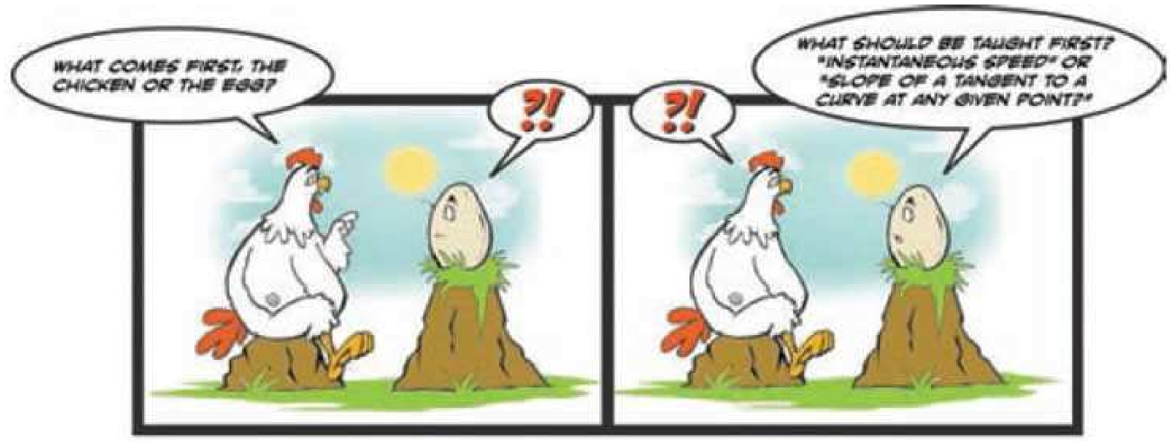
Afgeleiden


WHAT COMES FIRST, THE CHICKEN OR THE EGG?
?!
?!
WHAT SHOULD BE TAUGHT FIRST? "INSTANTANEOUS SPEED" OR "SLOPE OF A TANGENT TO A CURVE AT ANY GIVEN POINT?"


GARFIELD
I'M PROUD TO REPORT I'VE GAINED ONLY ONE POUND!
© 1992 United Feature Syndicate, Inc
WITH GARFIELD, THE GOAL OF A DIET ISN'T LOSING WEIGHT, IT'S SLOWING DOWN THE GAIN

1) Het begrip afgeleide

a) Inleiding

Bij de wielerwedstrijd 'De Waalse Pijl' komen de renners aan op de muur van Hoei. Zoals je kan zien op de figuur hiernaast heeft deze klim een gemiddeld stijgingspercentage van 9,8%. Wiskundig gezien kunnen we dit interpreteren als een differentiequotiënt.
Je ziet echter ook dat de maximale hellingsgraad 19% is. Dit wil zeggen dat er ergens een punt is op de muur van Hoei waar de ogenblikkelijke helling 19% is. Maar hoe kunnen we dit wiskundig interpreteren?

b) Differentiequotiënt

Het differentiequotiënt van een functie in een interval geeft de gemiddelde helling weer van die functie in dat interval. Symbolisch wordt dit:

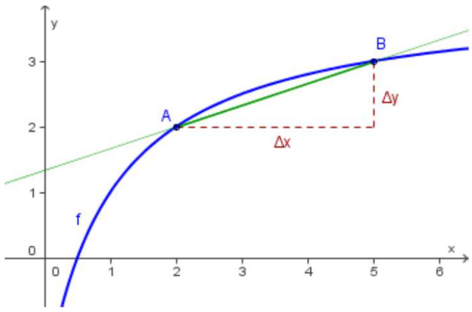
Het differentiequotiënt van de functie $y = f(x)$ in het interval $[a,b]$ is $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{[a,b]} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Grafisch gezien is dit de richtingscoëfficiënt van de rechte die de punten $A(a, f(a))$ en $B(b, f(b))$ verbindt. Het kan dus geïnterpreteerd worden als de gemiddelde helling van de functie in dat interval.

Voorbeeld: Als $f(x) = \dfrac{4x-2}{x+1}$, bereken dan het differentiequotiënt voor het interval $[2,5]$.

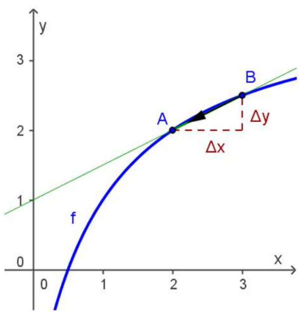
$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{[2,5]} = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

Hiernaast op de figuur zie je dat dit meetkundig gezien de richtingscoëfficiënt is van de rechte AB.



c) Ogenblikkelijke helling

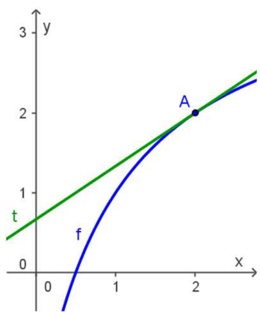
Stel dat je in het voorbeeld uit de vorige vraag niet wil weten wat de gemiddelde helling is, maar eerder geïnteresseerd bent in hoe groot de ogenblikkelijke helling is in punt A. We zouden dit kunnen benaderen door punt B variabel te maken en steeds dichter bij punt A te nemen. De rechte AB wordt dan een zeer goede benadering van de raaklijn in punt A. We noemen nu de afgeleide in punt A de limiet van het differentiequotiënt waarbij punt B samenvalt met punt A.



In ons voorbeeld wordt dit (we berekenen de ogenblikkelijke helling in $x = 2$):

$$h_A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{4(2+\Delta x)-2}{2+\Delta x+1} - 2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \cancel{\Delta x}}{(3+\Delta x) \cdot \cancel{\Delta x}} = \frac{2}{3}$$



Meetkundig gezien is dit de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in punt A, het is dus de perfecte maat voor de ogenblikkelijke helling in punt A.

d) Afgeleide in een punt

Het begrip afgeleide kunnen we alleen definiëren in inwendige punten van het domein van een functie f. Om dit begrip te definiëren hebben we een aanvullende definitie nodig.

- Een *basisomgeving* B_a van een reëel getal a is een interval $\left]a-\varepsilon, a+\varepsilon\right[$, met $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$.
- Een reëel getal wordt een *inwendig punt* genoemd van een verzameling $V \subset \mathbb{R}$ als en slechts als er een basisomgeving van bestaat die volledig in V ligt. In symbolen wordt dit:

$$a \text{ is een inwendig punt van } V \iff \exists\, B_a : B_a \subset V$$

Is a een inwendig punt van het domein van een functie f, dan definiëren we de limiet

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

als *de afgeleide van de functie f in punt a* op voorwaarde dat deze limiet bestaat en eindig is.

Als de afgeleide in een punt bestaat noemen we de functie daar *afleidbaar*.

Dit is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn t in punt $A(a, f(a))$ aan de grafiek van f, dus:

$$t \leftrightarrow y = f'(a).(x-a) + f(a).$$

Stellen we in de definitie $a + \Delta x = x$, dan kunnen we de definitie ook herschrijven als:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Beide definities hebben hun voordelen. We illustreren met een voorbeeld:

Voorbeeld: Bereken met behulp van de definitie de afgeleide van $f(x) = x^3 - x$ in $x = 2$.

Eerste methode:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[(2+\Delta x)^3 - (2+\Delta x)\right] - (2^3 - 2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8 + 12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3 - 2 - \Delta x - 6}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^{\cancel{3}\,2} + 6\Delta x^{\cancel{2}} + 11\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = 11 \end{aligned}$$

Tweede methode:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{(x^3 - x) - (2^3 - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2 + 2x + 3)}{\cancel{x-2}} \\ &= 11 \end{aligned}$$

Welke methode je gebruikt bij welke oefeningen maak je zelf uit.

2) Afgeleide functies

In elk punt $x \in \mathbb{R}$ waar de functie f afleidbaar is, kunnen we de afgeleide functie $f\,'$ definiëren als de functie die het punt x afbeeldt op de afgeleide $f\,'(x)$ van de functie f in dat punt.

Per definitie geldt dus: $f\,'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

a) Notaties

Voor de afgeleide functie $f\,'$ worden regelmatig ook andere notaties gebruikt: Df en $\dfrac{df}{dx}$.

Het voordeel van de tweede notatie is dat ze aangeeft naar welke variabele je afleidt.

b) Afgeleiden van gekende functies

De afgeleide van een constante

De afgeleide in punt $a \in \mathbb{R}$ van een constante functie $f(x) = c \in \mathbb{R}$, wordt gegeven door:

$$f\,'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{0}{x - a} = 0$$, of korter genoteerd: $Dc = 0$.

De afgeleide van de identieke functie

De afgeleide in punt $a \in \mathbb{R}$ van de identieke functie $f(x) = x$, wordt gegeven door:

$$f\,'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = 1$$, of korter genoteerd: $Dx = 1$.

De afgeleide van de kwadratische functie

De afgeleide in punt $a \in \mathbb{R}$ van de kwadratische functie $f(x) = x^2$, wordt gegeven door:

$$f\,'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}} = \lim_{x \to a}(x+a) = 2a,$$

of korter genoteerd: $Dx^2 = 2x$.

De afgeleide van de kubische functie

De afgeleide in punt $a \in \mathbb{R}$ van de kubische functie $f(x) = x^3$, wordt gegeven door:

$$f\,'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x^2 + ax + a^2)}{\cancel{x-a}} = \lim_{x \to a}(x^2 + ax + a^2) = 3a^2,$$

of korter genoteerd: $Dx^3 = 3x^2$.

De afgeleide van de machtfunctie

De vorige functies zijn eigenlijk speciale gevallen van de functie $f(x) = x^n$, met $n \in \mathbb{N}_0$:

$$f\,'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-1})}{\cancel{x-a}}$$

$$= \lim_{x \to a}(x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-1}) = n.a^{n-1}$$, of korter genoteerd: $Dx^n = n.x^{n-1}$.

De afgeleide van de omgekeerde functie

De afgeleide in punt $a \in \mathbb{R}_0$ van de omgekeerde functie $f(x) = \dfrac{1}{x}$, wordt gegeven door:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{a - x}{ax}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{-\cancel{(x-a)}}{ax\cancel{(x-a)}} = -\frac{1}{a^2},$$

of korter genoteerd: $D\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{x^2}$.

De afgeleide van de vierkantswortelfunctie

De afgeleide in punt $a \in \mathbb{R}_0^+$ van de vierkantswortelfunctie $f(x) = \sqrt{x}$, wordt gegeven door:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)}{(x - a)\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\cancel{x-a}}{\cancel{(x-a)}\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$, of korter genoteerd: $D\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

De afgeleide van de kubische wortelfunctie

De afgeleide in punt $a \in \mathbb{R}_0$ van de kubische wortelfunctie $f(x) = \sqrt[3]{x}$, wordt gegeven door:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}\right)}{(x - a)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\cancel{x-a}}{\cancel{(x-a)}\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}\right)} = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$$, of korter genoteerd: $D\sqrt[3]{x} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

c) Rekenregels voor afgeleide functies

De afgeleide van een som of verschil van twee functies

Stel dat f en g beide afleidbaar zijn in a, dan geldt voor de afgeleide van hun som:

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\left(f(x) + g(x)\right) - \left(f(a) + g(a)\right)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) + g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(a) + g'(a)\end{aligned}$$

Korter genoteerd geeft dit: $D(f+g) = Df + Dg$.

Volledig analoog kan je bewijzen dat $D(f-g) = Df - Dg$.

De afgeleide van een product van twee functies

Stel dat f en g beide afleidbaar zijn in a, dan geldt voor de afgeleide van hun product:

$$
\begin{aligned}
(f\cdot g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(x)+f(a)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(x)\right]+\lim_{x\to a}\left[f(a)\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}g(x)+\lim_{x\to a}f(a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\
&= f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)
\end{aligned}
$$

Korter genoteerd geeft dit: $D(f\cdot g)=f\cdot Dg+g\cdot Df$.

Gevolg: Als hierin g een constante functie is (stel $g(x)=c\in\mathbb{R}$), dan krijgen we:

$$D(c\cdot f)=c\cdot Df+\cancel{f\cdot\underbrace{Dc}_{=0}}=c\cdot Df\ .$$

Voorbeeld: We zijn nu voldoende gewapend om alle veeltermfuncties af te leiden:

$$D\left(5x^8+2x^3-4x+3\right)=5Dx^8+2Dx^3-4Dx+D3=5.8x^7+2.3x^2-4.1+0=40x^7+6x^2-4$$

De formule voor het product van twee functies kan heel eenvoudig uitgebreid worden:

$$D(f\cdot g\cdot h)=D\big(f\cdot(g\cdot h)\big)=f\cdot D(g\cdot h)+g\cdot h\cdot Df=f\cdot g\cdot Dh+f\cdot h\cdot Dg+g\cdot h\cdot Df$$

De afgeleide van de omgekeerde van een functie

Stel dat f afleidbaar is in a, en dat $f(a)\neq 0$, dan geldt voor de afgeleide van de omgekeerde:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{f}\right)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x)-\left(\frac{1}{f}\right)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(a)-f(x)}{f(x)\cdot f(a)}}{x-a}\\
&= -\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)\cdot f(a)}=-f'(a)\cdot\frac{1}{\left(f(a)\right)^2}=-\frac{f'(a)}{\left(f(a)\right)^2}
\end{aligned}
$$

Korter genoteerd geeft dit: $D\left(\frac{1}{f}\right)=-\frac{Df}{f^2}$.

De afgeleide van een quotiënt van twee functies

Uit de vorige twee rekenregels kunnen we de regel voor het quotiënt van twee functies afleiden:

$$D\left(\frac{f}{g}\right)=D\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)=f\cdot D\left(\frac{1}{g}\right)+\frac{1}{g}\cdot Df=f\cdot\frac{-Dg}{g^2}+\frac{Df}{g}=\frac{g\cdot Df-f\cdot Dg}{g^2}\ .$$

(Deze regel geldt uiteraard enkel als de noemer verschillend is van nul.)

Voorbeeld: $D\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+1} = \dfrac{\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x+1}} - 2x\sqrt{x+1}}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{x^2+1-4x\left(x+1\right)}{2\left(x^2+1\right)^2\sqrt{x+1}} = \dfrac{-3x^2-4x+1}{2\left(x^2+1\right)^2\sqrt{x+1}}$

De afgeleide van een samenstelling van twee functies: de kettingregel

Stel dat f afleidbaar is in a en dat g afleidbaar is in $f\left(a\right)$, dan geldt voor de samenstelling:

$$\begin{aligned}
\left(g\circ f\right)'\left(a\right) &= \lim_{x\to a}\frac{\left(g\circ f\right)\left(x\right)-\left(g\circ f\right)\left(a\right)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{g\left(f\left(x\right)\right)-g\left(f\left(a\right)\right)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a}\frac{g\left(f\left(x\right)\right)-g\left(f\left(a\right)\right)}{f\left(x\right)-f\left(a\right)}\cdot\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a} \\
&= \lim_{f(x)\to f(a)}\frac{g\left(f\left(x\right)\right)-g\left(f\left(a\right)\right)}{f\left(x\right)-f\left(a\right)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a} = g'\left(f\left(a\right)\right)\cdot f'\left(a\right)
\end{aligned}$$

Korter geschreven geeft dit $D\left(g\circ f\right) = \left(\left(Dg\right)\circ f\right)\cdot Df$.

Deze regel ziet er op het eerste zicht misschien ingewikkeld uit, maar is in de praktijk heel eenvoudig.

In woorden gaat het als volgt: je leidt een samenstelling van twee functies af door de buitenste functie af te leiden met als veranderlijke de binnenste functie, waarna je vermenigvuldigt met de afgeleide van de binnenste functie. Deze regel wordt om die reden weleens de kettingregel genoemd.

Het is héél belangrijk dat je deze regel vlot leert toepassen. Je zal hem vanaf nu constant gebruiken.

Belangrijk gevolg: Elke eigenschap die we in het vorige hoofdstukje (afgeleiden van gekende functies) bewezen kunnen we nu uitbreiden door in de eigenschap x te vervangen door $f\left(x\right)$ en wegens de kettingregel te vermenigvuldigen met $Df\left(x\right)$. Twee voorbeelden zijn:

- $D\left(f\left(x\right)\right)^m = m\cdot\left(f\left(x\right)\right)^{m-1}\cdot Df\left(x\right)$
- $D\sqrt{f\left(x\right)} = \dfrac{Df\left(x\right)}{2\sqrt{f\left(x\right)}}$

Voorbeeld: $D\left(\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^4\right) = 4\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^3\cdot\left(1+\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\right)$

De uitgebreide machtregel (voor rationale exponenten)

We kunnen nu bewijzen dat de gekende regel $Dx^n = n.x^{n-1}$ ook geldt met rationale exponenten.

Stel dat $q=\dfrac{z}{n}$ (met dus $q\in\mathbb{Q}_0$, $z\in\mathbb{Z}_0$ en $n\in\mathbb{N}_0$), dan geldt:

$$\begin{aligned}
f\left(x\right)=x^q \Leftrightarrow f\left(x\right)=x^{z/n} \Leftrightarrow \left(f\left(x\right)\right)^n = x^z &\Rightarrow D\left(\left(f\left(x\right)\right)^n\right) = D\left(x^z\right) \\
&\Leftrightarrow n\cdot\left(f\left(x\right)\right)^{n-1}.f'\left(x\right) = z.x^{z-1} \Leftrightarrow f'\left(x\right) = \frac{z.x^{z-1}}{n\cdot\left(f\left(x\right)\right)^{n-1}},
\end{aligned}$$

dus $f'\left(x\right) = \dfrac{z.x^{z-1}}{n\cdot\left(x^{\frac{z}{n}}\right)^{n-1}} = \dfrac{z}{n}\cdot x^{z-1-\frac{z}{n}\cdot(n-1)} = \dfrac{z}{n}\cdot x^{\frac{\cancel{nz}-n-\cancel{zn}+z}{n}} = \dfrac{z}{n}\cdot x^{\frac{z}{n}-1} = q\cdot x^{q-1}$.

d) Hogere afgeleiden

Als de afgeleide functie van een functie op zijn beurt ook afleidbaar is, dan kunnen nog eens afleiden. Op die manier krijg je een nieuwe functie die we de tweede afgeleide noemen, of de afgeleide van de tweede orde. Uiteraard kan je op die manier ook afgeleiden van hogere orde definiëren.

We noteren de tweede afgeleide van f als f'' of $D^2 f$ of $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

De n-de afgeleide van f noteren we als $f^{(n)}(x)$ of $D^n f$ of $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Voorbeeld: Bereken de derde afgeleide van $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x}$.

$f'(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x^2}$, $f''(x) = 6x - \dfrac{2}{x^3}$ en $f'''(x) = 6 + \dfrac{6}{x^4}$.

3) Afleidbaarheid

a) Linker- en rechterafgeleide

Als de linkerlimiet $f'(a)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ bestaat en eindig is dan noemen we die limiet de *linkerafgeleide* van f in a. De functie heet dan *links afleidbaar* in a.

Als de rechterlimiet $f'(a)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ bestaat en eindig is dan noemen we die limiet de *rechterafgeleide* van f in a. De functie heet dan *rechts afleidbaar* in a.

Het is duidelijk dat een functie afleidbaar is in een punt als en slechts als ze links en rechts afleidbaar is en als de linkerafgeleide en de rechterafgeleide gelijk zijn.

Is f continu in a dan zal ook $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}}f'(x)$ en $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}}f'(x)$, op voorwaarde dat deze limieten bestaan.

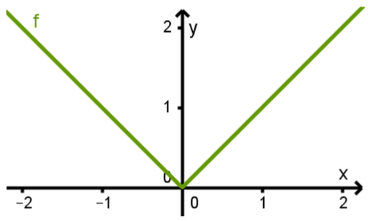
b) Knikpunten

Als f continu is in a en er geldt dat de linkerafgeleide niet gelijk is aan de rechterafgeleide dan zeggen we dat de functie een *knikpunt* vertoont in $\left(a,f(a)\right)$.

Stel $f(x)=|x|=\sqrt{x^2}$, dan is $f'(x)=\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2}}=\dfrac{x}{|x|}=\dfrac{1}{\operatorname{sgn}(x)}$.

Dus $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}f'(x)=-1$ en $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}f'(x)=1$.

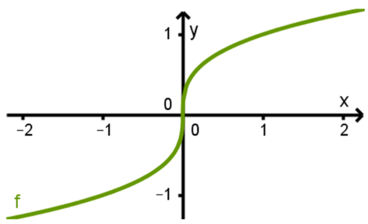
De functie f heeft dus een knikpunt in de oorsprong.



c) Verticale raaklijnen

Als f continu is in a en er geldt dat $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=+\infty$ of $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=-\infty$ dan heeft de grafiek van de functie een verticale raaklijn $x=a$.

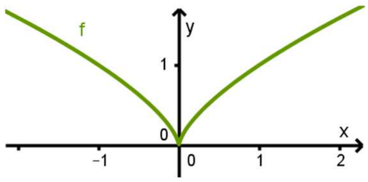
Voorbeeld: Als $f(x)=\sqrt[3]{x}$ dan is $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ en hierbij geldt $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$. De y-as is dus een verticale raaklijn.



d) Keerpunten

Als f continu is in a en er geldt dat $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}}f'(x)=+\infty$ en $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}}f'(x)=-\infty$ (of omgekeerd) dan zeggen we dat de grafiek van f een keerpunt vertoont in $\left(a,f(a)\right)$.

Voorbeeld: Stel $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, dan is $f'(x)=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=\dfrac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}\sqrt[3]{x}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Dan geldt:



- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = +\infty$

De functie f heeft dus een keerpunt in de oorsprong.

e) Verband tussen afleidbaarheid en continuïteit

Stelling: Als f afleidbaar is in a dan is f ook continu in a.

Bewijs: f is afleidbaar in a $\Leftrightarrow f'(a)$ bestaat en is eindig, en dan geldt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a) \right)$$

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \cdot \lim_{x \to a} (x - a) + f(a) = \cancel{f'(a) \cdot 0} + f(a)$$

$$= f(a) \Rightarrow \quad f \text{ is continu in } a \quad \square$$

Gevolg: Als f niet continu is in a dan is f niet afleidbaar in a.

Opmerking: deze stelling impliceert niet dat f afleidbaar is als f continu is, daarvan hebben we ondertussen al voorbeelden gezien in de vorige drie paragrafen.

4) Toepassingen van afgeleiden

a) Raaklijn en normaal

Is f afleidbaar in a dan is de raaklijn $t \leftrightarrow y = f'(a).(x-a)+f(a)$.

De *normaal* in een punt $A(a, f(a))$ van de grafiek van een functie is de rechte die door dat punt gaat en loodrecht staat op de raaklijn.

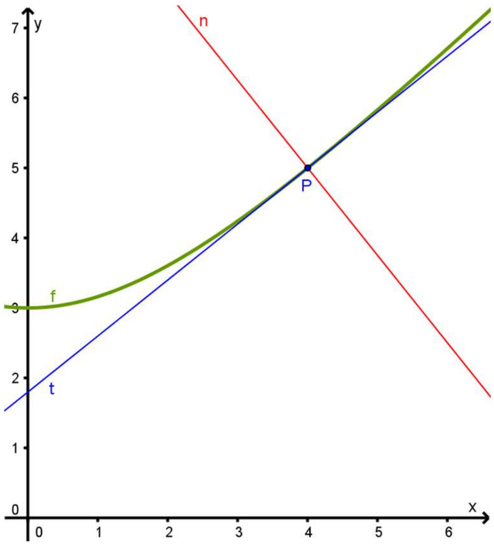
Als $f'(a) \neq 0$ dan geldt dus voor de normaal: $n \leftrightarrow y = -\dfrac{1}{f'(a)} \cdot (x-a)+f(a)$.

Voorbeeld: Stel de vergelijking op van de raaklijn en de normaal aan $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ in $P(4,5)$.

$f'(x) = \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$, dus $f'(4) = \dfrac{4}{5}$.

$t \leftrightarrow y = \dfrac{4}{5}(x-4)+5 \leftrightarrow y = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{9}{5}$ en

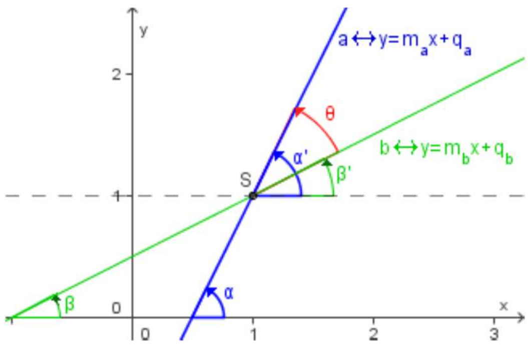
$n \leftrightarrow y = -\dfrac{5}{4}(x-4)+5 \leftrightarrow y = -\dfrac{5}{4}x + 10$



b) Hoek tussen twee snijdende krommen

Hoek tussen twee snijdende rechten

De hellingshoek van een rechte is de georiënteerde hoek die een rechte maakt met de x-as.



Uit de figuur blijkt dat een hoek tussen twee rechten gegeven wordt door $\theta = \alpha - \beta$, met α en β de hellingshoeken van de betreffende rechten.

Voor de hellingshoek α van rechte $a \leftrightarrow y = m_a x + q_a$ geldt $\tan\alpha = m_a$ en analoog is $\tan\beta = m_b$.

Dus voor een hoek θ tussen de rechten geldt:

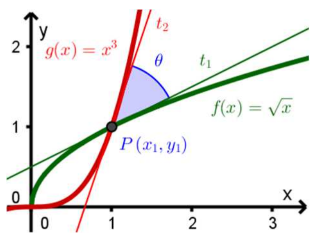
$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta} = \frac{m_a - m_b}{1+m_a\cdot m_b}.$$

Hoek tussen twee snijdende krommen

De hoek θ tussen twee snijdende krommen f en g definiëren als de hoek tussen de raaklijnen aan die krommen in hun snijpunt $P(x_1, y_1)$.

Als de krommen afleidbaar zijn in dat snijpunt, dan geldt voor de rico's van de raaklijnen t_1 en t_2 dat $m_{t_1} = f'(x_1)$ en $m_{t_2} = g'(x_1)$.

Uit het voorgaande volgt dan dat: $\tan\theta = \dfrac{g'(x_1) - f'(x_1)}{1+g'(x_1)\cdot f'(x_1)}$.



Voorbeeld: We berekenen de hoek tussen de grafieken van $f(x)=\sqrt{x}$ en $g(x)=x^3$ in hun snijpunt $P(1,1)$. De afgeleiden zijn $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ en $g'(x)=3x^2$, dus is $f'(1)=\dfrac{1}{2}$ en $g'(1)=3$. Voor de hoek geldt dus $\tan\theta=\dfrac{3-1/2}{1+3\cdot 1/2}=1$, zodat $\theta=45°$ (kies altijd de kleinste positieve hoek).

c) Een toepassing uit de kinematica

In de fysica noteren we de afgelegde weg vaak met s, de snelheid met v en de versnelling met a.

De gemiddelde snelheid v over een interval Δt bereken je met het quotiënt $v=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, dus is het logisch dat de ogenblikkelijke snelheid wordt gegeven door $v=\dfrac{ds}{dt}$. Analoog is $a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2s}{dt^2}$.

Je kan nu de gekende formules uit de fysica voor een eenparig versnelde rechtlijnige beweging (EVRB) controleren.

Voor een beweging met een constante versnelling a, beginsnelheid v_0 en beginpositie s_0 geldt:

$v=a.t+v_0$ en $s=a.\dfrac{t^2}{2}+v_0.t+s_0$. Er geldt inderdaad dat $v=\dfrac{ds}{dt}$ en dat $a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2s}{dt^2}$.

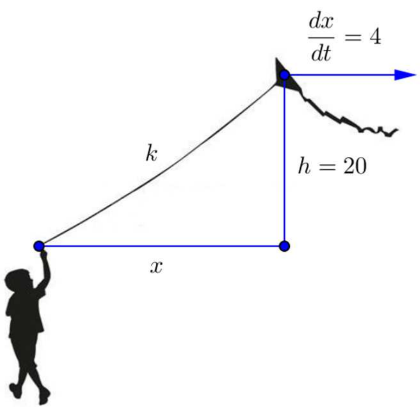
Verwante snelheden

Voorbeeld 1: Een (cilindrische) regenton heeft een straal van $40\ cm$ en een hoogte van $1,2\ m$. Het regent hard waardoor de ton zich vult aan een tempo van $0,2\ l/s$ (liter per minuut). Met welke snelheid stijgt het water in de ton?

Voor het huidig volume water in de ton geldt $V=\pi r^2 h=1600\pi.h$, met h de huidige waterhoogte.

Beide leden afleiden (naar t) geeft: $\dfrac{dV}{dt}=1600\pi\cdot\dfrac{dh}{dt}\Rightarrow 200=1600\pi\cdot\dfrac{dh}{dt}\Leftrightarrow\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{200}{1600\pi}\approx 0,04$ (merk op dat $\dfrac{dV}{dt}=0,2\dfrac{l}{s}=200\dfrac{cm^3}{s}$, zodat $\dfrac{dh}{dt}\approx 0,04\dfrac{cm}{s}$).

Voorbeeld 2: Robbe speelt met zijn vlieger op het strand. Hij vliegt op een constante hoogte van $20\ m$ (boven Robbe zijn hand). Zijn vlieger vliegt van hem weg met een snelheid van $4\ m/s$. Met welke snelheid moet Robbe het touw lossen als hij het strak gespannen houdt en de vlieger nu $50\ m$ van hem verwijderd is?



Met de conventies op de figuur geldt wegens de stelling van Pythagoras: $x^2+h^2=k^2$.

De hoogte blijft constant (20) en op dit moment is $k=50$, dus is nu $x=\sqrt{50^2-20^2}=10\sqrt{21}$.

Afleiden naar t geeft: $\dfrac{d}{dt}(x^2)+\cancel{\dfrac{d}{dt}(h^2)}=\dfrac{d}{dt}(k^2)\Rightarrow \cancel{2}x\dfrac{dx}{dt}=\cancel{2}k\dfrac{dk}{dt}\Rightarrow\dfrac{dk}{dt}=\dfrac{10\sqrt{21}}{50}\cdot 4\approx 3,67$.

Robbe moet dus het touw lossen met een snelheid van $3,67\ m/s$.

d) De methode van Newton

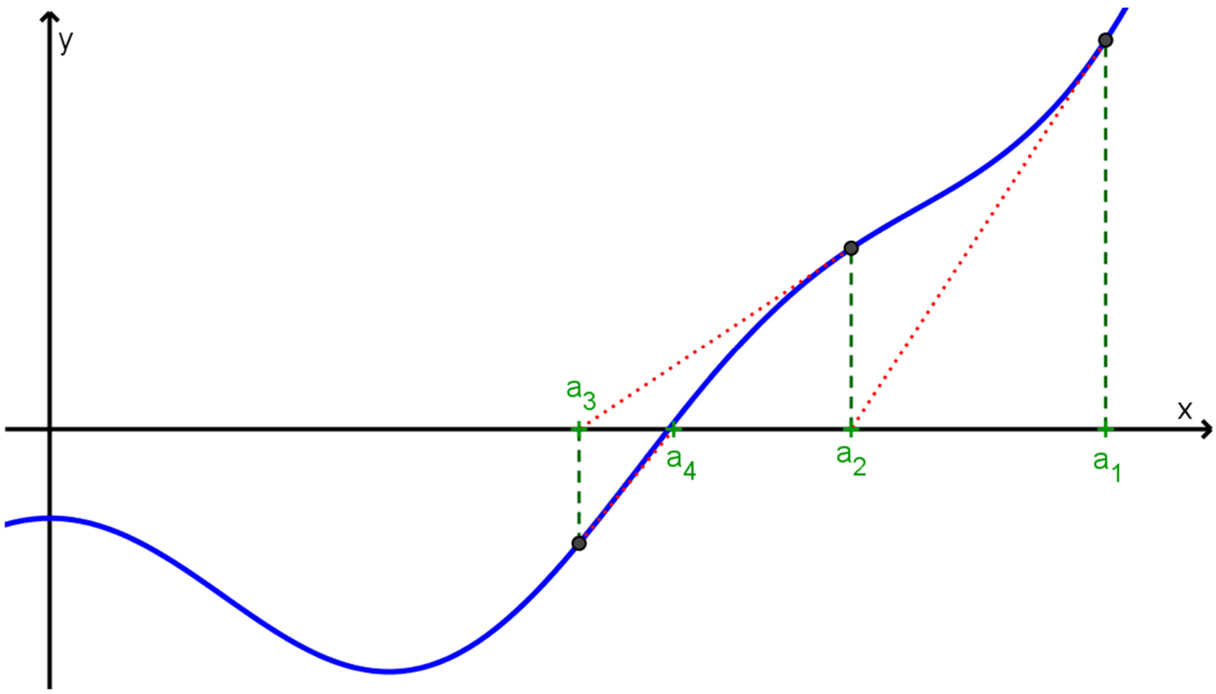
We zagen reeds twee methodes om nulpunten te benaderen: de methode van Bolzano en de regula falsi. Onze eis daar was dat de functies continu waren. Is de functie bovendien ook afleidbaar dan kan de methode van Newton uitkomst bieden.

Zij gegeven een functie f die afleidbaar is en een eerste benadering a_1 (gok) voor de nulwaarde.

De raaklijn in $A_1\left(a_1, f\left(a_1\right)\right)$ is $t_1 \leftrightarrow y = f'\left(a_1\right)\cdot\left(x-a_1\right)+f\left(a_1\right)$. Het snijpunt van de raaklijn met de x-as levert meestal een betere benadering voor c op.

Stel dus $\left(a_2, 0\right)\in t_1 \Leftrightarrow 0 = f'\left(a_1\right)\cdot\left(a_2-a_1\right)+f\left(a_1\right) \Leftrightarrow a_2 = a_1 - \dfrac{f\left(a_1\right)}{f'\left(a_1\right)}$.

Herhalen we deze werkwijze met de raaklijn in $A_2\left(a_2, f\left(a_2\right)\right)$ enzoverder dan krijgen we een rij $\left(a_n\right)$ die kan convergeren naar een nulpunt. Dit bewijs valt echter ook buiten het bestek van deze cursus.



(De methode die je rekenmachine gebruikt om nulpunten te benaderen is een mengvorm van de methode van Newton en de regula falsi).