Exponentiële & logaritmische functies

1. — LOGARITMEN DER GETALLEN VAN 1 tot 100

G	Log G	G	Log G	G	Log G	G	Log G	G	Log G
1	0,00 000	**21**	1,32 222	**41**	1,61 278	**61**	1,78 533	**81**	1,90 849
2	0,30 103	22	1,34 242	42	1,62 325	62	1,79 239	82	1,91 381
3	0,47 712	23	1,36 173	43	1,63 347	63	1,79 934	83	1,91 908
4	0,60 206	24	1,38 021	44	1,64 345	64	1,80 618	84	1,92 428
5	0,69 897	25	1,39 794	45	1,65 321	65	1,81 291	85	1,92 942
6	0,77 815	26	1,41 497	46	1,66 276	66	1,81 954	86	1,93 450
7	0,84 510	27	1,43 136	47	1,67 210	67	1,82 607	87	1,93 952
8	0,90 309	28	1,44 716	48	1,68 124	68	1,83 251	88	1,94 448
9	0,95 424	29	1,46 240	49	1,69 020	69	1,83 885	89	1,94 939
10	1,00 000	30	1,47 712	50	1,69 897	70	1,84 510	90	1,95 424
11	1,04 139	**31**	1,49 136	**51**	1,70 757	**71**	1,85 126	**91**	1,95 904
12	1,07 918	32	1,50 515	52	1,71 600	72	1,85 733	92	1,96 379
13	1,11 394	33	1,51 851	53	1,72 428	73	1,86 332	93	1,96 848
14	1,14 613	34	1,53 148	54	1,73 239	74	1,86 923	94	1,97 313
15	1,17 609	35	1,54 407	55	1,74 036	75	1,87 506	95	1,97 772
16	1,20 412	36	1,55 630	56	1,74 819	76	1,88 081	96	1,98 227
17	1,23 045	37	1,56 820	57	1,75 587	77	1,88 649	97	1,98 677
18	1,25 527	38	1,57 978	58	1,76 343	78	1,89 209	98	1,99 123
19	1,27 875	39	1,59 106	59	1,77 085	79	1,89 763	99	1,99 564
20	1,30 103	40	1,60 206	60	1,77 815	80	1,90 309	100	2,00 000

1) Machten

a) Machten met gehele exponenten

Volgende definities kennen we al enkele jaren:

- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^n = \overbrace{a.a.a.\dots.a}^{n \text{ factoren}}$.
- $\forall a \in \mathbb{R}_0 : a^0 = 1$ (merk op dat 0^0 niet gedefinieerd is).
- $\forall a \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{N} : a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Je kent ook al een hele tijd de bekende rekenregels:

❶ $\forall a \in \mathbb{R}_0, \forall m,n \in \mathbb{Z}: \quad a^m . a^n = a^{m+n}$

❷ $\forall a \in \mathbb{R}_0, \forall m,n \in \mathbb{Z}: \quad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

❸ $\forall a \in \mathbb{R}_0, \forall m,n \in \mathbb{Z}: \quad \left(a^m\right)^n = a^{m.n}$

❹ $\forall a,b \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{Z}: \quad (a.b)^n = a^n . b^n$

❺ $\forall a,b \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{Z}: \quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

❻ $\forall a,b \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{Z}: \quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

b) Vierkantswortels en n-de machtswortels

Vierkantswortels

Een vierkantswortel van een reëel getal is een reëel getal waarvan het kwadraat gelijk is aan het gegeven getal. Enkel positieve getallen hebben dus vierkantswortels.

De notatie $\sqrt{\ }$ wordt enkel gebruikt voor de positieve vierkantswortel.

Toegepast geeft dit dat -3 *een* vierkantswortel is van 9, maar dat $\sqrt{9} = 3$ en $\sqrt{9} \neq -3$. Als er in een context sprake is van *de* vierkantswortel dan gaan we er van uit dat de positieve wordt bedoeld!

Tot nog toe kennen jullie al de volgende eigenschappen:

- $\forall a \in \mathbb{R}^+ : \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a = \sqrt{a^2}$
- $\forall a \in \mathbb{R}^- : \quad \sqrt{a^2} = -a$
- $\forall a,b \in \mathbb{R}^+ : \quad \sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$
- $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}_0^+ : \quad \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

n-de machtswortels

Een n-de machtswortel van een reëel getal is een reëel getal waarvan de n-de macht gelijk is aan het gegeven getal. We moeten dus een onderscheid maken tussen even en oneven exponenten:

n is oneven

Is n oneven dan heeft elk reëel getal een unieke n-de machtswortel: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.

n is even

Is n even dan zijn er drie gevallen te onderscheiden:

- Strikt negatieve getallen hebben geen n-de machtswortels.
- Nul heeft één n-de machtswortel, namelijk nul zelf.
- Strikt positieve getallen hebben twee tegengestelde n-de machtswortels. Net als bij vierkantswortels gebruiken we de notatie $\sqrt[n]{\ }$ enkel voor de positieve wortel.

  $b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a} \vee b = -\sqrt[n]{a}$

Samengevat

Beperken we ons tot de positieve grondtallen dan geldt: $\boxed{\forall a,b \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}_0 : \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a}$.

Een onmiddellijk gevolg is dus: $\forall a,b \in \mathbb{R}^+ : a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$ (merk op dat dit in $\mathbb{R}$ niet geldt!).

Rekenregels

Stelling: Voor n-de machtswortels gelden de volgende rekenregels:

① $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}_0: \quad \sqrt[n]{a^n} = a$

② $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}_0: \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

③ $\forall a,b \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}_0: \quad \sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

④ $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}_0^+, \forall n \in \mathbb{N}_0: \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

⑤ $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall m,n \in \mathbb{N}_0: \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Bewijzen:

① $a^n = a^n$

$\Leftrightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$ (definitie)

② $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

③ stel $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = c$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}\right)^n = c^n$ (gevolg definitie)

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{a}\right)^n.\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = c^n$ (rekenregel machten ❹,❺)

$\Leftrightarrow ab = c^n$ (rekenregel ②)

$\Leftrightarrow \sqrt[n]{ab} = c$ (definitie)

④ stel $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = c$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}\right)^n = c^n$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{a}\right)^n : \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = c^n$

$\Leftrightarrow a : b = c^n$

$\Leftrightarrow \sqrt[n]{a : b} = c$

⑤ stel $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = c$

$\Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = c^m$ (definitie)

$\Leftrightarrow a = \left(c^m\right)^n$ (definitie)

$\Leftrightarrow a = c^{mn}$ (rekenregel machten ❸)

$\Leftrightarrow \sqrt[mn]{a} = c$ (definitie)

Een onmiddellijk gevolg van rekenregel ③ is dat geldt: $\forall a \in \mathbb{R}_0^+, \forall n \in \mathbb{N}_0, \forall m \in \mathbb{Z}: \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

c) Machten met rationale exponenten

Definitie

We proberen nu de definitie van macht uit te breiden tot rationale exponenten.

Hiertoe bekijken we volgend voorbeeld: $\sqrt[3]{2^{21}} = \sqrt[3]{\left(2^7\right)^3} = 2^7 = 2^{\frac{21}{3}}$. Dit kunnen we makkelijk veralgemenen:

Definitie: $\forall a \in \mathbb{R}_0^+, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Om effectief machten te berekenen is het soms handiger te schrijven $\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$

Voorbeelden: $4^{2,5} = 4^{\frac{5}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^5 = 2^5 = 32$

$27^{-\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Rekenregels

Volgende rekenregels blijven ook gelden bij rationale exponenten:

$\boxed{1}$ $\forall a \in \mathbb{R}_0^+, \forall p,q \in \mathbb{Q}: \quad a^p . a^q = a^{p+q}$

$\boxed{2}$ $\forall a \in \mathbb{R}_0^+, \forall p,q \in \mathbb{Q}: \quad \dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

$\boxed{3}$ $\forall a \in \mathbb{R}_0^+, \forall p,q \in \mathbb{Q}: \quad \left(a^p\right)^q = a^{p \cdot q}$

$\boxed{4}$ $\forall a,b \in \mathbb{R}_0^+, \forall p \in \mathbb{Q}: \quad (a.b)^p = a^p . b^p$

$\boxed{5}$ $\forall a,b \in \mathbb{R}_0^+, \forall p \in \mathbb{Q}: \quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$

Bewijs: In alle bewijzen nemen we aan dat $p = \dfrac{m}{n}$ en $q = \dfrac{m'}{n'}$, met $m, m' \in \mathbb{Z}$ en $n, n' \in \mathbb{N}_0$ (♣).

$\boxed{1}$

$$
\begin{aligned}
a^p . a^q &= a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{m'}{n'}} && \text{(zie ♣)}\\
&= a^{\frac{mn'}{nn'}} . a^{\frac{m'n}{nn'}} && \text{(rekenregel breuken)}\\
&= \sqrt[nn']{a^{mn'}} . \sqrt[nn']{a^{m'n}} && \text{(definitie)}\\
&= \sqrt[nn']{a^{mn'} . a^{m'n}} && \text{(rekenregel ③, ④)}\\
&= \sqrt[nn']{a^{mn'+m'n}} && \text{(rekenregel ❶, ❷)}\\
&= a^{\frac{mn'+m'n}{nn'}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}} = a^{p+q} && \text{(rekenregels breuken, ♣)}
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$

$$
\begin{aligned}
a^p : a^q &= a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{m'}{n'}}\\
&= a^{\frac{mn'}{nn'}} : a^{\frac{m'n}{nn'}}\\
&= \sqrt[nn']{a^{mn'}} : \sqrt[nn']{a^{m'n}}\\
&= \sqrt[nn']{a^{mn'} : a^{m'n}}\\
&= \sqrt[nn']{a^{mn'-m'n}}\\
&= a^{\frac{mn'-m'n}{nn'}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{m'}{n'}} = a^{p-q}
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$

$$
\begin{aligned}
\left(a^p\right)^q &= \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{m'}{n'}} && \text{(zie ♣)}\\
&= \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{m'}{n'}} = \left(\sqrt[n']{\sqrt[n]{a^m}}\right)^{m'} && \text{(definitie)}\\
&= \left(\sqrt[nn']{a^m}\right)^{m'} && \text{(rekenregel ⑤)}\\
&= \sqrt[nn']{\left(a^m\right)^{m'}} && \text{(gevolg rekenregel ③)}\\
&= \sqrt[nn']{a^{mm'}} && \text{(rekenregel ❸)}\\
&= a^{\frac{mm'}{nn'}} && \text{(definitie)}\\
&= a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{m'}{n'}} = a^{p \cdot q} && \text{(rekenregels breuken, ♣)}
\end{aligned}
$$

$\boxed{4}$

$$
\begin{aligned}
(a.b)^p &= (a.b)^{\frac{m}{n}} && \text{(zie ♣)}\\
&= \sqrt[n]{(a.b)^m} && \text{(definitie)}\\
&= \sqrt[n]{a^m . b^m} && \text{(rekenregel ❹, ❺)}\\
&= \sqrt[n]{a^m} . \sqrt[n]{b^m} && \text{(rekenregel ③, ④)}\\
&= a^{\frac{m}{n}} . b^{\frac{m}{n}} = a^p . b^p && \text{(definitie, ♣)}
\end{aligned}
$$

$\boxed{5}$

$$
\begin{aligned}
(a:b)^p &= (a:b)^{\frac{m}{n}}\\
&= \sqrt[n]{(a:b)^m}\\
&= \sqrt[n]{a^m : b^m}\\
&= \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{b^m}\\
&= a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = a^p : b^p
\end{aligned}
$$

d) Machten met reële exponenten

De definitie van een macht met een reële exponent valt buiten het bestek van deze cursus. Wat wel kan opgemerkt worden is dat we de waarde willekeurig dicht kunnen benaderen met behulp van de vorige paragraaf.

Voorbeeld: We benaderen 2^{π} op 5 decimalen nauwkeurig, met behulp van rationale exponenten:

q	2^q
3	8
3,1	8,5741877
3,14	8,815240927
3,142	8,82746992
3,1415	8,824411082
3,14159	8,824961595
3,141593	8,824979946
3,1415927	8,824978111
3,14159265	8,824977805

We kunnen dus opmerken dat:

$$3{,}14159265 < \pi < 3{,}1415927 \overset{*}{\Leftrightarrow} 2^{3{,}14159265} < 2^{\pi} < 2^{3{,}1415927}$$

Dus $2^{\pi} \approx 8{,}82498$.

*: Deze equivalentie volgt uit het feit dat $f(x) = 2^x$ een strikt stijgende functie is. We zullen dit inzien in het volgende hoofdstuk.

De rekenregels voor machten met rationale exponenten blijven natuurlijk ook gelden voor machten met reële exponenten.

Een macht waarbij zowel het grondtal als de exponent irrationaal is, is niet noodzakelijk zelf irrationaal:

Stelling: Er bestaan irrationale getallen $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, zodat $a^b \in \mathbb{Q}$.

Bewijs: Stel $a = b = \sqrt{2}$. Als $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ dan is de stelling bewezen.

Is $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, stel dan $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ en $b = \sqrt{2}$ zodat dan geldt:

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2 \in \mathbb{Q}. \ \square$$

2) Het exponentieel groeimodel

a) Lineaire groei & exponentiële groei

Inleidend voorbeeld

De steden Alfapolis en Betapolis telden allebei 10000 inwoners op 1 januari 2000. Jaarlijks komen er in Alfapolis 500 inwoners bij. In Betapolis neemt de bevolking jaarlijks met 4% toe. We bekijken in een overzichtelijke tabel het aantal inwoners van beide steden de komende jaren.

	Alfapolis			Betapolis		
Jaar	Inw.		Formule	Inw.		Formule
2000	10000			10000		
		↵ +500			↵ x 1,04	
2001	10500		=10000+500	10400		=10000.1,04
		↵ +500			↵ x 1,04	
2002	11000		=10000+500.2	10816		$=10000.1,04^2$
		↵ +500			↵ x 1,04	
2003	11500		=10000+500.3	11249		$=10000.1,04^3$
		⋮			⋮	
⋮	⋮		⋮	⋮		⋮
		↵ +500			↵ x 1,04	
2000+t	?		=10000+500.t	?		$=10000.1,04^t$

In Alfapolis is het aantal inwoners op 1 januari 2000+t gelijk aan:

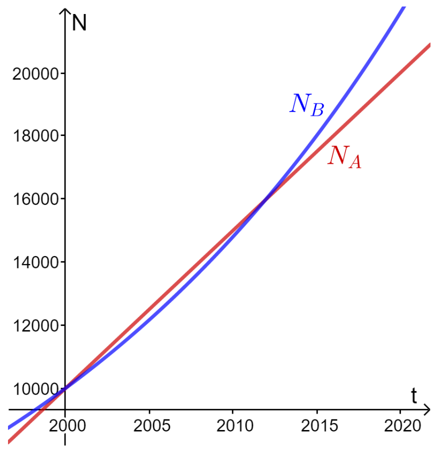
$$N_A(t) = 10000 + 500\,.\,t$$

In Betapolis is het aantal inwoners op 1 januari 2000+t gelijk aan:

$$N_B(t) = 10000.1,04^t$$

In Alfapolis spreken we van *lineaire groei* omdat de grafiek zich als een rechte gedraagt.

In Betapolis spreken we van *exponentiële groei* omdat de tijd (de variabele) in de exponent staat.



Definities

Een populatie vertoont *lineaire groei* als ze zich laat beschrijven met de formule: $N(t) = N_0 + v \cdot t$. Hierbij is t de variabele tijd, $N(t)$ de grootte na t tijdseenheden, N_0 de startgrootte en v de toename per tijdseenheid. Als $v < 0$ spreken we van een afname.

Een populatie vertoont exponentiële groei als ze zich laat beschrijven met: $N(t) = N_0 \cdot a^t$. Hierbij is t de variabele tijd, $N(t)$ de grootte na t tijdseenheden, N_0 de startgrootte en a de zogenaamde groeifactor. We bekijken dit fenomeen in de volgende paragraaf in meer detail.

Merk hierbij ook op dat lineaire groei exact hetzelfde gedrag vertoont als een rekenkundige rij, en dat exponentiële groei het gedrag vertoont van een meetkundige rij.

b) Het begrip groeifactor

Verband tussen procentuele toename (of afname) en groeifactoren

Elke procentuele toename of afname kunnen we uitdrukken als een product. Zo komt bijvoorbeeld een procentuele toename met 25% overeen met een vermenigvuldiging met factor 1,25 en komt een procentuele afname met 16% overeen met een vermenigvuldiging met factor 0,84.
Het verband tussen de groeifactor a en de procentuele toe- of afname $\pm p\%$ wordt gegeven door:

$$a = 1 \pm \frac{p}{100}, \text{ of omgekeerd } \pm p = 100(a-1).$$

Op die manier zien we dat bij een toename zal gelden dat $a > 1$ en bij een afname dat $0 < a < 1$.

Groeifactoren omzetten

We hernemen het voorbeeld van Betapolis uit de eerste paragraaf. Om het aantal inwoners binnen 10 jaar rechtstreeks te berekenen zouden we moeten vermenigvuldigen met $1{,}04^{10} \approx 1{,}4802$. Dit impliceert dat er per decennium een toename is van de bevolking met ongeveer 48,02%.
Laat duidelijk zijn dat dit dus ***niet*** gelijk is aan 10x4% = 40%, wat een veelgemaakte fout is.
Bij verandering van tijdseenheid moeten we dus de groeifactor exponentieel aanpassen. Vaak is het praktisch de tijdseenheid als onderindex bij de groeifactor (en het groeipercentage) te noteren. We illustreren dit met nog twee bijkomende voorbeelden:

Eerste voorbeeld: Een ballon verliest elk uur 10% van zijn luchtinhoud. Hoeveel verliest hij per dag?

$$p_{uur} = -10 \Leftrightarrow a_{uur} = 0{,}90 \Leftrightarrow a_{dag} = 0{,}90^{24} \approx 0{,}0798 \Leftrightarrow p_{dag} \approx -92{,}02$$

Per dag verliest de ballon dus ongeveer 92,02% van zijn luchtinhoud.

Tweede voorbeeld: De jaarlijkse interestvoet bij een bank is 4%. Wat is de maandelijkse rentevoet?

$$p_{jaar} = 4 \Leftrightarrow a_{jaar} = 1{,}04 \Leftrightarrow a_{maand} = 1{,}04^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}00327 \Leftrightarrow p_{maand} \approx 0{,}327$$

De maandelijkse interestvoet bedraagt dus ongeveer 0,327%.

3) Logaritmen

a) Inleidend voorbeeld – verdubbelingstijd

Willen we in het voorbeeld van Betapolis berekenen hoelang het duurt eer de populatie van de stad verdubbeld is, dan moeten deze vergelijking oplossen: $10000.1{,}04^t = 20000 \Leftrightarrow 1{,}04^t = 2$.

Deze tijd t noemen we de verdubbelingstijd die bij de groeifactor $a = 1{,}04$ hoort.

Met je rekenmachine of wiskundesoftware kan je grafisch vinden dat $t \approx 17{,}67$.

We noteren dit getal als zijnde de $1{,}04$-logaritme van 2, namelijk ${}^{1{,}04}\log 2 \approx 17{,}67$.

b) Definitie

Algemeen noemen we c de a-logaritme van b als en slechts als geldt dat $a^c = b$.

Definitie: $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}, b \in \mathbb{R}_0^+, c \in \mathbb{R} : {}^a\log b = c \Leftrightarrow a^c = b$.

We noemen a het grondtal van de logaritme. Omdat dit overeenkomt met de groeifactoren bij exponentiële groeimodellen beperken we het domein van dit grondtal tot $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$. Dat $b \in \mathbb{R}_0^+$ volgt uit het feit dat b per definitie een macht is van a.

Voorbeelden: ${}^3\log 9 = 2$, want $3^2 = 9$. ${}^5\log \frac{1}{125} = -3$, want $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$.

${}^{17}\log 1 = 0$, want $17^0 = 1$. ${}^{\frac{1}{4}}\log 2 = -\frac{1}{2}$, want $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$.

c) Rekenregels

Stelling: Voor logaritmen gelden de volgende rekenregels: $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}, \forall x, y \in \mathbb{R}_0^+, \forall r \in \mathbb{R}$:

① ${}^a\log a^r = r$

② $a^{{}^a\log x} = x$

③ ${}^a\log(x.y) = {}^a\log x + {}^a\log y$

④ ${}^a\log \frac{x}{y} = {}^a\log x - {}^a\log y$

⑤ ${}^a\log x^r = r.\,{}^a\log x$

⑥ ${}^a\log x = \frac{{}^b\log x}{{}^b\log a}$

Bewijs:

① $a^r = a^r$
$\Leftrightarrow {}^a\log a^r = r$ (definitie)

② ${}^a\log x = {}^a\log x$
$\Leftrightarrow a^{{}^a\log x} = x$

③ ${}^a\log xy$
$= {}^a\log\left(a^{{}^a\log x}.a^{{}^a\log y}\right)$ (②)
$= {}^a\log a^{{}^a\log x + {}^a\log y}$ (rekenregel machten $\boxed{1}$, $\boxed{2}$)
$= {}^a\log x + {}^a\log y$ (①)

④ ${}^a\log \frac{x}{y}$
$= {}^a\log\left(a^{{}^a\log x} : a^{{}^a\log y}\right)$
$= {}^a\log a^{{}^a\log x - {}^a\log y}$
$= {}^a\log x - {}^a\log y$

⑤ ${}^{a}\log x^{r}$

$= {}^{a}\log\left[\left(a^{{}^{a}\log x}\right)^{r}\right]$ (②)

$= {}^{a}\log\left(a^{r.{}^{a}\log x}\right)$ (rekenregel machten $\boxed{3}$)

$= r.{}^{a}\log x$ (①)

⑥ Steunend op ② en ⑤ vind je:

${}^{b}\log x = {}^{b}\log a^{{}^{a}\log x}$

$= {}^{a}\log x.{}^{b}\log a$

$\Leftrightarrow {}^{a}\log x = \dfrac{{}^{b}\log x}{{}^{b}\log a}$

Gevolg: Stelling ⑤ heeft als onmiddellijk gevolg dat ook geldt dat: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : {}^{a}\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}.{}^{a}\log x$

Voorbeelden: $${}^{0,04}\log\sqrt[4]{5} = {}^{\frac{1}{25}}\log\sqrt[4]{5} = \frac{{}^{5}\log\sqrt[4]{5}}{{}^{5}\log\frac{1}{25}} = \frac{\frac{1}{4}\cdot{}^{5}\log 5}{{}^{5}\log 1 - {}^{5}\log 25} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{0-2} = -\frac{1}{8}$$

$${}^{3}\log\frac{9}{\sqrt{27}} = {}^{3}\log 9 - {}^{3}\log\sqrt{27} = {}^{3}\log 9 - \frac{1}{2}\cdot{}^{3}\log 27 = 2 - \frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{1}{2}$$

d) Speciale grondtallen – logaritmen met rekenmachines

Op rekenmachines vind je voor logaritmen vaak standaard enkel de knoppen $\boxed{\log}$ en $\boxed{\ln}$ terug. Dit zijn logaritmen met een bijzonder grondtal.

Briggse logaritmen

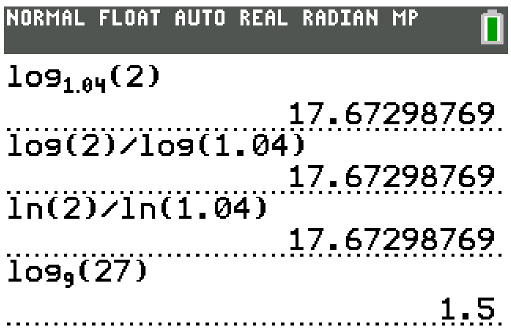
Definitie: Logaritmen met grondtal 10 noemen we Briggse logaritmen.

Bij logaritmen met dit grondtal hoef je de 10 niet te schrijven (net zoals je de 2 bij een vierkantswortel ook niet schrijft).

Voorbeeld: $${}^{1,04}\log 2 = \frac{{}^{10}\log 2}{{}^{10}\log 1,04} \overset{def}{=} \frac{\log 2}{\log 1,04} \overset{GRM}{\approx} 17,67$$

Dit was de manier waarop vroeger logaritmen moesten berekend worden met rekenmachines. Bij de recentste besturingssystemen vind je ook al logaritmen met een willekeurig grondtal terug.

Merk hierbij wel op dat rekenmachines het grondtal bij logaritmen op een andere plaats schrijven (namelijk als index rechtsonder in plaats van zoals wij als exponent linksboven).



Natuurlijke logaritmen

Logaritmen met als grondtal het transcendente getal e ($e = 2,71828182846\ldots$) noemen we natuurlijke logaritmen. Ze worden soms ook Neperiaanse logaritmen genoemd naar de Schotse ontdekker John Napier. Hier noteer je ook geen grondtal maar gebruik je het symbool $\ln$ (dit staat voor *logarithmus naturalis*).

Dit grondtal speelt een hele belangrijke rol bij het afleiden van exponentiële en logaritmische functies en zal dus vooral in het zesde jaar aan bod komen.

4) Exponentiële en logaritmische functies

a) Definities en grafieken

Definitie: Een *exponentiële functie* is een functie met voorschrift $f(x) = a^x$, waarbij $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$.

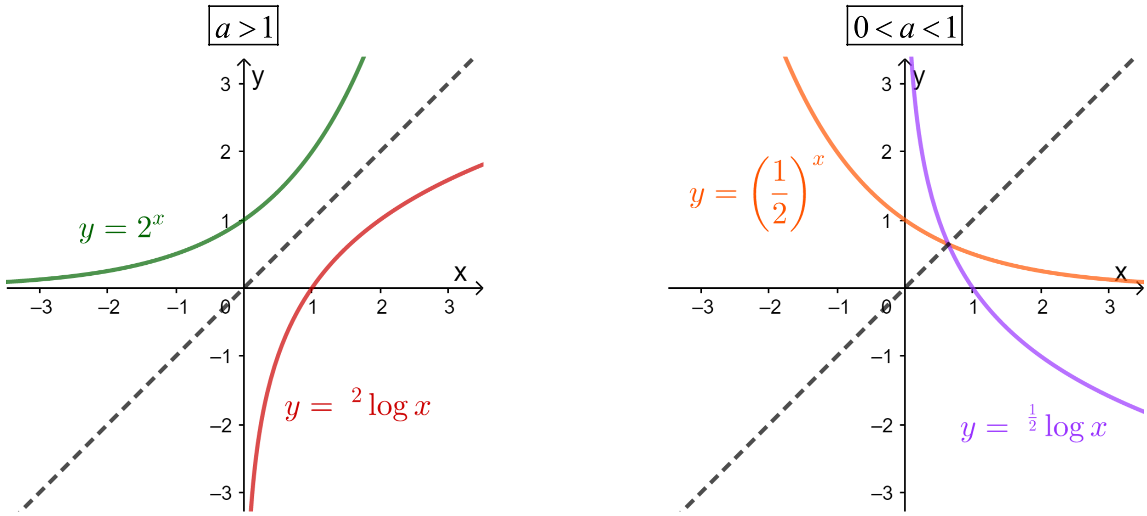
Deze functies worden soms ook genoteerd als $\exp_a$.

Definitie: Een *logaritmische functie* is een functie met voorschrift $f(x) = {}^a\log x$, waarbij $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$.

Deze functies worden soms ook genoteerd als $\log_a$.

Grafieken

We bekijken nu voor een paar grondtallen de grafieken van deze functies. Uit de voorgaande paragrafen weten we al dat exponentiele functies stijgend zijn als $a > 1$ en dalend als $0 < a < 1$.



Eigenschappen

- De functies $\exp_a$ en $\log_a$ zijn elkaars inverse: $\exp_a^{-1} = \log_a$ en $\log_a^{-1} = \exp_a$.

  (Dit volgt onmiddellijk uit de definitie van logaritmen: $y = {}^a\log x \Leftrightarrow a^y = x$.)
- Voor domein en beeld gelden: $dom \exp_a = \mathbb{R}$, $bld \exp_a = \mathbb{R}_0^+$, $dom \log_a = \mathbb{R}_0^+$ en $bld \log_a = \mathbb{R}$.
- Alle grafieken van exponentiële functies hebben de x-as als horizontale asymptoot.

  (Als $a > 1$ geldt $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ en als $0 < a < 1$ geldt $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.)
- Alle grafieken van logaritmische functies hebben de y-as als verticale asymptoot.

  (Als $a > 1$ geldt $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} {}^a\log x = -\infty$ en als $0 < a < 1$ geldt $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} {}^a\log x = +\infty$.)
- Alle grafieken van exponentiële functies snijden de y-as in het punt $(0,1)$.
- Alle grafieken van logaritmische functies snijden de x-as in het punt $(1,0)$.
- De grafieken van de functies $\exp_a$ en $\exp_{\frac{1}{a}}$ zijn elkaars spiegelbeeld om de y-as.

  (Ligt voor de hand omdat $\exp_a(-x) = a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x = \exp_{\frac{1}{a}}(x)$.)
- De grafieken van de functies $\log_a$ en $\log_{\frac{1}{a}}$ zijn elkaars spiegelbeeld om de x-as.

  (Uit de rekenregels van logaritmen volgt dat ${}^{\frac{1}{a}}\log(x) = \dfrac{{}^a\log(x)}{{}^a\log\left(\dfrac{1}{a}\right)} = \dfrac{{}^a\log(x)}{-1} = -{}^a\log(x)$)

5) Exponentiële en logaritmische vergelijkingen en ongelijkheden

Exponentiële vergelijkingen

Een *exponentiële vergelijking* is een vergelijking waarbij de onbekende x in minstens één exponent voorkomt.

Om ze op te lossen steunen we op de eigenschap: $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} : \boxed{a^p = a^q \Leftrightarrow p = q}$.

Dit volgt uit het feit dat met elke x-waarde een unieke y-waarde correspondeert bij alle exponentiële functies (we noemen zulke functies *bijecties*).

Voorbeelden: ① $4.2^{3x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^{3x-1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{3x-1} = 2^{-2} \Leftrightarrow 3x - 1 = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$, $V = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

② $5.25^x - 126.5^x + 25 = 0$ (stel $t = 5^x$, zodat $t^2 = \left(5^x\right)^2 = \left(5^2\right)^x = 25^x$)

$\Leftrightarrow 5.t^2 - 126t + 25 = 0 \Leftrightarrow t = 25 \vee t = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5^x = 25 \vee 5^x = \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1 \quad \{2, -1\}$

Exponentiële ongelijkheden

Het oplossen van een exponentiële ongelijkheid verloopt op dezelfde manier als bij vergelijkingen.

Om ze op te lossen steunen we op de eigenschappen:
- $\forall a \in \left]1, +\infty\right[: \boxed{a^p \underset{>}{<} a^q \Leftrightarrow p \underset{>}{<} q}$
- $\forall a \in \left]0, 1\right[: \boxed{a^p \underset{>}{<} a^q \Leftrightarrow p \underset{<}{>} q}$

Denk er dus aan dat het teken wisselt als het grondtal tussen 0 en 1 ligt. Dit ligt aan het feit dat die exponentiële functies dalend zijn.

Voorbeeld: $\left(\frac{1}{11}\right)^{-3x-4} > 121^{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{11}\right)^{-3x-4} > 11^{2x+2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{11}\right)^{-3x-4} > \left(\frac{1}{11}\right)^{-2x-2}$

$\Leftrightarrow -3x - 4 < -2x - 2 \Leftrightarrow -x < 2 \Leftrightarrow x > -2 \quad V = \left]-2, +\infty\right[$

Logaritmische vergelijkingen

Een *logaritmische vergelijking* is een vergelijking waarbij de onbekende x minstens één keer na een logaritme, of in het grondtal van een logaritme voorkomt.

Om ze op te lossen steunen we op: $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}, \forall p, q \in \mathbb{R}_0^+ : \boxed{{}^a\log p = {}^a\log q \Leftrightarrow p = q}$.

Deze eigenschap geldt omdat logaritmische functies net als exponentiële functies bijecties zijn.

Bij logaritmische vergelijkingen naast de reeds geziene rekenregels voor logaritmen ook de volgende (extra) rekenregels soms handig van pas:

Stelling: $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}, \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \forall r \in \mathbb{R}:$

⑦ ${}^{a^r}\log x^r = {}^a\log x$ ⑧ ${}^a\log b = \frac{1}{{}^b\log a}$ ⑨ ${}^a\log b \cdot {}^b\log x = {}^a\log x$

Bewijs: ⑦ ${}^{a^r}\log x^r \overset{\text{⑥}}{=} \frac{{}^a\log x^r}{{}^a\log a^r} \overset{\text{⑤}}{\underset{\text{①}}{=}} \frac{\cancel{r} \cdot {}^a\log x}{\cancel{r}} = {}^a\log x$

⑧ $^{a}\log b \overset{⑥}{=} \dfrac{^{b}\log b}{^{b}\log a} = \dfrac{1}{^{b}\log a}$

⑨ $^{a}\log b \cdot {}^{b}\log x \overset{⑥}{=} \cancel{^{a}\log b} \cdot \dfrac{^{a}\log x}{\cancel{^{a}\log b}} = {}^{a}\log x$

Net als bij irrationale vergelijkingen kan het zijn dat er bij logaritmische vergelijkingen (en ongelijkheden) een bestaansvoorwaarde optreedt.

Voorbeelden: ① $\log 2 \cdot {}^{2}\log x + \log(x+3) = 1 \quad BV: x>0 \ \wedge \ x+3>0 \ \Leftrightarrow \ \boxed{x>0}$

$\overset{⑨}{\Leftrightarrow} \log x + \log(x+3) = \log 10 \overset{③}{\Leftrightarrow} \log\big(x(x+3)\big) = \log 10$

$\Leftrightarrow x^2+3x=10 \Leftrightarrow x^2+3x-10=0 \Leftrightarrow \cancel{x=-5} \ \vee \ x=2 \qquad V=\{2\}$

② $\dfrac{2}{^{x^2}\log 9} - {}^{3}\log(x-6) = 3 \quad BV: x^2 \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \ \wedge \ x-6>0 \Leftrightarrow \boxed{x>6}$

$\overset{⑧}{\Leftrightarrow} 2.\,{}^{9}\log x^2 - {}^{3}\log(x-6) = 3 \overset{⑦}{\Leftrightarrow} 2.\,{}^{3}\log x - {}^{3}\log(x-6) = 3$

$\overset{⑤}{\Leftrightarrow} {}^{3}\log x^2 - {}^{3}\log(x-6) = 3 \overset{④}{\Leftrightarrow} {}^{3}\log \dfrac{x^2}{x-6} = {}^{3}\log 27$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x-6} = 27 \Leftrightarrow x^2 = 27(x-6) \Leftrightarrow x^2-27x+162=0$

$\Leftrightarrow x=9 \ \vee \ x=18 \qquad V=\{9;18\}$

Logaritmische ongelijkheden

Het oplossen van een logaritmische ongelijkheid verloopt op dezelfde manier als bij vergelijkingen.

Om ze op te lossen steunen we op de eigenschappen:
- $\forall a \in \left]1,+\infty\right[:$ $\boxed{^{a}\log p \underset{>}{<} {}^{a}\log q \Leftrightarrow p \underset{>}{<} q}$
- $\forall a \in \left]0,1\right[:$ $\boxed{^{a}\log p \underset{>}{<} {}^{a}\log q \Leftrightarrow p \underset{<}{>} q}$

Net als bij exponentiële ongelijkheden wisselt het teken als het grondtal tussen 0 en 1 ligt. Dit ligt aan het feit dat ook die logaritmische functies dalend zijn.

6) Formularium

Machten:

- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^n = \overbrace{a.a.a.\dots.a}^{n\ factoren}$.
- $\forall a \in \mathbb{R}_0 : a^0 = 1$ (merk op dat 0^0 niet gedefinieerd is).
- $\forall a \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{N} : a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $\forall a \in \mathbb{R}_0^+, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, \forall p \in \mathbb{Q}$:

① $a^p . a^q = a^{p+q}$

② $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

③ $\left(a^p\right)^q = a^{p.q}$

④ $(a.b)^p = a^p . b^p$

⑤ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$

n-de machtswortels:

$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \forall m, n \in \mathbb{N}_0$:

① $\sqrt[n]{a^n} = a$

② $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

③ $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

④ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (met $b \neq 0$)

⑤ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Logaritmen

$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}, \forall x, y \in \mathbb{R}_0^+, \forall r \in \mathbb{R}$: ⓪ ${}^a\log x = r \Leftrightarrow a^r = x$

① ${}^a\log a^r = r$

② $a^{{}^a\log x} = x$

⑦ ${}^{a^r}\log x^r = {}^a\log x$

③ ${}^a\log(x.y) = {}^a\log x + {}^a\log y$

④ ${}^a\log \dfrac{x}{y} = {}^a\log x - {}^a\log y$

⑧ ${}^a\log b = \dfrac{1}{{}^b\log a}$

⑤ ${}^a\log x^r = r.\,{}^a\log x$

⑥ ${}^a\log x = \dfrac{{}^b\log x}{{}^b\log a}$

⑨ ${}^a\log b \cdot {}^b\log x = {}^a\log x$