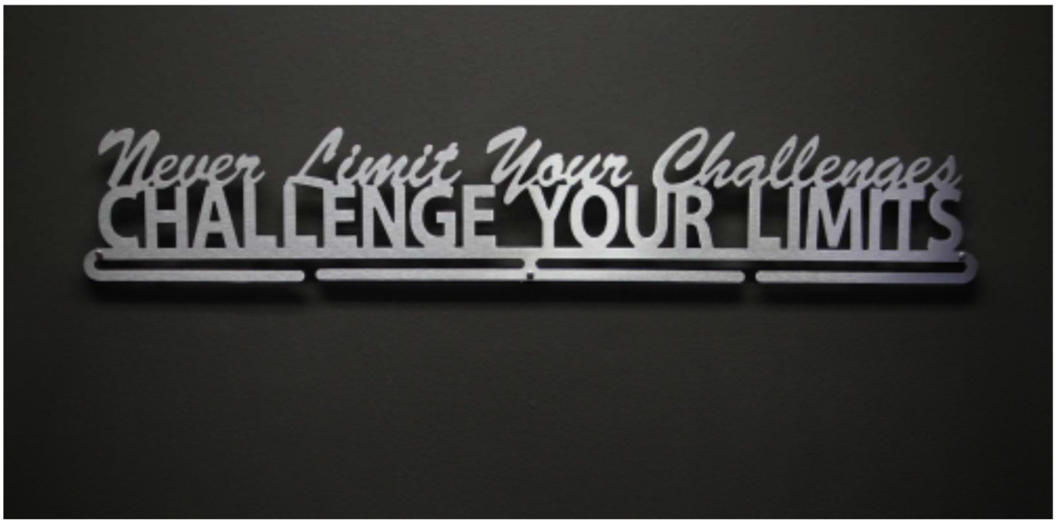
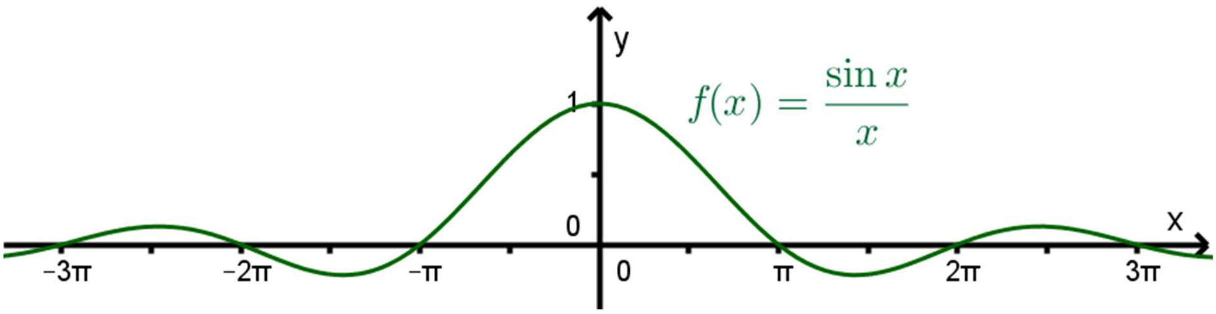
Limieten van functies

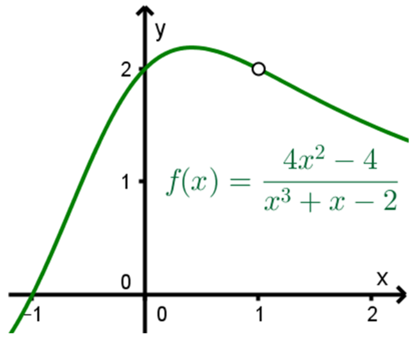




1) Definities

a) Limiet voor $x \to a$

In het hoofdstuk rationale functies in het begin van dit schooljaar zagen we al dat zulke functies soms perforatiepunten hebben. De functiewaarde in zo'n punt bestaat niet, maar de grafiek lijkt er wel door te gaan. Je ziet een voorbeeld op de grafiek rechts, met een functie f die een perforatiepunt heeft in $P(1,2)$.



We zagen al dat we dit noteren als $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

(Merk op dat $f(1)$ niet bestaat, omdat $1 \notin dom\ f$).

We bekijken een rij originelen (x_n) waarvoor geldt dat $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$. Wat doet de beeldrij $(f(x_n))$?

x	$f(x)$
1,1	1,9490
1,01	1,9950
1,001	1,9995
1,0001	1,9999
↓	↓
1	2

Dit is uiteraard het resultaat dat we verwachtten: de beeldrij convergeert naar 2. Maar geldt dit voor alle rijen van originelen die convergeren naar 1? Het is dit dat we gaan formuleren als definitie van (eindige) limiet:

De limiet van een functie f voor x gaande naar $a \in \mathbb{R}$ is gelijk aan $b \in \mathbb{R}$ als en slechts als voor elke rij van originelen (x_n) uit het domein van f die naar a convergeert, de beeldrij $(f(x_n))$ convergeert naar b.

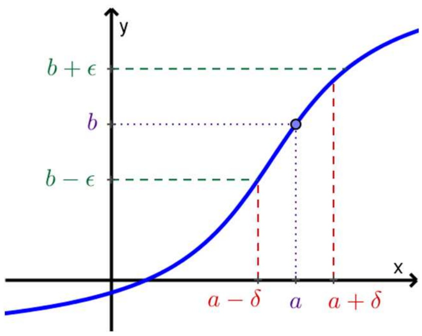
In symbolen: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \iff \forall (x_n) \subset dom\ f : \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b$.

(Met de notatie $(x_n) \subset dom\ f$ bedoelen we uiteraard dat $\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_n \in dom\ f$.)

Deze definitie blijft gelden als de beeldrij $(f(x_n))$ divergeert naar $+\infty$ of $-\infty$.

Je kan echter ook het begrip limiet van een functie definiëren zonder gebruik te maken van limieten van rijen. Dit is grafisch ook eenvoudig in te zien:

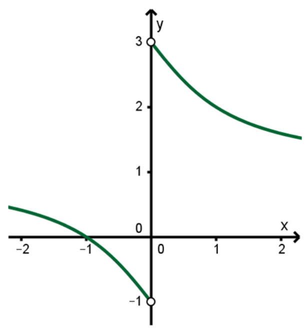
$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists \delta \in \mathbb{R}_0^+, \forall x \in dom\ f :$$
$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$



In woorden: Hoe klein je een marge op de y-as (ε) ook kiest, je kan altijd een marge op de x-as (δ) vinden zodat alle functiewaarden van x-waarden die dichter dan δ bij a liggen (behalve a zelf), dichter dan ε bij b zullen liggen.

b) Linker- en rechterlimieten

We bekijken eens de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{4}{\pi} \cdot \text{Bgtan}\left(\dfrac{1}{x}\right) + 1$.



Deze functie gedraagt zich zeer eigenaardig in de buurt van $x = 0$. Het is duidelijk dat $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ niet bestaat, want alle beeldrijen die convergeren naar 0 van negatieve originelen zullen naar -1 convergeren terwijl alle zulke rijen van positieve originelen naar 3 zullen convergeren.

We noemen dit respectievelijk de linkerlimiet en de rechterlimiet van deze functie voor x gaande naar 0.

We kunnen dit ook algemeen definiëren:

De linkerlimiet van een functie f *voor* x *gaande naar* $a \in \mathbb{R}$ is gelijk aan $b \in \mathbb{R}$ als en slechts als voor elke strikt stijgende rij van originelen (x_n) uit het domein van f die naar a convergeert, de beeldrij $(f(x_n))$ convergeert naar b.

In symbolen: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset dom\, f, (x_n) < a : \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = b$

De rechterlimiet van een functie f *voor* x *gaande naar* $a \in \mathbb{R}$ is gelijk aan $b \in \mathbb{R}$ als en slechts als voor elke strikt dalende rij van originelen (x_n) uit het domein van f die naar a convergeert, de beeldrij $(f(x_n))$ convergeert naar b.

In symbolen: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset dom\, f, (x_n) > a : \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = b$

Deze definities blijven gelden als de beeldrij $(f(x_n))$ divergeert naar $+\infty$ of $-\infty$.

Ook hier kunnen we deze limieten definiëren zonder het over rijen te hebben:

- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists \delta \in \mathbb{R}_0^+, \forall x \in dom\, f : a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$
- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists \delta \in \mathbb{R}_0^+, \forall x \in dom\, f : a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

c) Limiet voor x → ±∞

Volledig analoog aan het voorgaande komen we tot de volgende definities:

De limiet van een functie f *voor* x *gaande naar* $+\infty$ is gelijk aan $b \in \mathbb{R}$ als en slechts als voor elke rij van originelen (x_n) uit het domein van f die naar $+\infty$ divergeert, de beeldrij $(f(x_n))$ convergeert naar b.

In symbolen: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset dom\, f : \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = b$

Dit gaat uiteraard volledig analoog voor $x \to -\infty$. Deze definities blijven gelden als ook de beeldrij $(f(x_n))$ divergeert naar $+\infty$ of $-\infty$.

En ook hier kunnen we deze limieten definiëren zonder het over rijen te hebben:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists r \in \mathbb{R}_0^+, \forall x \in dom\, f : x > r \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists r \in \mathbb{R}_0^-, \forall x \in dom\, f : x < r \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

2) Eigenschappen voor limieten van functies

a) Limieten van bewerkingen van functies

We hebben alle rekenregels die volgen al bewezen in het hoofdstuk rijen. Dat deze blijven gelden voor limieten van functies volgt onmiddellijk uit de (rij-)definities van deze limieten. We verkrijgen zo de gekende eigenschappen (op voorwaarde dat de limieten waarvan sprake bestaan en zinvol zijn).

Voor alle functies f en g, alle reële getallen $r \in \mathbb{R}$ en alle natuurlijke getallen $n \in \mathbb{N}_0$ geldt:

- $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}f(x).\lim\limits_{x\to a}g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a}\left(r\cdot f(x)\right)=r\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$
- $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ (als $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$)
- $\lim\limits_{x\to a}\left(\left(f(x)\right)^n\right)=\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)^n$
- $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$

Ook de rekenregels voor oneindige limieten die we zagen in het hoofdstuk rijen blijven hier uiteraard gelden.

b) Basislimieten

Uit de definitie van limieten van functies volgen ook onmiddellijk de volgende basislimieten:

- $\lim\limits_{x\to a}c=c$ (met $c\in\mathbb{R}$)
- $\lim\limits_{x\to a}x^n=a^n$ (met $n\in\mathbb{N}_0$)
- $\lim\limits_{x\to a}x=a$
- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a}$ (met $a\neq 0$)
- $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$ (met $n\in\mathbb{N}_0$ en uiteraard $a\in\mathbb{R}^+$ als n even is).

c) De insluitstelling(en)

Bij rijen hebben we de insluitstelling bewezen. Ook hier blijft deze stellingen uiteraard gelden, samen met twee heel eenvoudige hulpstellingen:

- Als $\forall x\in\mathbb{R}$, met $0<|x-a|<\delta$ geldt dat $f(x)=g(x)$, dan zal $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)$.
- Als $\forall x\in\mathbb{R}$, met $0<|x-a|<\delta$ geldt dat $f(x)<g(x)$, dan zal $\lim\limits_{x\to a}f(x)\leq\lim\limits_{x\to a}g(x)$.
- Als $\forall x\in\mathbb{R}$, met $0<|x-a|<\delta$ geldt dat $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$, en $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)$, dan zal ook $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)$ (dit heet ook de *insluitstelling voor functies*)

Deze stellingen blijven uiteraard ook gelden bij uitbreiding voor linker- en rechterlimieten.

3) *Rekenregels voor limieten van algebraïsche functies*

Afspraak: de notatie $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ is een korte notatie voor twee limieten: $\lim\limits_{x\to+\infty}$ en $\lim\limits_{x\to-\infty}$.

a) Limieten van veeltermfuncties

Stel dat $f(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_2x^2+c_1x+c_0$, met $c_n\neq 0$, dan geldt:

- $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ (de functiewaarde berekenen)
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}c_nx^n$ (de limiet van de hoogstegraadsterm)

Bewijs:
- $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\left(c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_2x^2+c_1x+c_0\right)$
  $\overset{\boxed{eig}}{=}c_na^n+c_{n-1}a^{n-1}+\ldots+c_2a^2+c_1a+c_0=f(a)$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_2x^2+c_1x+c_0\right)$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(c_n x^n\left(1+\frac{c_{n-1}}{c_n x}+\ldots+\frac{c_2}{c_n x^{n-2}}+\frac{c_1}{c_n x^{n-1}}+\frac{c_0}{c_n x^n}\right)\right)$$

$$\overset{\boxed{eig}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} c_n x^n \cdot \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\cancel{\frac{c_{n-1}}{c_n x}}+\ldots+\cancel{\frac{c_2}{c_n x^{n-2}}}+\cancel{\frac{c_1}{c_n x^{n-1}}}+\cancel{\frac{c_0}{c_n x^n}}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} c_n x^n$$

Voorbeelden: * $\lim_{x\to 2}\left(6x^2-10x-3\right)=1$ * $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-10-3x^3\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-3x^3\right)=+\infty$

b) Limieten van rationale functies

Stel dat $f(x)=\dfrac{T(x)}{N(x)}=\dfrac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_2x^2+b_1x+b_0}$, dan geldt:

- Als $N(a)\neq 0$: $\lim_{x\to a} f(x)=\dfrac{T(a)}{N(a)}$ (de functiewaarde berekenen)
- Als $N(a)=0 \wedge T(a)\neq 0$ dan heeft de functie een verticale asymptoot $x=a$. Om de linker en rechterlimieten voor $x\to a$ te berekenen (altijd $+\infty$ of $-\infty$) is een tekentabel nodig.
- Als $N(a)=0 \wedge T(a)=0$ dan kan je met het algoritme van Horner de graad van de teller en de noemer verlagen. Je krijgt dan een nieuwe eenvoudigere limiet.

$$\lim_{x\to a} f(x) \overset{\boxed{Horner}}{=} \lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}\left(a'_{n-1}x^{n-1}+a'_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a'_2x^2+a'_1x+a'_0\right)}{\cancel{(x-a)}\left(b'_{m-1}x^{m-1}+b'_{m-2}x^{m-2}+\ldots+b'_2x^2+b'_1x+b'_0\right)}$$

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$ (de limiet van het quotiënt van de hoogstegraadstermen)

Bewijs: volgt uit de eigenschappen van limieten en de rekenregels voor limieten van veeltermen.

Voorbeelden: * $\lim_{x\to 2}\dfrac{12x^2-3x+6}{1+5x-3x^2}=\dfrac{12.2^2-3.2+6}{1+5.2-3.2^2}=\dfrac{48}{-1}=-48$

* $\lim_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{x^2+x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1).3}{(x-1).(x+2)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{3}{(x+2)}=\dfrac{3}{3}=1$

* $\lim_{x\to 1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+x-2}\left(=\dfrac{4}{0}\right)$ $\rightarrow$ *tekenonderzoek*

	$-\infty$		-2		-1		$1/3$		1		$+\infty$
$\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+x-2}$		+	|	-	0	+	0	-	|	+	

Dus $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+x-2}=-\infty$ en $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+x-2}=+\infty$

* $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{12x^2-3x+6}{1+5x-3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{12x^2}{-3x^2}=-4$

* $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{5+3x}{1-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{-x^2}=0$

c) Limieten van irrationale functies

Stel dat f een irrationale functies is. Als de functiewaarde $f(a)$ gedefinieerd is (niet onbepaald) zal ook hier gelden dat $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. We bekijken de mogelijke onbepaaldheden van dichterbij:

- $\boxed{\frac{r}{0}\left(\text{met } r \neq 0\right)}$ Net als bij rationale functies is er hier een tekenonderzoek nodig.

  Voorbeeld: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x-1}{\sqrt{x+1}-2}\left(=\dfrac{5}{0}\right)$

	$-\infty$	-1		$1/2$		3	$+\infty$
$\dfrac{2x-1}{\sqrt{x+1}-2}$	///	+	+	0	-	$\mid$	+

  Dus $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \dfrac{2x-1}{\sqrt{x+1}-2} = -\infty$ en $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} \dfrac{2x-1}{\sqrt{x+1}-2} = +\infty$

- $\boxed{\frac{0}{0}}$ Hier moet vermenigvuldigd worden met de toegevoegde wortelvorm omdat je pas dan (met of zonder Horner) het gemeenschappelijke nulpunt kan wegdelen.

  Voorbeeld: $$\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\left(x-\sqrt{3x-2}\right).\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(x^2-2x\right).\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}$$

  $$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2-(3x-2)}{\left(x^2-2x\right).\left(x+\sqrt{3x-2}\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}.(x-1)}{x.\cancel{(x-2)}.\left(x+\sqrt{3x-2}\right)} = \frac{1}{8}$$

Ook voor de oneindige limieten $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ zijn er methodes om onbepaaldheden weg te werken:

- $\boxed{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}$ Hier kan de hoogste macht van x in teller en noemer voorop gezet worden. Hiervoor moet x soms vanonder een wortelteken gehaald worden.

  ⚠ Let daarbij op: Als $x\to+\infty$ dan is $\sqrt{x^2} = x$, maar als $x\to-\infty$ dan is $\sqrt{x^2} = -x$ ⚠

  Voorbeeld: $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-3+\sqrt{x^2+3x-5}}{3x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}.\left(2-\cancel{\frac{3}{x}} - \sqrt{1+\cancel{\frac{3}{x}}-\cancel{\frac{5}{x^2}}}\right)}{\cancel{x}.\left(3+\cancel{\frac{1}{x}}\right)} = \frac{1}{3}$$

- $\boxed{+\infty-\infty}$ Vermenigvuldigen met de toegevoegde wortelvorm herleidt deze onbepaaldheid tot het vorige geval.

  Voorbeeld: $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right).\left(\sqrt{4x^2+x}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$$

  $$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}.\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2\right)} = \frac{1}{4}$$

4) Asymptoten

a) Verticale asymptoten

De (grafiek van een) functie f heeft een *verticale asymptoot (VA)* met vergelijking $x=a$ als en slechts als:

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} f(x)=+\infty$ of $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)=+\infty$ of $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} f(x)=-\infty$ of $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)=-\infty$.

Verticale asymptoten kunnen enkel voorkomen op de grens van het domein van een functie, aangezien een functiewaarde zelf niet oneindig kan zijn.

Voorbeeld: De functie $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$ heeft een verticale asymptoot $v \leftrightarrow x=2$ want:

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}=-\infty \text{ en } \lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}=+\infty$$

	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$	///		0	-	|	+	

Merk op dat $x=-2$ wel een nulpunt is van de noemer van deze functie maar dit levert geen verticale asymptoot omdat de teller daar niet gedefinieerd is. Het domein is $dom\ f=[1,2[\cup]2,+\infty[$.

b) Horizontale asymptoten

De (grafiek van een) functie f heeft een *horizontale asymptoot (HA)* met vergelijking $y=b$ als en slechts als: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ of $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$

Voorbeeld: De functie $f(x)=x+1+\sqrt{x^2-1}$ heeft een horizontale asymptoot $h \leftrightarrow y=1$ want:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+1+\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(x+1-\sqrt{x^2-1}\right)}{x+1-\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+2}{x+1-\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(2+\cancel{2/x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\cancel{1/x}+\sqrt{1-\cancel{1/x}}\right)}=1$$

c) Schuine asymptoten

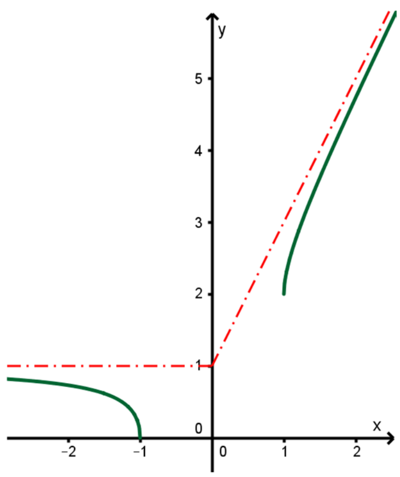
Om schuine asymptoten te berekenen kunnen we een beroep doen op *de formules van Cauchy:*

Stelling: Als $y=mx+q$ een SA is van f, dan is $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ en $q=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)$.

Voorbeeld: De functie $f(x)=x+1+\sqrt{x^2-1}$ heeft een schuine asymptoot $s \leftrightarrow y=2x+1$ want:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1+\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\cancel{1/x}+\sqrt{1-\cancel{1/x^2}}\right)}{\cancel{x}}=2$$

$$\begin{aligned}
q&=\lim_{x\to+\infty}\left(x+1+\sqrt{x^2-1}-2x\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-x+1+\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(-x+1-\sqrt{x^2-1}\right)}{-x+1-\sqrt{x^2-1}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+2}{-x+1-\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(-2+\cancel{2/x}\right)}{\cancel{x}\left(-1+\cancel{1/x}-\sqrt{1-\cancel{1/x^2}}\right)}=1
\end{aligned}$$



Belangrijke opmerking: bij rationale functies zagen we dat een functie maar één HA of SA kan hebben, maar nu merk je dat dit bij andere soorten functies niet zo is. Het gedrag op $-\infty$ hoeft niet noodzakelijk hetzelfde te zijn als het gedrag op $+\infty$.

5) Continuïteit

a) Definitie

Een functie f heet continu in $a \in dom\, f$ als en slechts als $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

(f is dus discontinu in een punt $a \in dom\, f$ als $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ of als $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ niet bestaat.)

Een functie f heet linkscontinu in $a \in dom\, f$ als en slechts als $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = f(a)$

Een functie f heet rechtscontinu in $a \in dom\, f$ als en slechts als $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$

Een alternatieve definitie voor continuïteit (‘zonder’ limieten) kan als volgt gegeven worden:

f is continu in $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists \delta \in \mathbb{R}_0^+, \forall x \in dom\, f : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Merk op dat we continuïteit enkel definiëren voor punten in het domein van de functie.

Bij uitbreiding heet een functie continu f in een interval $[a,b] \subset dom\, f$ als en slechts als ze rechtscontinu is in a, linkscontinu in b en continu in alle punten van $]a,b[$.

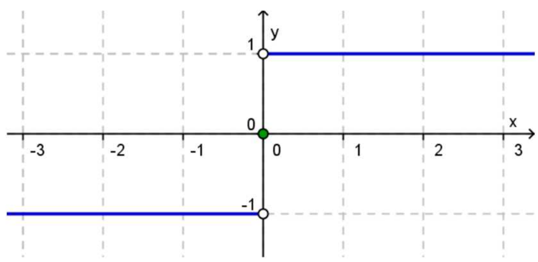
b) Eigenschappen

Uit de definitie van continuïteit en de eigenschappen van limieten van functies volgen onmiddellijk de volgende eigenschappen:

- Als f en g continu zijn in a, dan zijn ook $f+g$, $f-g$ en $f \cdot g$ continu in a.
- Als f en g continu zijn in a, en $g(a) \neq 0$, dan is ook $\dfrac{f}{g}$ continu in a.
- Als f continu is in a en g is continu in $f(a)$, dan is ook $g \circ f$ continu in a.
- Als f continu is in a dan is f^{-1} continu in $f(a)$ (op voorwaarde dat $f(a) \in dom\, f^{-1}$).

Met andere woorden: bijna alle functies die wij kennen zijn continu in hun domein. Dat geldt voor veeltermfuncties, rationale functies, irrationale functies, goniometrische functies, cyclometrische functies (en ook exponentiële en logaritmische functies).

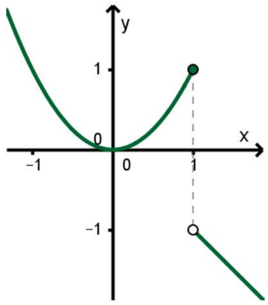
Een voorbeeld van een functie die niet continu is een punt van haar domein is de signumfunctie waarvan je hiernaast de grafiek ziet. Deze is overal continu behalve in 0, want $f(0)=0$ maar $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ bestaat niet.



Ook samengestelde functies kunnen discontinu zijn. Zo is de functie $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\le 1 \\ -x & ,x>1 \end{cases}$ niet continu in 1.

Ze is er echter wel linkscontinu, want $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x)=f(1)$.

Deze functie vertoont een sprong, dat is typisch voor een discontinuïteit.



c) De stelling van Bolzano

Stelling: Als f continu is in $[a,b]$ en $f(a)\cdot f(b)<0$ dan heeft f een nulwaarde in $[a,b]$.

Bewijs: We stellen voor de eenvoud $f(a)>0$ en $f(b)<0$ (het andere bewijs verloopt analoog).

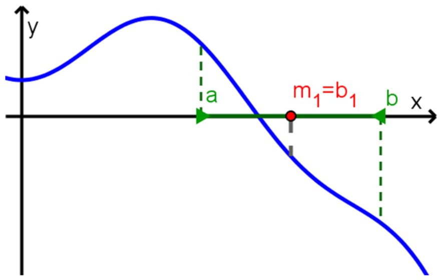
We stellen een algoritme op dat ons zal toelaten het nulpunt te definiëren:

Noem m_1 het midden van a en b, dus stel $m_1=\dfrac{a+b}{2}$.

Als $f(m_1)=0$ dan is de stelling bewezen.

Als $f(m_1)>0$ noem dan $a_1=m_1$ en stel $b_1=b$.

Als $f(m_1)<0$ noem dan $a_1=a$ en stel $b_1=m_1$.



We krijgen zo een nieuw interval $[a_1,b_1]$, met $f(a_1)>0$ en $f(b_1)<0$, en breedte $b_1-a_1=\dfrac{b-a}{2}$.

Herhalen we deze redenering nogmaals (met m_2 als midden van $[a_1,b_1]$), dan krijgen we een nieuw interval $[a_2,b_2]$, met $f(a_2)>0$ en $f(b_2)<0$, en breedte $b_2-a_2=\dfrac{b-a}{2^2}$.

Blijven we op deze manier verder gaan dan vinden we ofwel ooit een nulwaarde m_n (en dan is de stelling bewezen), ofwel krijgen we twee rijen (a_n) en (b_n).

De rij (a_n) is monotoon stijgend en naar boven begrensd door b, en de rij (b_n) is monotoon dalend en naar onder begrensd door a, dus beide rijen convergeren. noem $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=A$ en $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=B$.

Anderzijds halveert de lengte b_n-a_n telkens, zodat geldt:

$B-A=\lim\limits_{n\to+\infty} b_n-\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0 \Rightarrow A=B$. Stel $c=A=B$. We bewijzen nu nog dat c de nulwaarde is die we zoeken.

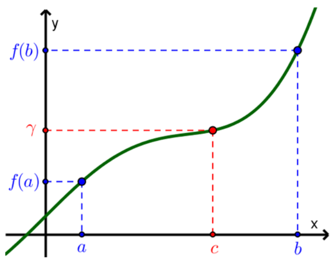
$$\forall n\in\mathbb{N}_0: \left.\begin{array}{l} f(a_n)>0 \Rightarrow f(c)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)\ge 0 \\ f(b_n)<0 \Rightarrow f(c)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n)\le 0 \end{array}\right\} f(c)=0 \quad \square$$

Opmerking: het bewijs van deze stelling is een algoritme dat ons toelaat om het gezochte nulpunt te benaderen tot op elke gewenste nauwkeurigheid.

d) De tussenwaardestelling

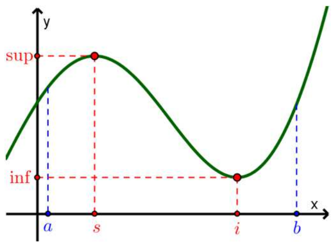
Een logische veralgemening van deze stelling zegt dat een continue functie alle functiewaarden tussen twee waarden in een interval bereikt: Als f continu is in $[a,b]$, met $f(a) \neq f(b)$, en γ een functiewaarde tussen $f(a)$ en $f(b)$, dan bestaat er een $c \in \left]a,b\right[$ zodat $f(c) = \gamma$.

Bewijs: Pas de stelling van Bolzano toe op de functie $g(x) = f(x) - \gamma$. □



e) Stelling van Weierstrass

Een zeer belangrijke stelling in de analyse is de stelling die zegt dat elke continue functie in een interval ook begrensd is en dus een supremum en een infimum bereikt. Dit is *de stelling van Weierstrass*.
Hiernaast zie je de stelling geïllustreerd.
Het bewijs van deze stelling valt (ver) buiten het bereik van deze cursus.



f) Regula falsi

Een andere methode om nulpunten te benaderen is de *regula falsi*. We vertrekken weer van een functie f die continu is in $[a,b]$, en stellen voor de eenvoud $f(a) > 0$ en $f(b) < 0$.

Deze methode werkt op dezelfde manier als de methode van Bolzano, op één detail na. De waarden m_{i+1} zullen nu niet de middens zijn van de intervallen $[a_i, b_i]$ maar de x-coördinaten van de snijpunten van de koorde A_iB_i met de x-as (hierbij is $A_i(a_i, f(a_i))$ en $B_i(b_i, f(b_i))$). We voeren de berekening uit voor de startpunten $A(a, f(a))$ en $B(b, f(b))$:

De koorde heeft als vergelijking $AB \leftrightarrow y - f(a) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$.

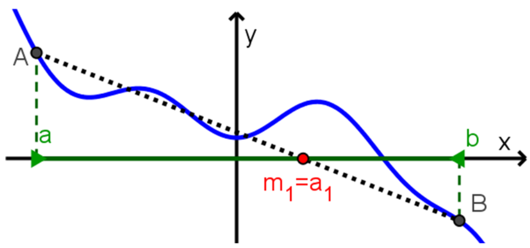
We vinden het snijpunt met de x-as door $y = 0$ te stellen (en dan is $x = m_1$):

$$-f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (m_1 - a) \Leftrightarrow -b \cdot f(a) \cancel{+a \cdot f(a)} = \left(f(b) - f(a)\right) \cdot m_1 - a \cdot f(b) \cancel{+a \cdot f(a)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Als $f(m_1) = 0$ dan is dit het gezochte nulpunt.

Als $f(m_1) > 0$ noem dan $a_1 = m_1$ en stel $b_1 = b$. Als $f(m_1) < 0$ noem dan $a_1 = a$ en stel $b_1 = m_1$.
Blijven we op deze manier verder gaan dan vinden we ofwel een nulwaarde m_n (en dan is de stelling bewezen), ofwel kan je bewijzen dat de rij (m_n) convergeert naar het nulpunt.



Het bewijs van deze methode valt echter (heel ver) buiten het bestek van deze cursus. Een belangrijk verschil met de methode van Bolzano is dat hier de breedte van het interval $[a_i b_i]$ niet noodzakelijk willekeurig klein wordt.