1. ★ Stel de (4×3)-matrix A op die voldoet aan $a_{ij}=2i-j$.

$$A=\begin{bmatrix} 2.1-1 & 2.1-2 & 2.1-3 \\ 2.2-1 & 2.2-2 & 2.2-3 \\ 2.3-1 & 2.3-2 & 2.3-3 \\ 2.4-1 & 2.4-2 & 2.4-3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

2. ★★ Bewijs dat de matrix $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ een nuldeler is.

- $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-2c & b-2d \\ -3a+6c & -3b+6d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2c \\ b=2d \end{cases}$
- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-3b & -2a+6b \\ c-3d & -2c+6d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} a=3b \\ c=3d \end{cases}$

Beide vergelijkingen hebben dus oplossingen verschillend van de nulmatrix $\Rightarrow\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ is een nuldeler (en alle matrices van de vorm $\begin{bmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 3b & b \\ 3d & d \end{bmatrix}$ en verschillend van de nulmatrix dus ook)).

3. ★★★ Bepaal alle mogelijke matrices A van de vorm $\begin{bmatrix} 2 & a \\ b & c \end{bmatrix}$, met $a,b,c\in\mathbb{R}$, waarvoor geldt dat:

$\left(A-A^T\right)^2=O$ en $A^2=5.I_2$.

- $\left(A-A^T\right)^2=\left(\begin{bmatrix} 2 & a \\ b & c \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & b \\ a & c \end{bmatrix}\right)^2=\begin{bmatrix} 0 & a-b \\ b-a & 0 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} -(a-b)^2 & 0 \\ 0 & -(a-b)^2 \end{bmatrix}=O\Leftrightarrow a=b$.
- $\begin{bmatrix} 2 & a \\ a & c \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 4+a^2 & 2a+ac \\ 2a+ac & a^2+c^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} 4+a^2=5 \\ 2a+ac=0 \\ a^2+c^2=5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a^2=1 \\ a(2+c)=0 \\ c^2=4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1\vee a=-1 \\ c=-2 \end{cases}$

De gezochte matrices zijn dus $A_1=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ en $A_2=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

4. ★ Bepaal de parameters $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ zodat de matrix $M=\begin{bmatrix} 0 & -2 & c-4b \\ b+1 & 3a & d \\ d^2 & b-3 & 0 \end{bmatrix}$ scheefsymmetrisch is.

Dan moet $\begin{cases} 3a=0 \\ b+1=2 \\ d^2=4b-c \\ b-3=-d \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases}$

5. ★* Bepaal alle matrices X die voldoen aan de vergelijking $3(X+2.I_2)=A^2$, als $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$.

$$3X+6.I_2=A^2 \Leftrightarrow 3X=A^2-6.I_2 \Leftrightarrow X=\frac{1}{3}\cdot\left(A^2-6.I_2\right)$$

$$\Leftrightarrow X=\frac{1}{3}\cdot\left(\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}^2-6.\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&0\\0&6\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}-5&0\\2&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{3}&0\\\frac{2}{3}&-\frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

6. ★ Bepaal de dimensie van A, B en C als je weet dat $M\in\mathbb{R}^{2\times4}$, $N\in\mathbb{R}^{3\times4}$ en $\left(A.M^T+B\right).C=N$.

$\underbrace{(\underset{3\times4}{A}.\underset{4\times2}{M^T}}_{3\times2}+\underset{3\times2}{B}).\underset{2\times4}{C}=\underset{3\times4}{N}$ is de enige juiste mogelijkheid.

7. ★* Robert en Bertrand hebben beiden een stappenteller gekregen. Ze houden allebei bij hoeveel stappen ze dagelijks zetten gedurende een week. Die gegevens kunnen weergegeven worden in volgende matrix S:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccccccc}\text{ma}&\text{di}&\text{wo}&\text{do}&\text{vr}&\text{za}&\text{zo}\end{array} \\ \begin{array}{r}\text{Robert}\rightarrow\\\text{Bertrand}\rightarrow\end{array} & \begin{bmatrix}3124&2322&1526&2215&2589&2552&9811\\1244&1255&2325&1255&3255&8411&1898\end{bmatrix}=S\end{array}$$

a) Stel een matrix V op zodat je in $S.V$ kan aflezen hoeveel stappen Robert en Bertrand deden op vrijdag.
b) Stel een matrix W op zodat je in $S.W$ kan aflezen hoeveel stappen ze deden tijdens het weekend.
c) Stel een matrix T op zodat je in $T.S$ kan aflezen hoeveel stappen ze samen deden per dag.
d) Stel een matrix G op zodat je in $S.G$ kan aflezen hoeveel stappen ze gemiddeld deden die week.

$$V=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\ W=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix},\ T=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\text{ en } G=\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/7\\1/7\\1/7\\1/7\\1/7\\1/7\\1/7\end{bmatrix}$$

8. ★ Een leerling lost een matrixvergelijking op. Schrijf bij elke stap op welke eigenschap er gesteund wordt:

$X = \quad =3.(2A+B)+C.(I+D)$

$=3.(2A)+3B+C.(I+D)$: distributiviteit van het scalair product t.o.v. de som van matrices

$=3.(2A)+3B+C.I+C.D$: linksdistributiviteit van het product t.o.v. de som van matrices

$=6A+3B+C.I+C.D$: gemengde associativiteit van het scalair product

$=6A+3B+C+C.D$: het neutraal element van het matrixproduct is de eenheidsmatrix I