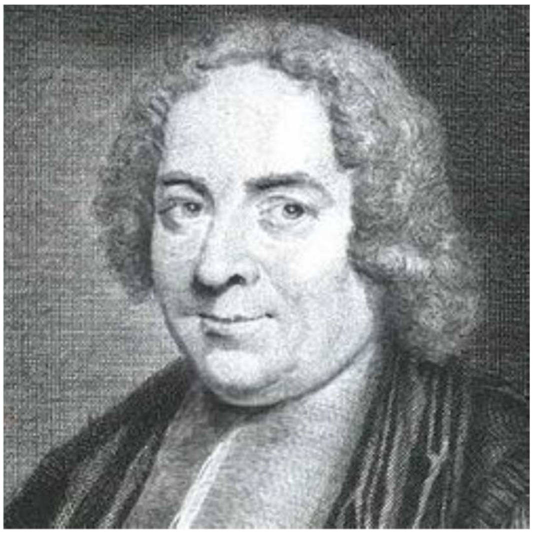
Eigenschappen van continue en afleidbare functies



Michel Rolle
° 21 april 1652 - Ambert
✞ 8 november 1719 - Parijs

Augustin Louis Cauchy
° 21 augustus 1789 - Parijs
✞ 23 mei 1857 - Sceaux

Joseph-Louis Lagrange
° 25 januari 1736 – Turijn
✞ 10 april 1813 - Parijs

Marquis Guillaume François Antoine
° (onbekend) 1661 – Parijs
✞ 2 februari 1704 - Parijs

1) De middelwaardestellingen

a) Stijgen en dalen van een functie

Een functie f is *stijgend* in $[a,b] \subset dom\ f \iff \forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Een functie f is *dalend* in $[a,b] \subset dom\ f \iff \forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Deze (reeds gekende) definities kan je ook herschrijven met behulp van het differentiequotiënt:

Een functie f is *stijgend* in $[a,b] \subset dom\ f \iff \forall x_1, x_2 \in [a,b] : \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$, met $x_1 \neq x_2$.

Een functie f is *dalend* in $[a,b] \subset dom\ f \iff \forall x_1, x_2 \in [a,b] : \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, met $x_1 \neq x_2$.

Stelling: Als f afleidbaar is in $[a,b]$, dan geldt: f is stijgend in $[a,b] \Rightarrow \forall x \in [a,b] : f'(x) \geq 0$.

Bewijs: Kies $x_1, x_2 \in [a,b]$, met $x_2 - x_1 = \Delta x \neq 0$, dan geldt omdat f stijgend is wegens hierboven:

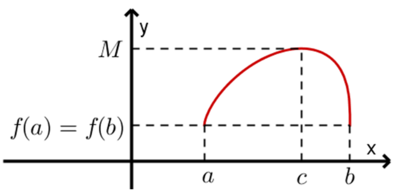
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \Rightarrow \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \geq 0 \Rightarrow f'(x_1) \geq 0 . \ \square$$

Volledig analoog kan je uiteraard ook de volgende stelling bewijzen:

Stelling: Als f afleidbaar is in $[a,b]$, dan geldt: f is dalend in $[a,b] \Rightarrow \forall x \in [a,b] : f'(x) \leq 0$.

b) De stelling van Rolle

Stelling: f is continu in $[a,b]$, afleidbaar in $]a,b[$, en $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in]a,b[: f'(c) = 0$.



Bewijs: De stelling van Weierstrass zegt: een functie f die continu is in $[a,b]$ bereikt in $[a,b]$ een supremum M en een infimum m.

Geval ①: $m = M = f(a) = f(b)$

Dit is enkel mogelijk als f constant is in $[a,b]$,

zodat $\forall c \in]a,b[: f'(c) = 0$.

Geval ②: $M > f(a) = f(b)$

We bewijzen dat de stelling klopt voor alle waarden $c \in]a,b[$ waar f het supremum M bereikt.

$$\forall x \in]c,b[: f(x) \leq f(c) = M \Rightarrow f(x) - f(c) \leq 0 \overset{x>c}{\Rightarrow} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x \to c \\ >}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

$$\forall x \in]a,c[: f(x) \leq f(c) = M \Rightarrow f(x) - f(c) \leq 0 \overset{x<c}{\Rightarrow} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x \to c \\ <}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

Deze twee limieten zijn de rechter- en linkerafgeleide in c, en moeten dus gelijk zijn (omdat f afleidbaar is in $]a,b[$. Dus geldt: $f'(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}=0$.

Geval ③: $m<f(a)=f(b)$

Merk eerst en vooral op dat gevallen ② en ③ elkaar niet uitsluiten. Het bewijs van geval ③ verloopt volledig analoog aan geval ② (met voor c de waarde waar f het infimum bereikt). □

c) De middelwaardestelling van Lagrange

Stelling: f is continu in $[a,b]$, afleidbaar in $]a,b[$ $\Rightarrow$ $\exists c\in\,]a,b[\,: f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

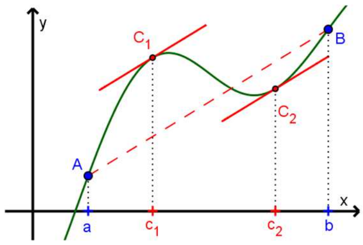
Bewijs: We passen de stelling van Rolle toe op $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$.

(g is het verschil van f en de rechte door de punten $A(a,f(a))$ en $B(b,f(b))$).

De drie voorwaarden zijn voldaan, want: g is net als f continu in $[a,b]$, g is net als f ook afleidbaar in $]a,b[$ en $g(a)=g(b)=0$.

Dus $\exists c\in\,]a,b[\,: g'(c)=0 \Leftrightarrow f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Leftrightarrow f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Deze stelling is heel eenvoudig meetkundig te interpreteren:
Tussen a en b moet er minstens één c bestaan zodat de raaklijn in punt $C(c,f(c))$ aan de grafiek van de functie evenwijdig is aan de koorde $[AB]$.
In het voorbeeld hiernaast zijn er zo twee c-waarden.



2) Het verloop van functies

a) Het teken van de eerste afgeleide

Stelling: Is f continu in $[a,b]$ en afleidbaar in $]a,b[$, met $\forall x\in\,]a,b[\,: f'(x)>0$, dan is f stijgend in $[a,b]$.

Bewijs: Neem $x_1,x_2\in[a,b]$, met $x_1<x_2$, dan is f continu in $[x_1,x_2]$ en afleidbaar in $]x_1,x_2[$.

De middelwaardestelling van Lagrange zegt dan dat: $\exists c\in\,]x_1,x_2[\,:\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)>0$ □

Stelling: Is f continu in $[a,b]$ en afleidbaar in $]a,b[$, met $\forall x\in\,]a,b[\,: f'(x)<0$, dan is f dalend in $[a,b]$.

Bewijs: Analoog aan de voorgaande stelling. □

> ***Stelling:*** Is f continu in $[a,b]$ en afleidbaar in $]a,b[$, dan geldt:
>
> $$\forall x \in]a,b[: f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; f \text{ is constant in } [a,b].$$

Bewijs: "$\Leftarrow$": de afgeleide van een constante functie is 0, dat hebben we reeds bewezen.

"$\Rightarrow$": Neem $x_1, x_2 \in [a,b]$, met $x_1 < x_2$, dan is f continu in $[x_1, x_2]$ en afleidbaar in $]x_1, x_2[$.

Lagrange zegt dan dat: $\exists c \in]x_1, x_2[: \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) = 0 \Leftrightarrow f(x_2)-f(x_1)=0$, en dus geldt inderdaad dat $f(x_1)=f(x_2)$, of anders gezegd dat f dus constant is in $[a,b]$. □

b) Extrema van een functie

We herhalen eerst de definities van extrema van een functie (we kunnen nu gebruik maken van basisomgevingen).

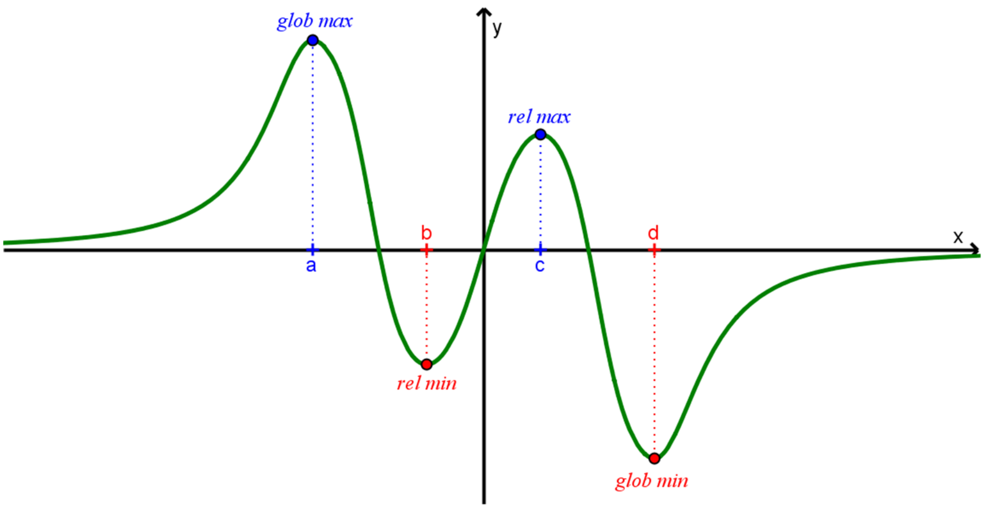
De functie f bereikt een *relatief minimum* in c
$\Leftrightarrow \exists B_c \subset dom\, f : \forall x \in B_c \setminus \{c\} : f(x) > f(c)$.

De functie f bereikt een *relatief maximum* in c
$\Leftrightarrow \exists B_c \subset dom\, f : \forall x \in B_c \setminus \{c\} : f(x) < f(c)$.

De functie f bereikt een *globaal minimum* in c
$\Leftrightarrow \forall x \in dom\, f : f(x) \geq f(c)$.

De functie f bereikt een *globaal maximum* in c
$\Leftrightarrow \forall x \in dom\, f : f(x) \leq f(c)$.

Voorbeeld: De functie f waarvan je de grafiek getekend ziet bereikt een globaal maximum in a, een relatief minimum in b, een relatief maximum in c en een globaal minimum in d.



> ***Stelling:*** Is f afleidbaar in c en bereikt f een relatief minimum in c, dan is $f'(c)=0$.

Bewijs: f bereikt een relatief minimum in c, dus $\exists B_c \subset dom\, f : \forall x \in B_c \setminus \{c\} : f(x) > f(c)$.

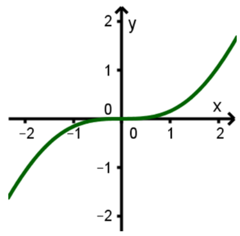
$$\left.\begin{array}{l}\forall x \in B_c \setminus \{c\} : x < c \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} < 0 \Rightarrow \displaystyle\lim_{\substack{x \to c \\ <}} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \\ \forall x \in B_c \setminus \{c\} : x > c \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0 \Rightarrow \displaystyle\lim_{\substack{x \to c \\ >}} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow f'(c)=0.$$

De twee limieten zijn niets anders dan de linker- en rechterafgeleide in c, maar omdat f afleidbaar is in c moeten deze gelijk zijn en dat kan enkel als de afgeleide nul is. □

Stelling: Is f afleidbaar in c en bereikt f een relatief maximum in c, dan is $f'(c)=0$.

Bewijs: Analoog aan de voorgaande stelling. □

Deze stelling noemen we een nodige voorwaarde waarbij f een extremum bereikt, maar het is geen voldoende voorwaarde. Zo geldt bijvoorbeeld bij $f(x)=x-\sin x$ dat $f'(0)=0$ terwijl die functie in 0 geen extremum bereikt.



De voldoende voorwaarde waarbij een relatief extremum bereikt wordt gegeven door volgende stellingen.

Stelling: Is f continu in c en bestaat er een B_c zodat f afleidbaar is in $B_c\setminus\{c\}$ zodat bovendien $\forall x\in B_c:\begin{cases}x<c\Rightarrow f'(x)<0\\ x>c\Rightarrow f'(x)>0\end{cases}$, dan bereikt f een relatief minimum in c.

Bewijs: Neem $x_1\in B_c$, met $x_1<c$, dan is f continu in $[x_1,c]$ en afleidbaar in $]x_1,c[$.

De middelwaardestelling van Lagrange zegt dan dat: $\exists C\in\,]x_1,c[\,:\dfrac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1}=f'(C)<0$, maar omdat $c-x_1>0$, moet dus $f(c)-f(x_1)<0$, waaruit volgt dat $f(x_1)>f(c)$.

Analoog bewijs je dat ook $f(x_2)>f(c)$ als $x_2\in B_c$, met $x_2>c$.

In B_c geldt dus $\forall x\in B_c\setminus\{c\}:f(x)>f(c)$, wat we moesten bewijzen. □

Stelling: Is f continu in c en bestaat er een B_c zodat f afleidbaar is in $B_c\setminus\{c\}$ zodat bovendien $\forall x\in B_c:\begin{cases}x<c\Rightarrow f'(x)>0\\ x>c\Rightarrow f'(x)<0\end{cases}$, dan bereikt f een relatief maximum in c.

Bewijs: analoog aan de vorige stelling.

Merk op dat $f'(c)$ niet noodzakelijk nul moet zijn bij een extremum. Het is alleen noodzakelijk dat f continu is in c en dat er zich een tekenwissel voordoet bij de afgeleide f' in c. Dit kan bijvoorbeeld het geval zijn bij knikpunten en is altijd het geval bij keerpunten.

In het geval dat de functie tweemaal afleidbaar is in een extremum, dan kan ook *de methode van Leibniz* soelaas bieden:

Stelling: Is f tweemaal afleidbaar in c, met $f'(c)=0$, en is f'' continu in een basisomgeving B_c, met $\forall x\in B_c:f''(x)>0$, dan bereikt f een relatief minimum in c.

Bewijs: Wegens de vorige stelling volgt uit de gegevens dat f' stijgend is in B_c. En omdat bovendien $f'(c)=0$ zal dus f' ook een tekenwissel hebben in c, zodat zowel de nodige als de voldoende voorwaarde voor een relatief minimum voldaan zijn. □

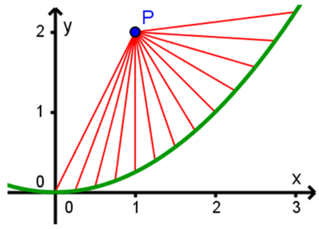
Stelling: Is f tweemaal afleidbaar in c, met $f'(c)=0$, en is f'' continu in een basisomgeving B_c, met $\forall x \in B_c : f''(x)<0$, dan bereikt f een relatief maximum in c.

Bewijs: Analoog aan de vorige stelling.

Toepassing: extremumproblemen

Bij heel wat realistische problemen uit de exacte wetenschappen en economische wetenschappen wordt er gevraagd om iets te maximaliseren (inhoud, temperatuur, winst, ...). Gaat het hierbij om afleidbare functies dan kunnen we de vorige stellingen gebruiken. We illustreren dit met enkele voorbeelden:

Voorbeeld 1 (wiskunde): Hoeveel bedraagt de kortste afstand van het punt $P(1,2)$ tot de parabool $p \leftrightarrow y=\frac{1}{4}x^2$.



Neem een variabel punt $Q(2x, x^2) \in p$, dan geldt voor de afstand d:

$d^2 = f(x) = (2x-1)^2 + (x^2-2)^2 = x^4 - 4x + 5$.

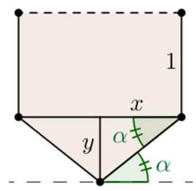
De afgeleide van deze functie is $f'(x) = 4x^3 - 4$, met als enige nulwaarde $x=1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	MIN (2)	↗	

De afstand d is dus minimaal in het punt $(2,1)$ en hij bedraagt dan $d=\sqrt{2}$ (want $d^2=2$).

(Je kan ook de afstand $d=\sqrt{x^4-4x+5}$ ipv d^2 als formule gebruiken, maar die afleiden is iets lastiger.)

Voorbeeld 2 (fysica): Een symmetrische dakgoot wordt gevormd door een ijzeren plaat van 4 dm breed te plooien in vier gelijke stukken zoals op de figuur hiernaast. De goot is vanboven open en heeft twee evenwijdige wanden. Hoe groot moet de hellingshoek α genomen worden opdat de inhoud van de goot maximaal zou zijn.



Met de conventies op de figuur geldt dat $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$.

De dwarsoppervlakte van de goot wordt dan gegeven door $S = 2x + \frac{2xy}{2} = 2x + x\sqrt{1-x^2} = f(x)$.

Afleiden geeft: $f'(x) = 2 + \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\sqrt{1-x^2}+1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\sqrt{1-x^2}+1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2\sqrt{1-x^2}+1-2x^2=0 \Rightarrow 4(1-x^2)=(2x^2-1)^2 \Leftrightarrow 4x^4-3=0 \overset{\boxed{x>0}}{\Rightarrow} x=\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$$

Het tekenverloop in het praktische domein $x \in \left]0,1\right[$ wordt dan gegeven door:

x	0		$\sqrt[4]{3/4}$		1
$f'(x)$	|	+	0	-	|
S		↗	MAX	↘	

De oppervlakte bereikt dus haar maximum als $x=\sqrt[4]{3/4}$.

Dan geldt: $\cos\alpha = \sqrt[4]{3/4} \Rightarrow \alpha \approx 21°28'15''$

c) De betekenis van de tweede afgeleide

De eerste afgeleide wordt gebruikt om te bepalen waar een functie stijgend of dalend is. De tweede afgeleide verstrekt ons informatie in verband met de *convexiteit* of de *kromming* van een functie.

Als voor een (tweemaal) afleidbare functie f in een interval $[a,b]$ geldt dat $f''(x)>0$, dan noemen we de grafiek van de functie *hol* (of *concaaf*) in dat interval. Is $f''(x)<0$ dan noemen we de functie *bol* (of *convex*) in dat interval.

Uit het vorige hoofdstukje volgt dat een functie hol is in een interval als de eerste afgeleide er stijgend is, en bol als de eerste afgeleide er dalend is.

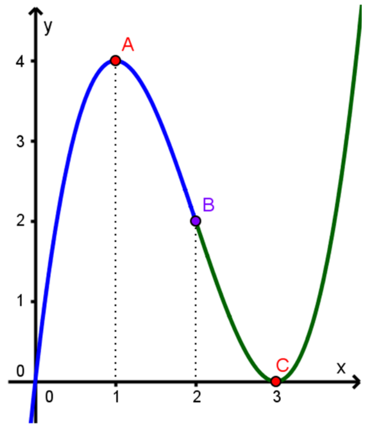
Een punt waar de kromming van de grafiek van een functie verandert, noemen we een *buigpunt* van een functie. Is de functie tweemaal afleidbaar in een buigpunt dan zal de tweede afgeleide in dat punt een tekenwissel ondergaan.

Voorbeeld 1: We bespreken het verloop van $f(x)=x^3-6x^2+9x$.

De afgeleiden zijn $f'(x)=3x^2-12x+9$ (met nulwaarden 1 en 3) en $f''(x)=6x-12$ (met nulwaarde 2).

Als $x<2$ is de functie dus bol (blauw getekend), als $x>2$ is de functie hol (groen getekend). Het punt $B(2,2)$ is een buigpunt.

We kunnen de tekenverlopen van de eerste en tweede afgeleide samenbrengen in wat we noemen een *samenvattende tabel*. Daaruit kunnen we dan heel eenvoudig het *verloop* van de functie aflezen.



x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	↗	MAX (4)	↘	BP (2)	↘	MIN (0)	↗

De buigraaklijn is de raaklijn in het buigpunt. Hier geldt $f'(2)=-3$, dus is $t_b \leftrightarrow y=-3x+8$.

d) Een volledig verloop van een rationale functie

Voorbeeld: we bespreken het volledige verloop van de functie $f(x)=\dfrac{3x^2-x-4}{x^2+8x+32}$

1) Domein: $dom\ f=\mathbb{R}$ (want de noemer heeft geen nulpunten)

2) Continuïteit: f is overal continu

3) Snijpunten met de assen en tekenverloop: f snijdt de y-as in $A\left(0,-\dfrac{1}{8}\right)$ (want $f(0)=-\dfrac{1}{8}$)

f snijdt de x-as in $B(-1,0)$ en $C\left(\dfrac{4}{3},0\right)$ (want $f(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-x-4=0 \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} x=-1 \vee x=\dfrac{4}{3}$)

x	$-\infty$		-1		$4/3$	$+\infty$
$f(x)$	+	+	0	-	0	+

4) Symmetrie: f is niet even, noch oneven (want $f(-x) \neq f(x)$ en $f(-x) \neq -f(x)$)

5) Asymptoten: f heeft een horizontale asymptoot $h \leftrightarrow y = 3$ (want $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 3$)

Er zijn geen andere asymptoten

6) Eerste afgeleide: $f'(x) = \dfrac{(x^2+8x+32)(6x-1)-(2x+8)(3x^2-x-4)}{(x^2+8x+32)^2} = 25 \cdot \dfrac{x^2+8x}{(x^2+8x+32)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = -8$

x	$-\infty$	-8		0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	MAX	↘	MIN	↗

Voor het maximum geldt: $f(-8) = \dfrac{49}{8}$

Voor het minimum geldt: $f(0) = -\dfrac{1}{8}$

7) Tweede afgeleide: $f''(x) = 25 \cdot \dfrac{(2x+8)(x^2+8x+32)^{\cancel{2}} - (x^2+8x)\cdot 2\cancel{(x^2+8x+32)}(2x+8)}{(x^2+8x+32)^{\cancel{4}\,3}}$

$$= 50 \cdot \frac{(x+4)(-x^2-8x+32)}{(x^2+8x+32)^3}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x + 4 = 0 \ \vee \ -x^2 - 8x + 32 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \ \vee \ x = -4-4\sqrt{3} \ \vee \ x = -4+4\sqrt{3}$

x	$-\infty$	$-4-4\sqrt{3}$		-4		$-4+\sqrt{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\cup$	BP	$\cap$	BP	$\cup$	BP	$\cap$

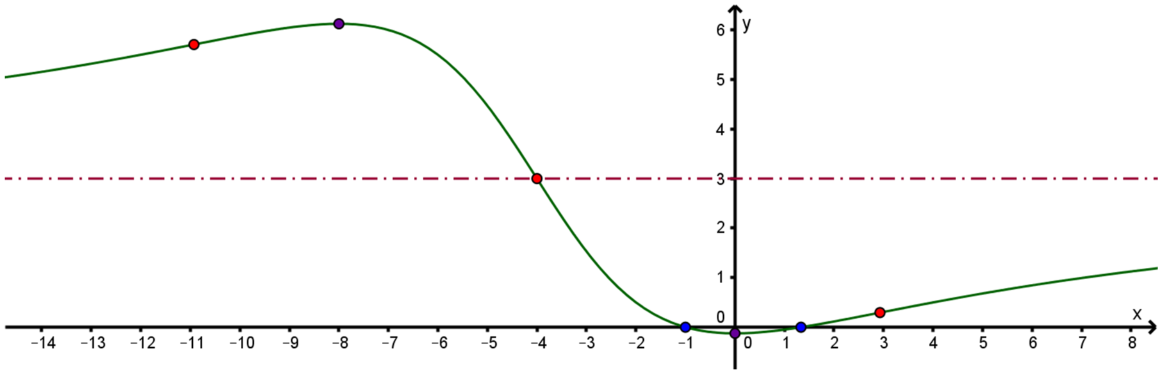
Voor de buigpunten geldt: $f(-4-4\sqrt{3}) = 3 + \dfrac{25\sqrt{3}}{16}$, $f(-4) = 3$ en $f(-4+4\sqrt{3}) = 3 - \dfrac{25\sqrt{3}}{16}$

8) Samenvattende tabel:

x	$-\infty$	$-4-4\sqrt{3}$		-8		-4		0		$-4+\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$	↗	BP $\left(3+\frac{25\sqrt{3}}{16}\right)$	↗	MAX $\left(\frac{49}{8}\right)$	↘	BP (3)	↘	MIN $\left(-\frac{1}{8}\right)$	↗	BP $\left(3-\frac{25\sqrt{3}}{16}\right)$	↗

9) Beeld: $bld\ f = \left[-\dfrac{1}{8}, \dfrac{49}{8}\right]$ (dit volgt onmiddellijk uit de tabel)

10) Grafiek:



3) Een volledig verloop van een irrationale functie

We bespreken het volledige verloop van de irrationale functie $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x-2}$.

1) Domein: $dom\ f=\mathbb{R}$ **2) Continuïteit:** f is overal continu

3) Snijpunten met de assen en tekenverloop: f snijdt de y-as in $A\left(0,-\sqrt[3]{2}\right)$ ($f(0)=-\sqrt[3]{2}$)

f snijdt de x-as in $B(-1,0)$ en $C(2,0)$ ($f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x-2=0 \overset{Horner}{\Leftrightarrow} x=-1 \vee x=2$)

x	$-\infty$		-1		2	$+\infty$
$f(x)$	-	-	0	-	0	+

4) Symmetrie: f is niet even, noch oneven (want $f(-x)\neq f(x)$ en $f(-x)\neq -f(x)$)

5) Asymptoten: f heeft een schuine asymptoot $s \leftrightarrow y=x$, want de formules van Cauchy geven:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x-2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt[3]{1-3/x^2-2/x^3}}{\cancel{x}}=1$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\left(\sqrt[3]{x^3-3x-2}-x\right)\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{x^3-3x-2}\right)^2+x\cdot\sqrt[3]{x^3-3x-2}+x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3-3x-2}\right)^2+x\cdot\sqrt[3]{x^3-3x-2}+x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x-2}{\left(\sqrt[3]{x^3-3x-2}\right)^2+x\cdot\sqrt[3]{x^3-3x-2}+x^2}=0 \quad \left(\text{want } gr(T)=1 \text{ en } gr(N)=2\right)$$

6) Eerste afgeleide: $f'(x)=\dfrac{3x^2-3}{3\left(\sqrt[3]{x^3-3x-2}\right)^2}=\dfrac{x^2-1}{\left(x^3-3x-2\right)^{2/3}}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \cancel{x=-1} \vee x=1$ ($x=-1$ moeten we schrappen want dan is ook de noemer nul)

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	|	-	0	+	|	+
$f(x)$	↗	MAX	↘	MIN	↗	↗	↗

Voor het maximum geldt: $f(-1)=0$

Voor het minimum geldt: $f(1)=-\sqrt[3]{4}$

$$\lim_{x\to -1} f'(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{\left(x^3-3x-2\right)^{2/3}} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^{4/3}(x-2)^{2/3}} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{(x-1)^{1/3}(x-2)^{2/3}} \begin{cases} \nearrow \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ <}} f'(x) = +\infty \\ \searrow \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} f'(x) = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2} f'(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{\left(x^3-3x-2\right)^{2/3}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)}{(x-1)^{1/3}(x-2)^{2/3}} = +\infty$$

In $(-1,0)$ heeft de grafiek van f dus een keerpunt, en in $(2,0)$ is er een verticale raaklijn.

7) Tweede afgeleide:

$$f''(x) = \frac{2x\left(x^3-3x-2\right)^{2/3} - \left(x^2-1\right)\cdot\frac{2}{3}\left(x^3-3x-2\right)^{-1/3}\cdot\left(3x^2-3\right)}{\left(x^3-3x-2\right)^{4/3}}$$

$$= 2\cdot\frac{x\left(x^3-3x-2\right)-\left(x^2-1\right)^2}{\left(x^3-3x-2\right)^{5/3}} = 2\cdot\frac{-x^2-2x-1}{\left(x^3-3x-2\right)^{5/3}} = -2\cdot\frac{(x+1)^2}{\left(x^3-3x-2\right)^{5/3}}$$

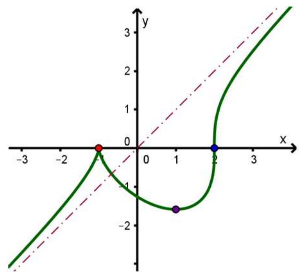
$f''(x)=0 \Rightarrow x+1=0 \Leftrightarrow \cancel{x=-1}$ ($x=-1$ moeten we schrappen want dan is ook de noemer nul)

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$f''(x)$	+	‖	+	|	-
$f(x)$	$\cup$	MAX	$\cup$	BP	$\cap$

Voor het buigpunt geldt: $f(2)=0$

8) Samenvattende tabel:

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	|	-	0	+	|	+
$f''(x)$	+	|	+	+	+	|	-
$f(x)$	$\nearrow$	MAX (0)	$\searrow$	MIN $(-\sqrt[3]{4})$	$\nearrow$	BP (0)	$\nearrow$



9) Beeld: $bld\ f = \mathbb{R}$ (dit volgt onmiddellijk uit de tabel)

10) Grafiek: naast tabel.