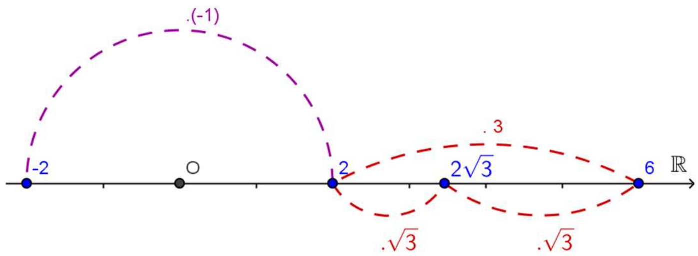
Complexe getallen

KEEP
CALM
AND LOVE
COMPLEX
NUMBERS

1) Complexe getallen - definitie

a) Meetkundige betekenis van het getal i

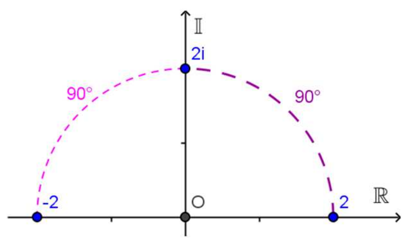
Als je een reëel getal met een ander reëel getal vermenigvuldigt, wordt zijn afstand tot de oorsprong met dit getal vermenigvuldigd (zo wordt 2 na vermenigvuldiging met 3 het getal 6). Als je een reëel getal met -1 vermenigvuldigt, dan voer je eigenlijk een draaiing van 180° uit ten opzichte van de oorsprong (zo wordt 2 na vermenigvuldiging met -1 het getal -2).



In deze context een vierkantswortel nemen, wil dus zeggen dat je op zoek gaat naar een meetkundige transformatie die na tweemaal uitvoeren terug de oorspronkelijke transformatie geeft. In het geval van vermenigvuldigen met een positief getal is dit eenvoudig in te zien. Als je bijvoorbeeld het getal 2, tweemaal na elkaar met $\sqrt{3}$ vermenigvuldigt, dan krijg je ook 6. We kunnen de redenering echter ook doortrekken naar de negatieve getallen.

Welke transformatie moet je tweemaal uitvoeren om een draaiing van 180° uit te voeren? Juist, een draaiing van 90° (in welke zin maakt niet uit). Noteren we de draaiing van 90° in tegenwijzerzin als i, dan hebben we dus dat $r.i.i = r.i^2 = r.(-1)$, of dus nog $i^2 = -1$!

Maar waar ligt dit nieuwe getal dan? Alleszins niet meer op de reële as. We voeren daarom een nieuwe as in, loodrecht op de reële as, die we de imaginaire as $\mathbb{I}$ zullen noemen. Op de figuur hiernaast zie je bijvoorbeeld waar het getal $2i$ ligt.



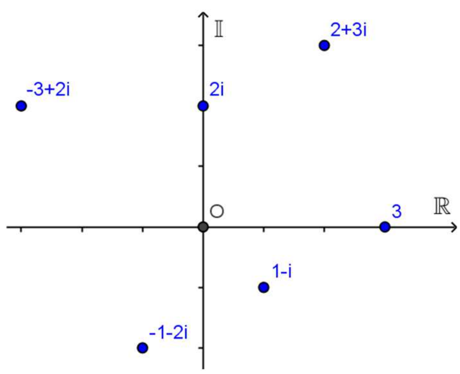
b) De complexe getallen

We gaan nu nog een stapje verder en definiëren de *complexe getallen* als getallen van de vorm $z = a + bi$, met $a,b \in \mathbb{R}$. De verzameling van al deze getallen noteren we met $\mathbb{C}$.

Definitie: we definiëren we *de verzameling complexe getallen* als $\mathbb{C} = \{a + bi \;\|\; a,b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$.

Het is hierbij onmiddellijk duidelijk dat $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (neem in de definitie $b = 0$).

Ook deze getallen kunnen we op logische manier afbeelden in het complexe vlak, opgebouwd uit de reële as $\mathbb{R}$ en de imaginaire as als $\mathbb{I}$. Hiernaast zie je enkele voorbeelden.
Getallen op de reële as noemen we *strikt reëel* (bvb 3). Getallen op de imaginaire as noemen we *strikt imaginair* (bvb $2i$).
Definitie: het *reële deel* van een complex getal z noteren we met $\operatorname{Re}(z)$. Het *imaginaire deel* noteren we met $\operatorname{Im}(z)$.



Zo is bijvoorbeeld $\operatorname{Re}(-3+2i) = -3$ en $\operatorname{Im}(-3+2i) = 2$.

Per definitie geldt dus : $\forall z \in \mathbb{C} : z = \operatorname{Re}(z) + i.\operatorname{Im}(z)$.

2) Bewerkingen met complexe getallen

a) Definitie van de basisbewerkingen

We proberen op natuurlijk wijze de 4 basisbewerkingen in te voeren voor de complexe getallen $z_1 = a + bi$ en $z_2 = c + di$, met dus $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. We gaan er bij de deling van uit dat $z_2 \neq 0$, dus c en d zijn dan niet beide nul.

De optelling: $(a+bi)+(c+di)=\underbrace{(a+c)}_{\in\mathbb{R}}+\underbrace{(b+d)}_{\in\mathbb{R}}i$.

Dus $\operatorname{Re}(z_1+z_2)=\operatorname{Re}(z_1)+\operatorname{Re}(z_2)$ en $\operatorname{Im}(z_1+z_2)=\operatorname{Im}(z_1)+\operatorname{Im}(z_2)$.

Voorbeeld: $(3+2i)+(-7+i)=-4+3i$

De aftrekking: $(a+bi)-(c+di)=\underbrace{(a-c)}_{\in\mathbb{R}}+\underbrace{(b-d)}_{\in\mathbb{R}}i$.

Dus $\operatorname{Re}(z_1-z_2)=\operatorname{Re}(z_1)-\operatorname{Re}(z_2)$ en $\operatorname{Im}(z_1-z_2)=\operatorname{Im}(z_1)-\operatorname{Im}(z_2)$.

Voorbeeld: $(3+2i)-(-7+i)=3+2i+7-i=10+i$

De vermenigvuldiging: $(a+bi).(c+di)=ac+adi+bci+bd\overbrace{i^2}^{=-1}=\underbrace{(ac-bd)}_{\in\mathbb{R}}+\underbrace{(ad+bc)}_{\in\mathbb{R}}i$.

Dus $\operatorname{Re}(z_1.z_2)=\operatorname{Re}(z_1).\operatorname{Re}(z_2)-\operatorname{Im}(z_1).\operatorname{Im}(z_2)$ en $\operatorname{Im}(z_1.z_2)=\operatorname{Re}(z_1).\operatorname{Im}(z_2)+\operatorname{Im}(z_1).\operatorname{Re}(z_2)$.

Voorbeeld: $(3+2i)\cdot(-7+i)=-21+3i-14i+\underbrace{2i^2}_{=-2}=-23-11i$

De deling: $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{a+bi}{c+di}.\dfrac{c-di}{c-di}=\dfrac{ac-adi+bci-bd\overbrace{i^2}^{=-1}}{c^2-d^2\underbrace{i^2}_{=-1}}=\underbrace{\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}}_{\in\mathbb{R}}+\underbrace{\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}}_{\in\mathbb{R}}i$.

Dus $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\dfrac{\operatorname{Re}(z_1).\operatorname{Re}(z_2)+\operatorname{Im}(z_1).\operatorname{Im}(z_2)}{(\operatorname{Re}(z_2))^2+(\operatorname{Im}(z_2))^2}$ en $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\dfrac{\operatorname{Im}(z_1).\operatorname{Re}(z_2)-\operatorname{Re}(z_1).\operatorname{Im}(z_2)}{(\operatorname{Re}(z_2))^2+(\operatorname{Im}(z_2))^2}$.

Voorbeeld: $\dfrac{-23-11i}{3+2i}=\dfrac{-23-11i}{3+2i}\cdot\dfrac{3-2i}{3-2i}=\dfrac{-91+13i}{13}=-7+i$

Dat elk van nul verschillend complex getal een omgekeerde heeft is ook duidelijk, want:

$$\forall z\in\mathbb{C}_0 : z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2} \quad (z\neq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2\neq 0)$$

Met andere woorden: de som, het verschil, het product en het quotiënt van twee complexe getallen is nog steeds een complex getal.

Je hoeft deze rekenregels zeker niet te blokken. Rekenen met complexe getallen gaat op volledig dezelfde manier als bij reële getallen, waarbij je simpelweg in je achterhoofd houdt dat $i^2=-1$.

b) De structuur van de complexe getallen

Stelling: $\mathbb{C},+$ is een commutatieve groep

Bewijs: Het is duidelijk dat de vijf kenmerkende eigenschappen van een commutatieve groep gelden:

1) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$ (de complexe optelling is *intern*)
2) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (de complexe optelling is *associatief*)
3) $\forall z \in \mathbb{C} : z + 0 = 0 + z = z$ (0 is het *neutraal element* van de complexe optelling)
4) $\forall z \in \mathbb{C} : \exists -z \in \mathbb{C} : z + (-z) = -z + z = 0$ (elk complex getal heeft een *tegengestelde*)
5) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (de complexe optelling is *commutatief*) □

Stelling: $\mathbb{C}_0,\cdot$ is een commutatieve groep

Bewijs: Ook hier gelden de vijf kenmerkende eigenschappen van een commutatieve groep:

6) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1.z_2 \in \mathbb{C}$ (de complexe vermenigvuldiging is *intern*)
7) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : (z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$ (de complexe vermenigvuldiging is *associatief*)
8) $\forall z \in \mathbb{C} : z.1 = 1.z = z$ (1 is het *neutraal element* van de complexe vermenigvuldiging)
9) $\forall z \in \mathbb{C}_0 : \exists z^{-1} \in \mathbb{C}_0 : z.z^{-1} = z^{-1}.z = 1$ (elk complex getal behalve 0 heeft een *omgekeerde*)
10) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1.z_2 = z_2.z_1$ (de complexe vermenigvuldiging is *commutatief*) □

Stelling: $\mathbb{C},+,\cdot$ is een veld

Bewijs: We weten al dat $\mathbb{C},+$ en $\mathbb{C}_0,\cdot$ commutatieve groepen zijn. Daarnaast geldt ook nog:

11) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} := z_1.(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3$
(de complexe vermenigvuldiging is *distributief* ten opzichte van de complexe optelling) □

Belangrijke opmerking: Het is onmogelijk om op de complexe getallen een orde te definiëren. Ongelijkheden bij complexe getallen hebben dan ook geen enkele zin.

c) De complex toegevoegde

Definitie: De *complex toegevoegde* (of *geconjugeerde*) van een complex getal z, noteren we met $\overline{z}$. Dit is het complex getal met hetzelfde reële deel, maar tegengesteld imaginair deel, dus $\overline{a+bi} = a - bi$. Meetkundig komt dit neer op een spiegeling om de reële as.

Eigenschap 1: $\forall z \in \mathbb{C} : \overline{\overline{z}} = z$

Bewijs: $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a + bi = z$ □

Eigenschap 2: $\forall z \in \mathbb{C} : \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

Bewijs: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{a+bi+c+di} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i = a - bi + c - di = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ □

Eigenschap 3: $\forall z \in \mathbb{C} : \overline{z_1.z_2} = \overline{z}_1.\overline{z}_2$

Bewijs: $\overline{z_1.z_2} = \overline{(a+bi).(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(bc+ad)i} = (ac-bd)-(bc+ad)i$

$= (a-bi).(c-di) = \overline{z}_1.\overline{z}_2$ □

Eigenschap 4: $\forall z \in \mathbb{C} : z + \overline{z} \in \mathbb{R}$

Bewijs: $z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a \in \mathbb{R}$ □

Eigenschap 5: $\forall z \in \mathbb{C} : z.\overline{z} \in \mathbb{R}$

Bewijs: $z.\overline{z} = (a+bi).(a-bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$ □

d) Machten en vierkantswortels van complexe getallen

Machten

Definitie: Een gehele macht van complexe getallen definiëren we op dezelfde manier als bij reële getallen:

- $\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : z^n = \overbrace{z.z.z.\,\ldots\,.z}^{n \text{ factoren}}$.
- $\forall z \in \mathbb{C}_0 : z^0 = 1$
- $\forall z \in \mathbb{C}_0, \forall n \in \mathbb{N} : z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$

Vierkantswortels

Definitie: $w \in \mathbb{C}$ is een vierkantswortel van $z \in \mathbb{C}$ als en slechts als $w^2 = z$.

Voorbeeld: $2+i$ is een vierkantswortel van $3+4i$ want $(2+i)^2 = 3+4i$.

Elk complex getal $z \in \mathbb{C}_0$ heeft twee tegengestelde vierkantswortels (bewijs volgt in volgend hoofdstuk).

Voorbeeld: bereken de vierkantswortels van $8-6i$.

Stel daartoe $(a+bi)^2 = 8-6i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 8-6i$. Splits deze vergelijking in reëel en imaginair deel:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ ab = -3 \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -3 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ de vierkantswortels zijn } 3-i \text{ en } -3+i.$$

De stap * is vaak op te lossen door alle productcombinaties voor a en b af te gaan (hou a daar positief). In het slechtste geval lukt het niet op zicht en moet je een bikwadratische vergelijking oplossen:

Voorbeeld: bereken de vierkantswortels van $1 - i\sqrt{3}$.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2a}\right)^2 = 1 \\ b = -\dfrac{\sqrt{3}}{2a} \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ b = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$a^2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2a}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 - \frac{3}{4a^2} = 1 \Leftrightarrow 4a^4 - 4a^2 - 3 \overset{\Delta=64}{\Leftrightarrow} a^2 = \begin{cases} \cancel{\dfrac{4-8}{8} = \dfrac{-1}{2}} \\ \dfrac{4+8}{8} = \dfrac{6}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{6}}{2} \vee a = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

De vierkantswortels van $1 - i\sqrt{3}$ zijn dus $w_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ en $w_2 = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.

Opmerking: Het $\sqrt{\ }$-symbool (*de positieve wortel*) heeft bij complexe getallen geen betekenis meer.

e) Complexe vierkantsvergelijkingen

De formules voor een vierkantsvergelijking in de reële getallen blijven uiteraard gelden, alleen mogen we nu niet meer het $\sqrt{\ }$ -symbool gebruiken. We onthouden dus:

$az^2+bz+c=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{-b+w_1}{2a} \vee z=\dfrac{-b+w_2}{2a}$, met w_1 en w_2 de vierkantswortels van de complexe discriminant $\Delta=b^2-4ac$.

Voorbeeld: Los op in $\mathbb{C}$: $(-1+3i)\,z^2-3iz+1=0$

$\Delta=(-3i)^2-4\cdot(-1+3i)\cdot1=9i^2+4-12i=-5-12i$.

De wortels van Δ zijn $w_1=2-3i$ en $w_2=-2+3i$.

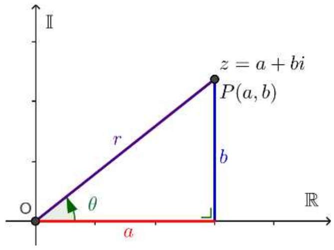
Dus $z_1=\dfrac{3i+(2-3i)}{2\cdot(-1+3i)}=\dfrac{2}{-2+6i}=\dfrac{2\cdot(-2-6i)}{(-2+6i)\cdot(-2-6i)}=\dfrac{-4-12i}{4+36}=-\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{10}i$,

en $z_2=\dfrac{3i+(-2+3i)}{2\cdot(-1+3i)}=\dfrac{-2+6i}{-2+6i}=1$. $\quad V=\left\{-\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{10}i\,,\ 1\right\}$

3) De goniometrische (meetkundige) vorm van een complex getal

We hebben het complexe vlak al ingevoerd in de inleiding. Het wordt ook wel eens het vlak van Gauss of het vlak van Argand genoemd, naar haar ontdekkers. Elk complex getal komt overeen met één punt in het complexe vlak en omgekeerd.

a) Modulus en argument



We kunnen een complex getal $z = a + bi$ eenduidig bepalen aan de hand van de coördinaat van zijn beeldpunt $P(a,b)$ in het complexe vlak, maar ook aan de hand van zijn modulus en argument. We noemen dit ook weleens de poolcoördinaten van het beeldpunt P.

Definitie: *de modulus van een complex getal* is de afstand $|OP|$ van de oorsprong O tot het beeldpunt P van dat complex getal. *Het argument van een complex getal* is de georiënteerde hoek θ die de positieve reële as maakt met de halfrechte $[OP$.

Opmerking: net als in de goniometrie meten we het argument in tegenwijzerzin en is dit slechts op een veelvoud van 360° na bepaald (of 2π als je in radialen werkt). Het argument van het complex getal 0 is onbepaald.

Notatie: we noteren de modulus r van een complex getal $z \in \mathbb{C}$ op twee manieren: $r = \mathrm{mod}(z) = |z|$. Het argument θ van een complex getal $z \in \mathbb{C}_0$ noteren we als $\theta = \arg(z)$.

Berekenen van modulus en argument

Voor een complex getal $z \in \mathbb{C}_0$, met $z = a + bi$, geldt voor zijn modulus r en argument θ

- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Pythagoras)
- $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ en $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$.
  - Als $a \neq 0$ geldt $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ (houd bij het bereken van θ rekening met het kwadrant!)
  - Als $a = 0$ dan is $\theta = 90°$ (als $b > 0$) of $\theta = -90°$ (als $b < 0$).

Voorbeeld: Als $z = -\sqrt{3} + i$ dan is $r = 2$ en $\theta = 150°$, want:

$r = \sqrt{3+1} = 2$ en $\tan\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \theta = -30° + k \cdot 180°$. Je neemt $k = 1$ omdat $\theta \in II$.

b) De goniometrische vorm van een complex getal

Uit de definitie van modulus en argument volgt onmiddellijk dat $a = r\cos\theta$ en $b = r\sin\theta$.

Voor een complex getal met modulus r en argument θ geldt dus dat:

$$z = a + bi = r.\cos\theta + r.\sin\theta.i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Deze laatste schrijfwijze noemen we *de goniometrische gedaante* van het complexe getal z.

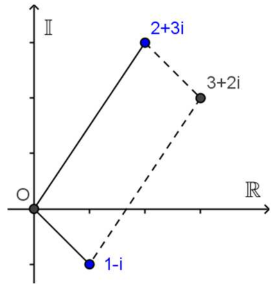
Definitie: Stellen we $cis(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$, dan kan je korter schrijven: $z = r \cdot \mathrm{cis}\,\theta$.

Voorbeeld: Voor $z = -\sqrt{3} + i$ geldt ook $z = 2(\cos 150° + i\sin 150°)$ of korter $z = 2 \cdot \mathrm{cis}\,150°$.

c) Bewerkingen met complexe getallen in het complexe vlak

Om de som en het verschil in goniometrische gedaante te berekenen bestaat er geen eenvoudige manier. Voor de andere bewerkingen is het vaak aangewezen om in goniometrische gedaante te werken.

Som van twee complexe getallen



Op de figuur hiernaast staan twee complexe getallen $z_1 = 2+3i$ en $z_2 = 1-i$ samen met hun som $z_1 + z_2 = 3+2i$ getekend.

Het is duidelijk dat de beeldpunten $0,\ z_1,\ z_1+z_2,\ z_2$ een parallellogram vormen.

De optelling van complexe getallen in het complexe vlak gebeurt op dezelfde manier als bij vectoren.

Tegengestelde van een complexe getal

Het tegengestelde van een complex is zijn spiegelbeeld om de oorsprong. De modulus verandert dus niet maar het argument wordt het antisupplement. Dit kan je aantonen als volgt, met $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$:

Dan is $-z = -r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = r\left(-\cos\theta - i\sin\theta\right) = r\left(\cos\left(\pi+\theta\right) + i\sin\left(\pi+\theta\right)\right)$.

Verschil van twee complexe getallen

Het verschil van twee complexe getallen z_1 en z_2 is niet anders dan de som van z_1 met de tegengestelde van z_2, want $z_1 - z_2 = z_1 + \left(-z_2\right)$. Meetkundig kan dit ook weer met de parallellogramregel.

Het product

Zij gegeven twee complexe getallen $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$ en $z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$, dan geldt:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)\cdot r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right) \\ &= r_1 r_2\left(\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\right) + i\left(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2\right)\right) \\ &= r_1 r_2\left(\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right) \end{aligned}$$

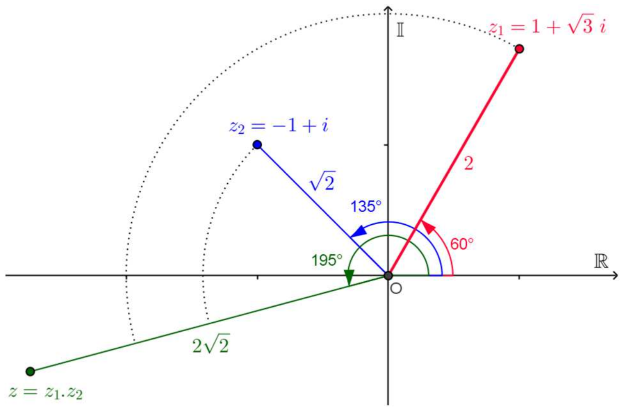
Dus $\operatorname{mod}\left(z_1\cdot z_2\right) = \operatorname{mod}\left(z_1\right).\operatorname{mod}\left(z_2\right)$ en $\arg\left(z_1\cdot z_2\right) = \arg\left(z_1\right) + \arg\left(z_2\right)$.

Bij het product van twee complexe getallen moet je dus hun modulussen vermenigvuldigen en hun argumenten optellen.

Hiernaast zie je een illustratie in het vlak van Gauss, met $z_1 = 1+\sqrt{3}\,i$ en $z_2 = -1+i$.

Dan is $z = z_1.z_2 = \left(-1-\sqrt{3}\right) + \left(1-\sqrt{3}\right)i$, en

- $r = r_1.r_2 = 2.\sqrt{2}$
- $\theta = \theta_1 + \theta_2 = 60° + 135° = 195°$



Sneller genoteerd: $z = z_1.z_2 = 2\cdot \operatorname{cis} 60° \cdot \sqrt{2}\cdot \operatorname{cis} 135° = 2\sqrt{2}\cdot \operatorname{cis} 195°$

De omgekeerde

We berekenen de omgekeerde in goniometrische vorm. Stel $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$, dan is:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)} = \frac{\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)}{r\underbrace{\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)}_{=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1}} = \frac{1}{r}\left(\cos\left(-\theta\right) + i\sin\left(-\theta\right)\right).$$

In woorden: je neemt het omgekeerde van de modulus en het tegengestelde van het argument.

Dus $\operatorname{mod}(1/z) = \dfrac{1}{\operatorname{mod}(z)}$ en $\arg(1/z) = -\arg(z)$

Het quotiënt

Zij gegeven twee complexe getallen $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ en $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, dan geldt:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot\frac{1}{r_2}\left(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)\right) = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{mod}(z_1/z_2) = \operatorname{mod}(z_1)/\operatorname{mod}(z_2) \\ \arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \end{cases}$$

Machten

Een onmiddellijk gevolg van de rekenregel voor een product is uiteraard, met $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$:

$$z^n = \left[r(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right).$$

Voor een complex getal met modulus $r = 1$ wordt dit de zogenaamde *formule van De Moivre*:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

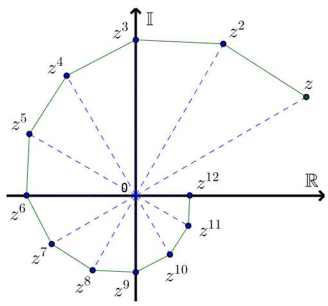
Voorbeeld: Gegeven is $z = \dfrac{4\sqrt{3}}{9} + \dfrac{4i}{9}$. Bewijs dat z^9 strikt imaginair is en dat z^{12} strikt reëel is.

We zetten eerst z om in goniometrische gedaante: $z = \dfrac{4\sqrt{3}}{9} + \dfrac{4i}{9} = \dfrac{8}{9}(\cos 30° + i\sin 30°)$.

Dan is $z^9 = z = \left(\dfrac{8}{9}\right)^9 \left(\underbrace{\cos 270°}_{=0} + i\underbrace{\sin 270°}_{=-1}\right) = -\left(\dfrac{8}{9}\right)^9 i$,

En $z^{12} = \left(\dfrac{8}{9}\right)^{12}\left(\underbrace{\cos 360°}_{=1} + i\underbrace{\sin 360°}_{=0}\right) = \left(\dfrac{8}{9}\right)^{12}$.

Stellen we al deze machten voor in het vlak van Gauss dan krijgen we een prachtige spiraal.



Machtswortels

Stelling: Elk complex getal $z \in \mathbb{C}_0$, heeft n verschillende n-demachtswortels ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

Bewijs: Noem $z = r.\left(\cos(\theta + k.360°) + i\sin(\theta + k.360°)\right)$, en $w = r_w(\cos\theta_w + i\sin\theta_w)$.

$$w^n = z \quad \Leftrightarrow r_w^n\left(\cos(n\theta_w) + i\sin(n\theta_w)\right) = r.\left(\cos(\theta + k.360°) + i\sin(\theta + k.360°)\right) \qquad \text{(complexe macht)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_w^n = r \\ n\theta_w = \theta + k.360°,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(Twee complexe getallen zijn gelijk als hun modulussen gelijk zijn en hun argumenten gelijke hoeken zijn (dus gelijk op een veelvoud van 360° na))

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_w = \sqrt[n]{r} \\ \theta_w = \dfrac{\theta + k.360°}{n},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(De reële machtswortel nemen is geen probleem omdat de modulus positief is)

Voor de waarden $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ vind je verschillende argumenten, dus heeft elk complex getal inderdaad n verschillende n-demachtswortels (met allemaal dezelfde modulus). □

Voorbeeld: Bereken de 9^e machtswortels van $512\,i$. Zijn er strikt reële en strikt imaginaire wortels?

De goniometrische vorm is $512\,i = 512(\cos 90° + i\sin 90°)$, dus de 9^e machtswortels zijn:

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[9]{512}\left(\cos\left(\frac{90°+k.360°}{9}\right)+i\sin\left(\frac{90°+k.360°}{9}\right)\right) \\ &= 2\left(\cos(10°+k.40°)+i\sin(10°+k.40°)\right) \quad \text{, met } k\in\{0,1,2,...,8\} \end{aligned}$$

Dus $w_0 = 2(\cos(10°)+i\sin(10°))$, $w_1 = 2(\cos(50°)+i\sin(50°))$, ...

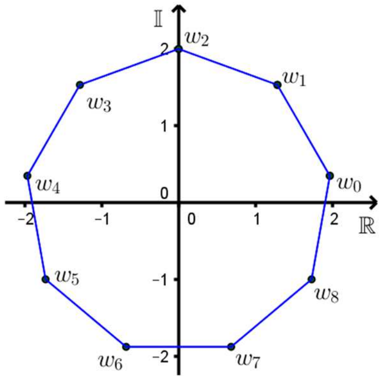
w_k is strikt reëel $\Leftrightarrow 10°+k.40° = m.180° \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}+\frac{9m}{2}$. Maar met $k,m\in\mathbb{Z}$ is dit onmogelijk.

w_k is strikt imaginair $\Leftrightarrow 10°+k.40° = 90°+m.180° \Leftrightarrow k = 2+\frac{9m}{2}$.

De enige waarde van $m\in\mathbb{Z}$ die een waarde geeft voor $k\in\{0,1,2,...,8\}$ is $m=0$, en dan is $k=2$.

De strikt imaginaire wortel is $w_2 = 2(\cos(90°)+i\sin(90°)) = 2i$.

Al deze wortels kunnen we voorstellen in het complexe vlak. Ze vormen een regelmatige negenhoek. We noemen dit het *Argand-diagram* dat bij die vergelijking hoort.



4) Complexe veeltermen

a) Definities – notatie - eigenschappen

De verzameling van de complexe veeltermen $\mathbb{C}[z]$ definiëren we op identiek dezelfde manier als de reële veeltermen $\mathbb{R}[x]$. We zullen ook zien dat zowat alle eigenschappen die we kennen van bij reële veeltermen ook gelden bij complexe veeltermen.

Definitie: Een *complexe veelterm* in de veranderlijke z is een uitdrukking van de vorm:

$$P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_2z^2+a_1z+a_0\text{, met } a_n\in\mathbb{C}_0;\ a_{n-1},\ldots,a_2,a_1,a_0\in\mathbb{C}.$$

Definitie: De complexe getallen $a_n,a_{n-1},\ldots,a_2,a_1,a_0$ noemen we de *coëfficiënten* van die veelterm.

Definitie: De *graad* van een veelterm is de hoogst voorkomende exponent n (met coëfficiënt $\neq 0$).

Notatie: ook complexe veeltermen worden meestal genoteerd met een hoofdletter en de variabele tussen haakjes. Bijvoorbeeld: $A(z)=4z^2-iz+5+3i$. De graad van een veelterm noteren we dan als: $gr(A(z))=2$.

Getalwaarde - Het algoritme van Horner - Nulwaarde

Definitie: *De getalwaarde* van een veelterm $P(z)$ voor een getal $c\in\mathbb{C}$ is de waarde die je bekomt door z te vervangen door c in de veelterm, en noteren we met $P(c)$.

Voorbeeld: Als $A(z)=4z^2-iz+5+3i$ dan is $A(1-i)=4(1-i)^2-i(1-i)+5+3i=4-6i$.

Definitie: Een *nulwaarde* van een complexe veelterm is een complex getal waarvoor de getalwaarde 0 is.

Voorbeeld: $2+3i$ is een nulwaarde van $P(z)=iz^2+(2-i)z+5+i$, want $P(2+3i)=0$.

b) De Euclidische deling - Deelbaarheid

Bewerkingen – de Euclidische deling

Complexe veeltermen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of tot een macht verheffen is geen probleem. Je past gewoon de gekende rekenregels toe. De deling van complexe veeltermen doen we op identiek dezelfde manier als bij reële veeltermen.

Definitie: We noemen $Q(z)$ en $R(z)$ respectievelijk het quotiënt en de rest bij Euclidische deling van het deeltal $A(z)$ door de deler $D(z)$ als en slechts als geldt:

$$A(z)=D(z).Q(z)+R(z)\text{, met } gr(R(z))<gr(D(z)) \text{ of } R(z)=0$$

De veeltermen $Q(z)$ en $R(z)$ kunnen we vinden met het gekende *algoritme van de Euclidische deling*.

Voorbeeld: Bepaal quotiënt en rest bij deling van $A(z)=iz^2+(2-i)z+5+i$ door $D(z)=z-2-3i$.

$$\begin{array}{ccc|cc}
iz^2 & +(2-i)z & +5+i & z & -2-3i \\ \cline{4-5}
iz^2 & +(3-2i)z & & iz & -1+i \\ \cline{1-3}
 & (-1+i)z & +5+i & & \\
 & (-1+i)z & +5+i & & \\ \cline{1-3}
 & & 0 & &
\end{array}$$

We vinden dus:

$Q(z)=iz-1+i$ en $R(z)=0$

Deelbaarheid

Definitie: We noemen een veelterm $A(z)$ *deelbaar* door $D(z)$ als en slechts als de rest bij deling van $A(z)$ door $D(z)$ gelijk is aan 0. We noteren dit met $D(z)\,|\,A(z)$ *(|: is een deler van).*

Zo geldt bijvoorbeeld $z-2-3i \mid iz^2+(2-i)z+5+i$ (een gevolg van de deling hierboven).

Ook de reststelling die we reeds bewezen bij reële veeltermen blijft gelden:

De reststelling: De rest bij deling van een veelterm $A(z)$ door een deler van de vorm $D(z)=z-a$ (met $a\in\mathbb{C}$) wordt gegeven door de functiewaarde $A(a)$.

Onmiddellijk gevolg: $(z-a)\,|\,P(z)\Leftrightarrow P(a)=0$.

Zoals vroeger kunnen we ook het algoritme van Horner blijven gebruiken om te ontbinden in factoren (we hernemen als voorbeeld dezelfde deling als in het vorige voorbeeld):

	i	$2-i$	$5+i$
$2+3i$		$-3+2i$	$-5-i$
	i	$-1+i$	0

Met andere woorden:

$$iz^2+(2-i)z+5+i$$
$$=$$
$$(z-2-3i)(iz-1+i)$$

Enkele stellingen in verband met deelbaarheid

De belangrijkste stelling in verband met deelbaarheid heet niet voor niks *de hoofdstelling van de algebra*.

Stelling (FTA): Elke complexe veelterm van graad minstens één heeft een complexe nulwaarde.

Het bewijs van deze stelling valt (ver) buiten het bestek van deze cursus

We bewijzen wel een belangrijk gevolg van deze stelling:

Stelling: Elke complexe veelterm $P(z)$ van graad $n\in\mathbb{N}_0$ heeft n (al dan niet verschillende) nulwaarden.

Bewijs: We bewijzen deze stelling met behulp van inductie op de graad van de veelterm:

$n=1$: $P(z)=a_1z+a_0$, met $a_1\in\mathbb{C}_0$ en $a_0\in\mathbb{C}$. $P(z)$ heeft één nulwaarde, namelijk $z=-\dfrac{a_0}{a_1}$.

Inductiestap: Stel nu dat de stelling geldt voor $n\in\mathbb{N}_0$, en beschouw een veelterm $P(z)$ van graad $n+1$. Wegens de hoofdstelling van de algebra heeft deze veelterm een nulwaarde. Noem deze nulwaarde n_0.

We kunnen de veelterm dan ontbinden als $P(z)=(z-z_0).Q(z)$, waarbij $Q(z)$ een veelterm is van graad n. Uit de inductiestap volgt dat $Q(z)$ n al dan niet verschillende nulwaarden $z_1, z_2, ..., z_n$ heeft. Dit zijn uiteraard ook allemaal nulwaarden van $P(z)$. We kunnen dus besluiten dat $P(z)$ inderdaad $n+1$ al dan niet verschillende nulwaarden heeft. □

Gevolg: Voor elke complexe veelterm $P(z)\in\mathbb{C}[z]$ geldt: $P(z)=a_n(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_n)$, met $z_1,z_2,...,z_n$ de nulpunten van $P(z)$.

We overlopen voor veeltermen met reële coëfficiënten enkele speciale eigenschappen:

Stelling: Als een reële veelterm $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ een complex getal $z \in \mathbb{C}$ als nulwaarde heeft, dan is ook de complex toegevoegde $\overline{z}$ een nulwaarde van $P(x)$.

Bewijs: Noem $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, met dus $a_i \in \mathbb{R}$, en stel dat $z \in \mathbb{C}$ een nulwaarde is. Dan geldt:

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i z^i} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i}\ \overline{z^i} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{z}^i = 0 \Leftrightarrow P(\overline{z}) = 0 \quad \square$$

Gevolg ①: Elke reële veelterm $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ kan binnen $\mathbb{R}[x]$ ontbonden worden in veeltermen van de eerste en de tweede graad.

Bewijs: In $C[x]$ kan hij ontbonden worden als $P(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_n)$. Stel nu dat $z_i = a + bi$ een nulpunt is, met $a, b \in \mathbb{R}$, dan is dus ook $\overline{z_i} = a - bi$ een nulpunt en kunnen we dat stuk van de ontbinding herschrijven als: $(x - a - bi)(x - a + bi) = (x^2 - 2ax + a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$. Doen we dit voor alle complexe nulpunten die niet reëel zijn dan krijgen we inderdaad een ontbinding binnen $\mathbb{R}[x]$. □

Gevolg ②: Elke reële veelterm van oneven graad n heeft minstens één reëel nulpunt.

Bewijs: De veelterm heeft sowieso n al dan niet verschillende complexe nulpunten. Maar voor elk nulpunt dat niet reëel is, is ook de complex toegevoegde een nulpunt. De complexe nulpunten komen dus altijd in paren voor. Er moet bij een oneven graad dus altijd minstens één reëel nulpunt zijn. □