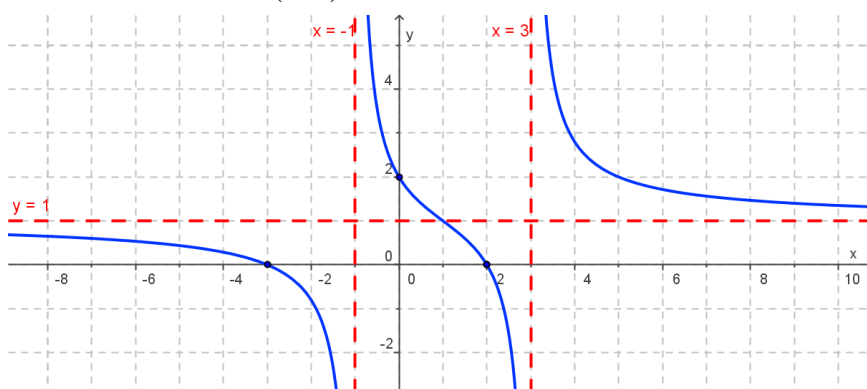
Verloop

Dit lezen we af van de grafiek:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$ $	$\searrow$	$ $

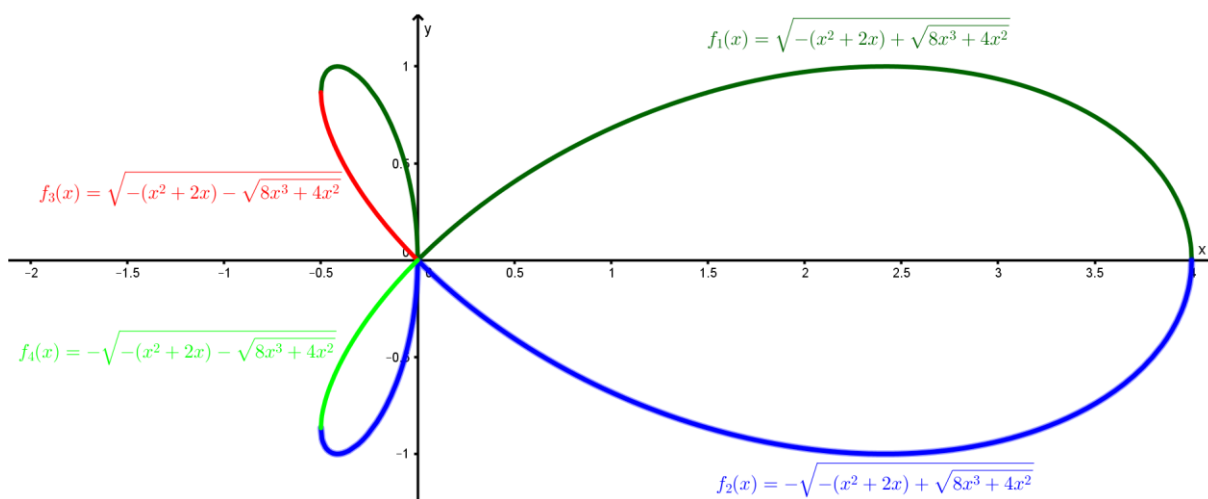
Beeld

We lezen af van de grafiek: $\text{bld } f = \mathbb{R}$



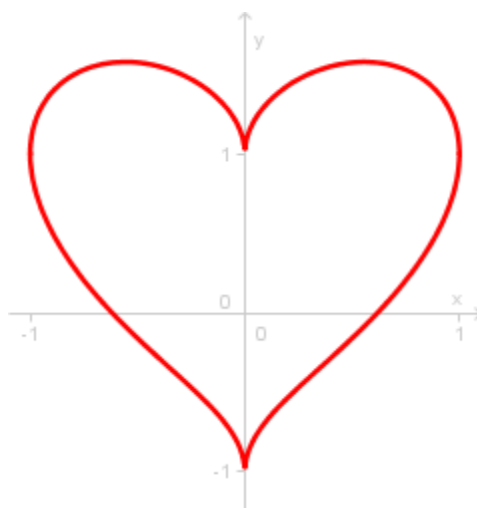
Merk op dat $(1, 1) \in f$ terwijl het ook op de horizontale asymptoot ligt. Dit is echter geen enkel probleem, maar veel leerlingen denken dat de grafiek van een functie zijn asymptoten niet mag snijden, terwijl dat natuurlijk wel zo is.

Irrationale functies



$$(y^2 + x^2 + 2x)^2 = 8x^3 + 4x^2 \Rightarrow y^2 + x^2 + 2x = \pm \sqrt{8x^3 + 4x^2} \Rightarrow y = \pm \sqrt{-(x^2 + 2x) \pm \sqrt{8x^3 + 4x^2}}$$

(Trifolium van de Longchamps)



$$(y - \sqrt{|x|})^2 + x^2 = 1$$

1) Domein

Een *irrationale functie* is een functie waarbij de veranderlijke x onder één of meerdere worteltekens voorkomt. Dit zorgt uiteraard voor problemen bij het bepalen van het domein, vermits bijvoorbeeld een vierkantswortel enkel gedefinieerd is voor positieve getallen.

Voorbeeld: We bepalen het domein van de functie $f(x) = \sqrt{\frac{3x-6}{1-x}}$.

$$x \in \text{dom } f \Leftrightarrow \frac{3x-6}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \in]1, 2]. \text{ Dus } \text{dom } f =]1, 2].$$

2) Nulpunten

Om de nulpunten van een irrationale functie te bepalen moeten we een irrationale vergelijking oplossen. Het komt er hier op aan deze vergelijking te herleiden tot een gewone (rationale) vergelijking door te kwadrateren. Er zitten echter een paar addertjes onder het gras.

Voorbeeld: We bepalen de nulpunten van de irrationale functie $f(x) = \sqrt{3-2x} - 2x + 1$.

$$\sqrt{3-2x} - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-2x} = 2x - 1$$

Nu willen we beide leden kwadrateren om de wortel weg te werken... maar mag dat wel? We proberen toch op deze manier verder te gaan:

$$3-2x = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1/2.$$

We vinden dus op het eerste gezicht twee nulpunten, maar na controle blijkt het nulpunt $x = -1/2$ niet te kloppen (want $f(-1/2) = \sqrt{3-2 \cdot (-1/2)} - 2(-1/2) + 1 = 4 \neq 0$).

Ten eerste moeten we bij elke irrationale vergelijking stil staan bij de bestaansvoorwaarde (B.V.). In ons geval is dit $3-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3/2$. Dit is voor beide oplossingen geen probleem.

Ten tweede moeten we stilstaan dat uit $a^2 = b^2$ enkel volgt dat $a = b$ als ook a en b hetzelfde teken hebben. Als we beide leden van een vergelijking dus kwadrateren moeten we er proberen voor te zorgen dat ze ook hetzelfde teken hebben. Lukt dit niet (zoals in ons voorbeeld) dan krijgen we een zogenaamde kwadrateringsvoorwaarde (K.V.). In ons voorbeeld is het linkerlid van $\sqrt{3-2x} = 2x-1$ altijd positief, dus eisen we dat ook $2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1/2$. En het is hier dat het schoentje knelt voor de oplossing die geen nulpunt blijkt te zijn.

Bij sommige vergelijkingen duurt het herleiden van de twee voorwaarden (B.V. en K.V.) tot één eenvoudige voorwaarde langer dan het oplossen van de vergelijking zelf. In die gevallen is het dus efficiënter om gewoon de gevonden oplossingen te controleren.

Voorbeeld: We bepalen de nulpunten van $f(x) = \sqrt{2x-3} + \sqrt{x-2} - 5$.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-3} + \sqrt{x-2} - 5 &= 0 &\Leftrightarrow \sqrt{2x-3} + \sqrt{x-2} &= 5 &\wedge \boxed{BV_1: 2x-3 \geq 0} \wedge \boxed{BV_2: x-2 \geq 0} \\ &\Leftrightarrow 2x-3 + 2\sqrt{(2x-3)(x-2)} + x-2 &= 25 &\wedge x \geq 2 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2-7x+6} &= 30-3x &\wedge x \geq 2 \\ &\Leftrightarrow 8x^2-28x+24 &= 900-180x+9x^2 &\wedge x \geq 2 \wedge \boxed{KV: x \leq 10} \\ &\Leftrightarrow x^2-152x+876 &= 0 &\wedge x \in [2, 10] \\ &\Leftrightarrow x = 6 \vee x = 146 &&\wedge x \in [2, 10] \quad \boxed{V = \{6\}} \end{aligned}$$

3) Bespreking

Naast het domein en de nulpunten (en dus ook het tekenverloop) bepalen kunnen we bij een irrationale functie niet veel zonder we de grafiek kennen.

Voorbeeld: We bespreken de functie $f(x) = \sqrt{4-2x} + x + 2$.

Domein

$$\text{B.V.: } 4-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$$

$$\text{Dus } \text{dom } f =]-\infty, 2]$$

Nulpunten

$$\begin{aligned} \sqrt{4-2x} + x + 2 = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{4-2x} = -x-2 \\ &\stackrel{!!!}{\Rightarrow} 4-2x = x^2 + 4x + 4 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 6x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cancel{x=0} \vee x = -6 \end{aligned}$$

Na controle blijkt enkel -6 een nulpunt te zijn.

Merk op dat je op deze manier (zonder voorwaarden) een enkele pijl schrijft als je kwadrateert!

Snijpunten met de assen

Snijpunt met de x-as: $(-6, 0)$.

Snijpunt met de y-as: $(0, 4)$.

Tekenverloop

Alle nulpunten zijn enkelvoudig:

x	$-\infty$	-6	2
$f(x)$		$-$	0
		$-$	$+$
		$+$	$+$
		$+$	$///$

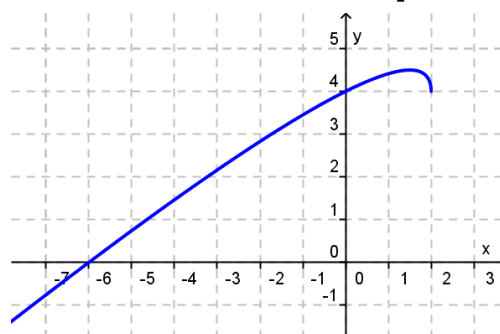
Verloop

Dit lezen we af van de grafiek:

x	$-\infty$	$3/2$	2
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$
		MAX (9/2)	$///$

Beeld

We lezen af van de grafiek: $\text{bld } f =]-\infty, 9/2]$



4) Impliciet gedefinieerde relaties

Tot nu toe hebben we alleen functievoorschriften gezien van de vorm $y = f(x)$. We zeggen dat functies op deze manier expliciet gedefinieerd zijn.

We kunnen een voorschrift ook noteren als $f(x, y) = C$, met $C \in \mathbb{R}$. Wat we op deze manier definiëren hoeft echter niet altijd een functie te zijn. We noemen deze relatie impliciet gedefinieerd.

Voorbeeld: We proberen de relatie $4x^2 + 9y^2 = 36$ te bespreken.

$$\text{Omvormen van het voorschrift geeft } y^2 = 4 - \frac{4}{9}x^2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} \vee y = -\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$$

De relatie valt dus in expliciete vorm uiteen in twee irrationale functies die elkaars spiegelbeeld zijn t.o.v. de x-as.

$$\text{We bekijken de functie } f_1(x) = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}.$$

Het is eenvoudig in te zien dat $\text{dom } f_1 = [-3, 3]$, en dat -3 en 3 beide nulpunten zijn. Teken we deze functie en ook haar spiegelbeeld om de x-as, dan vinden we de grafiek van de gegeven relatie: een ellips!

