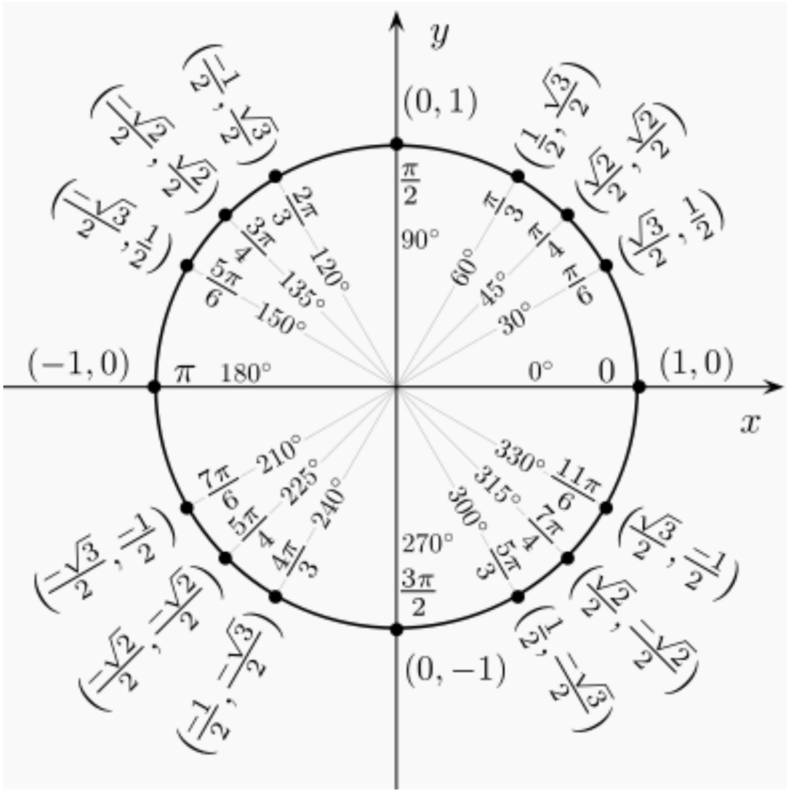
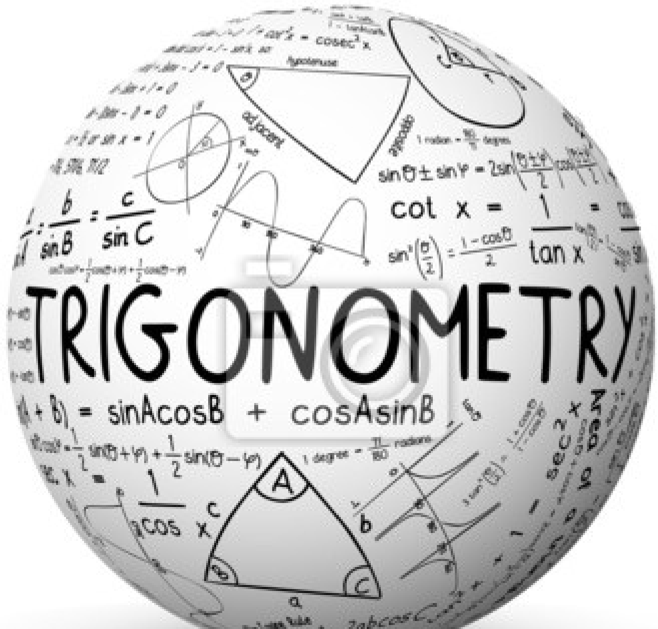
Goniometrische & cyclometrische functies

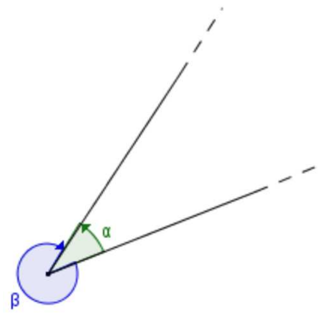




1) Radialen

a) Definitie van een hoek

Definitie: Een *hoek* is een georiënteerd paar halfrechten die starten in hetzelfde punt (hoekpunt). Hierbij maken we de afspraak dat positieve oriëntatie in tegenwijzerzin gebeurt.
Hoeken worden meestal genoteerd met Griekse letters $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \ldots$
De hoeken α en β die je hiernaast ziet getekend zijn dus eigenlijk dezelfde hoek. Hij meet 35° (of -325°, of 395°, of …). De grootte van een hoek is dus maar bepaald op een veelvoud van 360° na.



Definitie: De hoekgrootte gelegen in het interval]-180°,180°] noemen we de *hoofdwaarde* van de hoek.

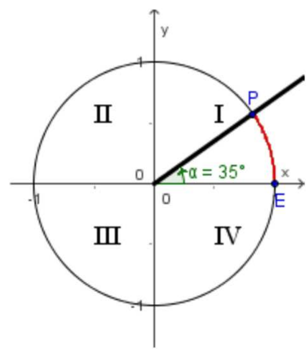
b) De goniometrische cirkel

Definitie: De *goniometrische cirkel* is de cirkel met als middelpunt de oorsprong en straal 1.

Definitie: Deze cirkel wordt door de assen verdeeld in 4 *kwadranten*, die we noteren met de Romeinse cijfers I, II, III en IV (zie figuur).

Elke hoek kunnen we op een unieke manier afbeelden op de goniometrische cirkel door als eerste halfrechte de positieve x-as te nemen. Op de figuur hiernaast is dit gebeurd voor de hoek α .

Definitie: Het snijpunt van de tweede halfrechte van een hoek met de goniometrische cirkel noemen we dan het *beeldpunt* (P) van de hoek.



c) De radiaal

Definitie: We kunnen nu de hoekgrootte ook nog op een andere manier uitdrukken, namelijk in *radialen*: dit is de afstand gemeten in tegenwijzerzin langs de goniometrische cirkel, vanaf het eenheidspunt ($E(1,0)$) tot het beeldpunt van de hoek (P). Dit is op de figuur aangeduid in het rood.

We weten dat een volledige cirkel 360° is. In radialen is dit één maal de omtrek van de goniometrische cirkel, dus 2π . Omzetten van graden naar radialen gaat dan met de regel van 3. De eenheid *rad* hoeft niet altijd geschreven te worden.
In de kader hiernaast zie je twee voorbeeldjes uitgewerkt, waaruit blijkt dat $35° = \frac{7\pi}{36}$ en $\frac{\pi}{6} = 30°$.

$360°$	$=$	$2\pi\ rad$	$2\pi\ rad$	$=$	$360°$
	$\Updownarrow :360$			$\Updownarrow :2\pi$	
$1°$	$=$	$\frac{\pi}{180}\ rad$	$1\ rad$	$=$	$\frac{180°}{\pi}$
	$\Updownarrow .35$			$\Updownarrow .\pi/6$	
$35°$	$=$	$\frac{7\pi}{36}\ rad$	$\frac{\pi}{6}\ rad$	$=$	$30°$

In praktijk verander je van eenheid door te onthouden dat $x° = x \cdot \frac{\pi}{180}\ rad$ en dat $x\ rad = x.\frac{180°}{\pi}$.

In cirkels met straal r wordt de lengte l van de cirkelboog gegeven door $l = \alpha \cdot r$, met α de corresponderende middelpuntshoek gemeten in radialen.

2) De goniometrische getallen (herhaling)

a) Sinus en cosinus

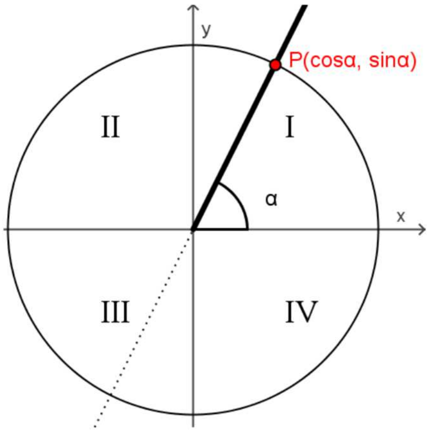
Definitie: De *cosinus* en de *sinus* van een hoek zijn de coördinaatgetallen van het beeldpunt P van die hoek op de goniometrische cirkel.

Zo is bijvoorbeeld $\sin\frac{\pi}{2}=1$ en $\cos\pi=-1$.

Voor elke hoek α geldt: $\cos\alpha\in[-1,1]$ en $\sin\alpha\in[-1,1]$, omdat de straal van de goniometrische cirkel 1 is.

Uit de stelling van Pythagoras volgt vrijwel onmiddellijk dat: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Dit noemen we de grondformule van de goniometrie.



b) Tangens en cotangens

Definitie: De *tangens* van een hoek is het quotiënt van zijn sinus en zijn cosinus. De *cotangens* van een hoek is het quotiënt van zijn cosinus en zijn sinus.

In formulevorm geeft dit $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ en $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Merk op dat de tangens niet gedefinieerd is voor $\alpha\in\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$, en de cotangens niet voor $\alpha\in\{k\pi \,\|\, k\in\mathbb{Z}\}$, omdat er dan zou moeten gedeeld worden door 0.

Meetkundige betekenis van tangens en cotangens

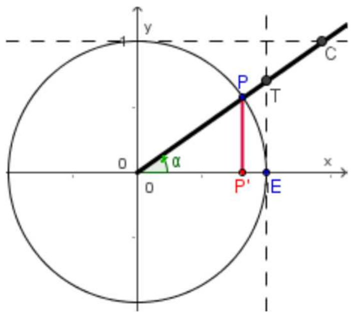
Op de figuur is het duidelijk dat $\Delta POP' \overset{(HH)}{\approx} \Delta TOE$, zodat geldt:

$\dfrac{|TE|}{|OE|}=\dfrac{|PP'|}{|OP'|}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$, en vermits $|OE|=1$ is $|TE|=\tan\alpha$.

De *tangens* van een hoek is het tweede coördinaatgetal van het snijpunt van het tweede been van die hoek met de rechte $x=1$.

Analoog kan je afleiden dat voor de cotangens geldt:

De *cotangens* van een hoek is het eerste coördinaatgetal van het snijpunt van het tweede been van die hoek met de rechte $y=1$.



Uit de grondformule kunnen we direct afleiden dat: $\tan^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ en $\cot^2\alpha+1=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

c) Secans en cosecans

Definitie: De *secans* van een hoek is het omgekeerde van zijn cosinus. De *cosecans* van een hoek is het omgekeerde van zijn sinus.

In formulevorm geeft dit $\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$ en $\csc\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$.

Merk op dat de secans niet gedefinieerd is voor $\alpha\in\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$, en de cosecans niet voor $\alpha\in\{k\pi \,\|\, k\in\mathbb{Z}\}$, omdat er dan zou moeten gedeeld worden door 0.

d) Tekens en bijzondere waarden van de goniometrische getallen

α	0°	Kw I	$\pi/2$	Kw II	π	Kw III	$3\pi/2$	Kw IV
$\sin\alpha$	0	+	1	+	0	-	-1	-
$\cos\alpha$	1	+	0	-	-1	-	0	+
$\tan\alpha$	0	+	///	-	0	+	///	-

Opmerking: In de tabel vermelden we enkel het teken van de sinus, de cosinus en de tangens omdat de andere drie goniometrische getallen de omgekeerden zijn van deze en dus hetzelfde teken hebben.

e) Bijzondere hoeken

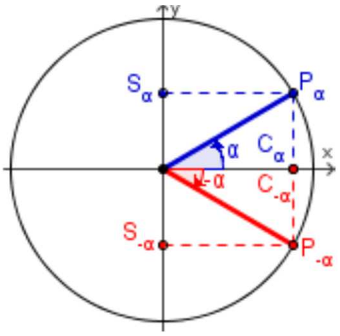
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	///
$\cot\alpha$	///	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

f) Verwante hoeken

Tegengestelde hoeken

Definitie: hoeken waarvan de som 0 is.

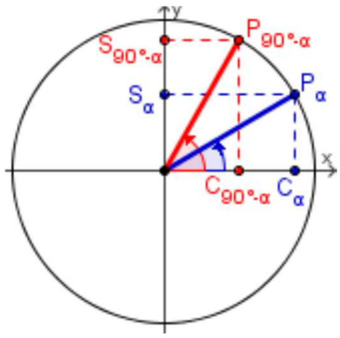
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$



Complementaire hoeken

Definitie: hoeken waarvan de som $\pi/2$ is.

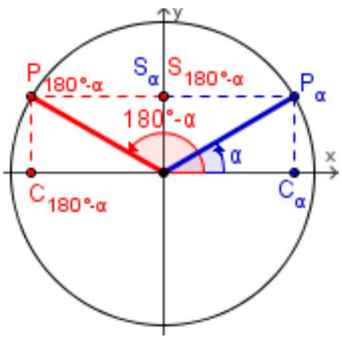
$$\sin(\pi/2-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(\pi/2-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\tan(\pi/2-\alpha) = \cot\alpha$$
$$\cot(\pi/2-\alpha) = \tan\alpha$$



Supplementaire hoeken

Definitie: hoeken waarvan de som π is.

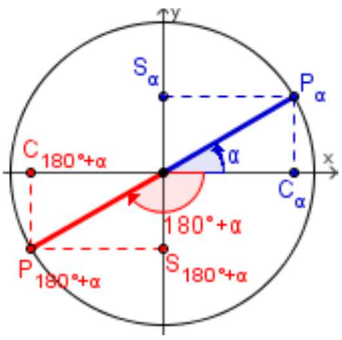
$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$$



Antisupplementaire hoeken

Definitie: hoeken waarvan het verschil π is.

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$$



Voorbeelden: $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \overset{TH}{=} -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{2\pi}{3} \overset{SH}{=} -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) \overset{ASH}{=} \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

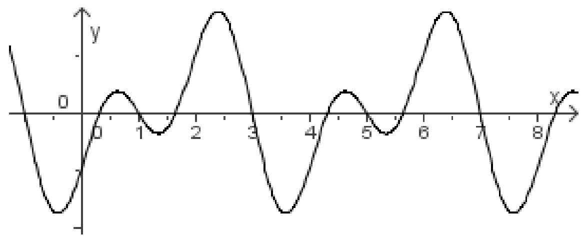
3) De goniometrische functies

a) Periodieke functies

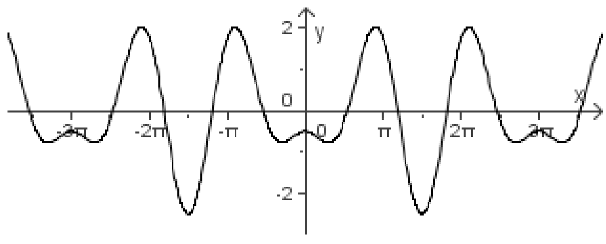
De goniometrische functies zijn allemaal wat we noemen periodieke functies.

Definitie: Een functie heet *periodiek* met periode P als en slechts als P het kleinste strikt positieve getal is waarvoor geldt: $\forall x \in dom\ f : f(x+P) = f(x)$.

Voorbeelden:



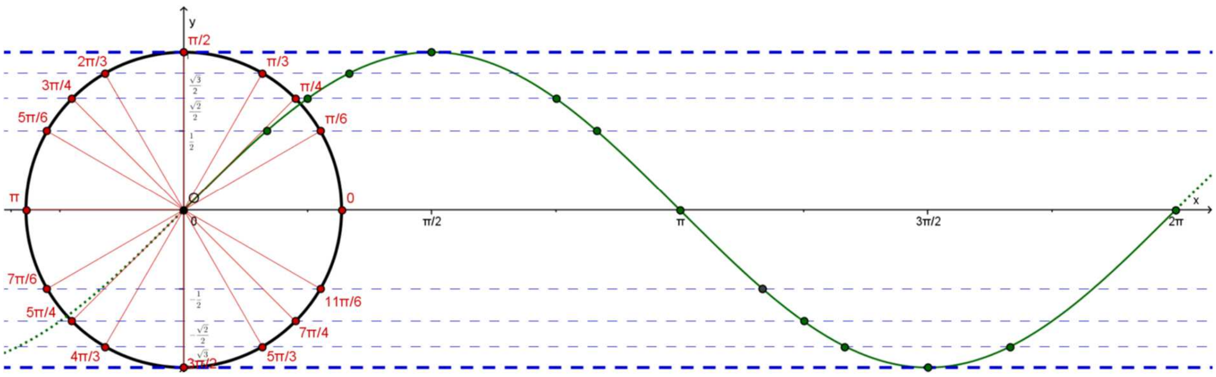
$P = 4$



$P = 3\pi$

b) De (co)sinusfunctie

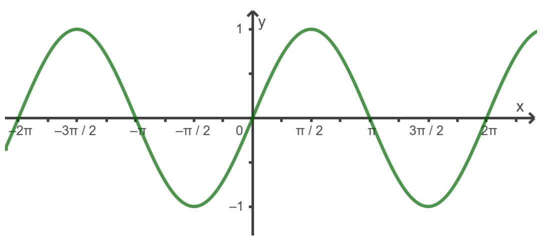
De grafiek van de sinusfunctie kan getekend worden door de goniometrische cirkel af te rollen:



Op analoge manier kan ook de grafiek van de cosinusfunctie heel eenvoudig worden getekend. Merk op dat in de onderstaande grafieken de assen niet hetzelfde geijkt zijn (maar dat hoeft ook niet).

De sinusfunctie

Dit is de functie met voorschrift $f(x) = \sin(x)$.



Domein: $dom\ f = \mathbb{R}$

Beeld: $bld\ f = [-1,1]$

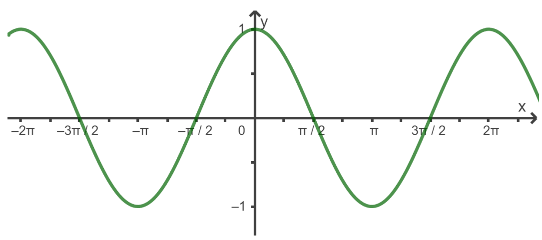
Periode: $P = 2\pi$

De grafiek is symmetrisch om de oorsprong.

De sinusfunctie is dus een oneven functie.

De cosinusfunctie

Dit is de functie met voorschrift $f(x) = \cos(x)$.



Domein: $dom\ f = \mathbb{R}$

Beeld: $bld\ f = [-1,1]$

Periode: $P = 2\pi$

De grafiek is symmetrisch om de y-as.

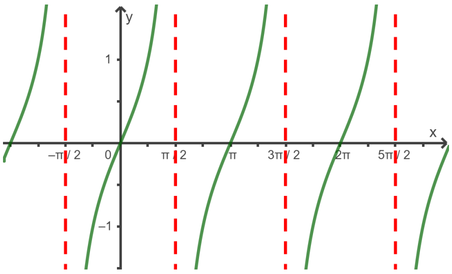
De cosinusfunctie is dus een even functie.

c) De (co)tangensfunctie

De tangens is het quotiënt van de sinusfunctie en de cosinusfunctie. De cotangens is zijn omgekeerde:

De tangensfunctie

Dit is de functie met voorschrift $f(x)=\tan(x)$.



Domein: $dom\ f=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

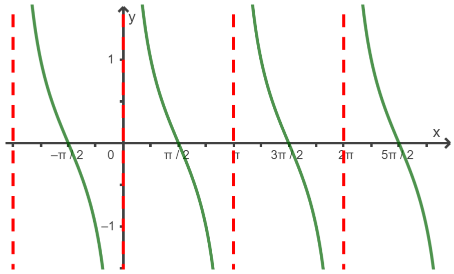
Beeld: $bld\ f=\mathbb{R}$

Periode: $P=\pi$

De grafiek is symmetrisch om de oorsprong.

De cotangensfunctie

Dit is de functie met voorschrift $f(x)=\cot(x)$.



Domein: $dom\ f=\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

Beeld: $bld\ f=\mathbb{R}$

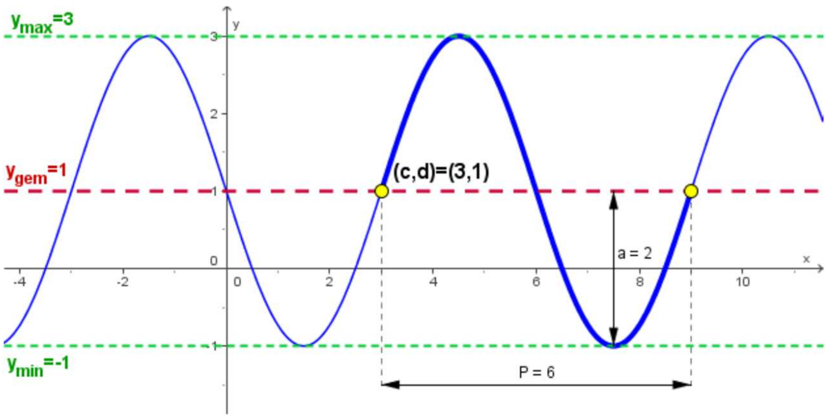
Periode: $P=\pi$

De grafiek is symmetrisch om de oorsprong.

d) De algemene sinusfunctie

Definitie: Een algemene sinusfunctie is een functie van de vorm: $f(x)=a\sin\big(b(x-c)\big)+d$. Hierbij zijn $a,b\in\mathbb{R}_0^+$ en $c,d\in\mathbb{R}$.

Voorbeeld: Hieronder zie je de grafiek van de sinusfunctie $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}(x-3)\right)+1$



Aan de hand hiervan bespreken we de invloed van de parameters $a=2$, $b=\frac{\pi}{3}$, $c=3$ en $d=1$:

• De evenwichtsstand d:	dit bepaalt de gemiddelde waarde van de functie.	$d=\frac{y_{\max}+y_{\min}}{2}$
• De amplitude a:	dit bepaalt de maximale uitwijking ten opzichte van de evenwichtsstand.	$a=\frac{y_{\max}-y_{\min}}{2}$
• De pulsatiefactor b:	deze is omgekeerd evenredig met de periode van de functie.	$b=\frac{2\pi}{P}$
• Het faseverschil c:	dit bepaalt het “beginpunt” van een periode op de grafiek van de functie.	$(c,d)\in f$

Het is belangrijk dat je van een grafiek deze parameters kan aflezen, en ook omgekeerd een schets kan maken van de grafiek als je het voorschrift krijgt van een algemene sinusfunctie.

Voorbeeld: f is de algemene sinusfunctie met voorschrift $f(x) = -2\sin(3x+2)+4$. Bepaal van deze functie de amplitude, bereik, periode, faseverschuiving en schets grafiek in één periodeinterval.

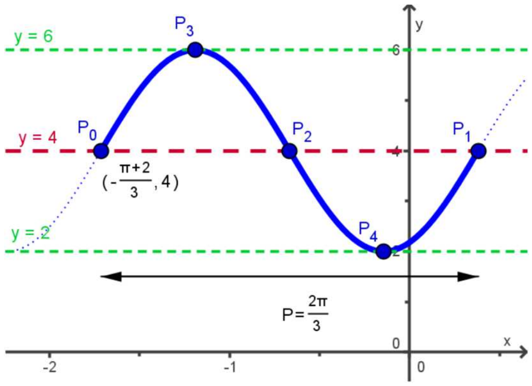
We schrijven eerst de functie in haar standaardvorm:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\sin(3x+2)+4 \\ &\overset{ASH}{=} 2\sin(\pi+3x+2)+4 && \textit{(formule antisupplementaire hoeken om } a \textit{ positief te maken)} \\ &= 2\sin\left(3\left(x+\frac{\pi+2}{3}\right)\right)+4 && \textit{(standaardvorm om } c \textit{ te kunnen aflezen)} \end{aligned}$$

Zo kunnen we de parameters eenvoudig aflezen:

- Amplitude $a = 2$
- Periode $P = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3}$
- Faseverschil (=faseverschuiving) $c = -\frac{\pi+2}{3}$
- Evenwichtsstand $d = 4$

We maken een schets van de grafiek:



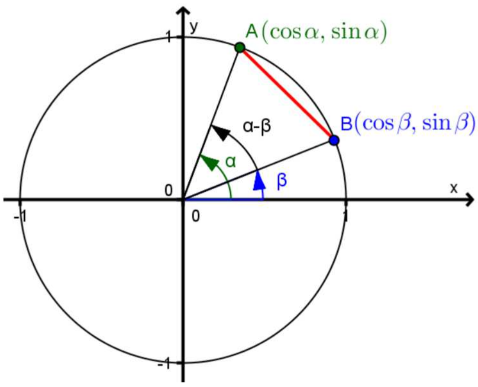
De schets maken gebeurt altijd op dezelfde manier:

- Duidt het beginpunt $P_0(c,d)$ van een periode aan.
- Duidt het eindpunt $P_1(c+P,d)$ aan van die periode.
- Duidt het midden $P_2\left(c+\frac{P}{2},d\right)$ aan van die periode.
- Duidt het maximum $P_3\left(c+\frac{P}{4},d+a\right)$ aan van die periode.
- Duidt het minimum $P_4\left(c+\frac{3P}{4},d-a\right)$ aan van die periode.
- Trek een vloeiende lijn door de punten die je hebt aangeduid!

Je hoeft de coördinaten natuurlijk niet van buiten te leren. Eens je begrijpt hoe een periode van de sinus eruitziet heb je genoeg aan het startpunt, de amplitude en de periode.

4) Goniometrie

a) De som- en verschilformules



Stelling: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

Bewijs: Enerzijds geldt de cosinusregel in ΔOAB :

$$|AB|=\sqrt{|OA|^2+|OB|^2-2|OA||OB|\cos(\alpha-\beta)}$$
$$=\sqrt{2-2\cos(\alpha-\beta)}$$

Anderzijds kunnen we de formule gebruiken voor de afstand tussen twee punten in het vlak:

$$\begin{aligned}|AB| &=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}\\ &=\sqrt{\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta}\\ &=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta}\\ &=\sqrt{2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta}\end{aligned}$$

Uit de gelijkheid van deze twee volgt onmiddellijk de gezochte formule. □

Uit deze formules kunnen we eenvoudig volgende formules afleiden:

Stelling (de som- en verschilformules):

$$\boxed{\begin{array}{ll}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & \\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta & \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & \tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta & \end{array}}$$

Bewijs: Alles volgt uit de tweede formule (die we reeds bewezen) en de formules voor verwante hoeken:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &=\cos(\alpha-(-\beta))\\ &=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta) && \text{(verschilformule cosinus)}\\ &=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta && \text{(formules tegengestelde hoeken)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right) && \text{(formule complementaire hoeken)}\\ &=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta && \text{(verschilformule cosinus)}\\ &=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta && \text{(formules complementaire hoeken)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &=\sin(\alpha+(-\beta))\\ &=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta) && \text{(somformule sinus)}\\ &=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta && \text{(formules tegengestelde hoeken)}\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$ (definitie tangens, somformules sinus en cosinus)

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$ (teller en noemer delen door $\cos\alpha\cos\beta$)

$$= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$ (definitie tangens)

$$\tan(\alpha-\beta) = \tan(\alpha+(-\beta))$$

$$= \frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$$ (somformule tangens)

$$= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \quad \square$$ (formule tegengestelde hoeken)

Voorbeeld: Bewijs dat in elke driehoek met hoeken α,β en γ de volgende prachtige formule geldt:

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma.$$

Omdat $\alpha+\beta+\gamma=\pi \Leftrightarrow \gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ krijgen we:

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma$$
$$\Leftrightarrow \tan\alpha+\tan\beta+\tan(\pi-(\alpha+\beta))=\tan\alpha.\tan\beta.\tan(\pi-(\alpha+\beta))$$
$$\Leftrightarrow \tan\alpha+\tan\beta-\tan(\alpha+\beta)=-\tan\alpha.\tan\beta.\tan(\alpha+\beta)$$
$$\Leftrightarrow \tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta).(1-\tan\alpha.\tan\beta)$$
$$\Leftrightarrow \tan\alpha+\tan\beta=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cancel{1-\tan\alpha.\tan\beta}}.\cancel{(1-\tan\alpha.\tan\beta)} \quad \square$$

b) De verdubbelings- en halveringsformules

Stelling (de verdubbelingsformules):

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha-1 = 1-2\sin^2\alpha \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Bewijs:

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha.\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$ (somformule cosinus)

$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$$ (want $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$)

$$=2(1-\sin^2\alpha)-1=1-2\sin^2\alpha$$ (want $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$)

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$ (somformule sinus)

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \quad \square$$ (somformule tangens)

Uit de verdubbelingsformules voor de cosinus kunnen we onmiddellijk de volgende twee formules afleiden, die de *formules van Carnot* worden genoemd, of ook wel de *halveringsformules*:

Stelling (de halveringsformules):

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

Bewijs: triviaal.

c) De formules van Simpson

Stelling (de formules van Simpson):

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad 2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \qquad 2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad 2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

Bewijs: Voor de linkse formules stellen we $x=\alpha+\beta$ en $y=\alpha-\beta$, dan is $\alpha=\frac{x+y}{2}$ en $\beta=\frac{x-y}{2}$, zodat

$$\begin{aligned}
\sin x+\sin y &= \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) && \text{(substitutie)}\\
&= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta && \text{(som- en verschilformules sinus)}\\
&= 2\sin\alpha\cos\beta = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} && \text{(substitutie)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin x-\sin y &= \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) && \text{(substitutie)}\\
&= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta) && \text{(som- en verschilformules sinus)}\\
&= 2\cos\alpha\sin\beta = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} && \text{(substitutie)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos x+\cos y &= \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) && \text{(substitutie)}\\
&= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta && \text{(som- en verschilformules cosinus)}\\
&= 2\cos\alpha\cos\beta = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} && \text{(substitutie)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos x-\cos y &= \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) && \text{(substitutie)}\\
&= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta-(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) && \text{(som- en verschilformules cosinus)}\\
&= -2\sin\alpha\sin\beta = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} && \text{(substitutie)}
\end{aligned}$$

De rechtse formules volgen onmiddellijk uit de derde stap van de vorige bewijzen. □

Opmerking: De linkse formules zetten een som of een verschil van (co)sinussen om naar een product. Dat zal vooral handig blijken bij het oplossen van vergelijkingen. Het omgekeerde zal volgend jaar handig blijken bij integralen van goniometrische functies.

d) De formules van Weierstrass (de t-formules)

De formules laten toe sommige vergelijkingen op te lossen, en zullen ook nuttig blijken bij integralen.

Stelling: Als $t=\tan\frac{x}{2}$ (met $x\neq\pi+2k\pi$), dan geldt: $\boxed{\sin x=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan x=\frac{2t}{1-t^2}}$.

Bewijs: Hier hebben we de afgeleide hoofdformule $\sec^2\alpha=\tan^2\alpha+1$ nodig:

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}=2\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=2\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\sec^2\frac{x}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1-t^2} \quad \square$$

e) Goniometrische vergelijkingen

In dit hoofdstuk gaan we heel vaak een parameter k gebruiken. Je mag er dan altijd van uitgaan dat $k\in\mathbb{Z}$.

Elementaire goniometrische vergelijkingen

De meeste goniometrische vergelijkingen hebben oneindig veel oplossingen. Dat volgt uit het feit dat een hoek niet verandert als je er 2π (360°) bij optelt of van aftrekt.

Eerste voorbeeld: Los op: $\sin x=\frac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6}$ (want $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$)

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \vee \quad x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

(want hoeken die dezelfde sinus hebben zijn gelijk of supplementair)

Algemeen:

$$\sin x=\sin\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+2k\pi \ \vee\ x=\pi-\alpha+2k\pi$$

Tweede voorbeeld: Los op: $\cos x=-\frac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{2\pi}{3}$ (want $\cos\frac{2\pi}{3}\overset{SH}{=}-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$)

$\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \quad \vee \quad x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

(want hoeken die dezelfde cosinus hebben zijn gelijk of tegengesteld)

Algemeen:

$$\cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+2k\pi \ \vee\ x=-\alpha+2k\pi$$

Derde voorbeeld: Los op: $\tan x=\sqrt{3}/3$.

$\Leftrightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{6}$ (want $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$)

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi$

Algemeen:

$$\tan x=\tan\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi$$

Vierde voorbeeld: Los op: $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$.

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow\quad 2x+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}+k.2\pi$$
$$\Leftrightarrow\quad 2x=\frac{4\pi}{3}+k.2\pi$$
$$\Leftrightarrow\quad x=\frac{2\pi}{3}+k.\pi$$

Merk bij dit voorbeeld vooral op dat het supplement nemen hier niet nodig is, omdat $-\pi/2$ het supplement is van $3\pi/2$, maar dat zijn gelijke hoeken.
Je kan dit dan beschouwen als dubbele nulpunten: de grafiek van $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$ zal de x-as raken in de punten $\left(\frac{2\pi}{3}+k\pi,0\right)$, met $k\in\mathbb{Z}$.

Vergelijkingen die te herleiden zijn naar basisvergelijkingen

Met behulp van de geziene formules (vergeet ook de verwante hoeken niet) kan je bepaalde vergelijkingen omvormen tot basisvergelijkingen.

Voorbeeld: $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin 3x=0$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin 3x \;\Leftrightarrow\; \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin(-3x) \;\Leftrightarrow\; \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)$$
$$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+3x+2k\pi \;\vee\; 2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi \;\Leftrightarrow\; x=-\frac{3\pi}{4}-2k\pi \;\vee\; x=-\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}$$

Vergelijkingen die uiteenvallen in basisvergelijkingen

Met behulp van de gekende formules is het soms mogelijk een vergelijking zo te herschrijven dat ze uiteenvalt (kan ontbonden worden) in vergelijkingen die te herleiden zijn naar basisvergelijkingen.

Voorbeeld: $\underline{\cos x}+\underline{\underline{\cos 2x}}+\underline{\cos 3x}+\underline{\underline{\cos 4x}}=0$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x+2\cos 3x\cos x=0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\cos 2x+\cos 3x\right)=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \vee \cos 2x+\cos 3x=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \;\vee\; \cos 2x=\cos(\pi-3x)$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \;\vee\; 2x=\pi-3x+2k\pi \;\vee\; 2x=-\pi+3x+2k\pi$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \;\vee\; x=\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5} \;\vee\; x=\pi-2k\pi$$

Vergelijkingen waar een substitutie hulp kan bieden

Eerste voorbeeld: $2\cos x=\sec x-1$ (denk hier ook aan de bestaansvoorwaarde: $\cos x\neq 0$)

$$\Leftrightarrow 2\cos x=\frac{1}{\cos x}-1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0 \overset{\Delta=9}{\Leftrightarrow} \cos x=-1 \vee \cos x=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

(De substitutie gebeurt 'achter de schermen': met $t=\cos x$ geldt $2t^2+t-1=0 \Leftrightarrow t=-1 \vee t=\frac{1}{2}$)

Tweede voorbeeld: $\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$ (Hier kunnen we de t-formules gebruiken, met $t=\tan\frac{x}{2}$)

$$\Leftrightarrow \frac{2t}{1+t^2}-\sqrt{3}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}=1 \Leftrightarrow 2t-\sqrt{3}+\sqrt{3}t^2=1+t^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}-1\right)t^2+2t-\sqrt{3}-1=0 \quad \boxed{\Delta=4+4\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)=12}$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{-2+2\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}-1\right)}=1 \vee t=\frac{-2-2\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=-\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=-2-\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{x}{2}=\tan\frac{\pi}{4} \vee \tan\frac{x}{2}\overset{\boxed{!?!}}{=}\tan\frac{7\pi}{12} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$$

!! ***LET OP:*** Als je de t-formules gebruikt moet je controleren of $x=\pi+2k\pi$ ook oplossingen zijn!!

Derde voorbeeld: $\sin x-2\cos x=2$ (ook hier gebruiken we de t-formules, maar...)

$$\Leftrightarrow \frac{2t}{1+t^2}-2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}=2 \Leftrightarrow 2t-2\cancel{+2t^2}=2\cancel{+2t^2} \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow x=2.\mathrm{Bgtan}\,2+2k\pi$$

Maar het is duidelijk dat ook $x=\pi+2k\pi$ oplossingen zijn.

Vergelijkingen die lineair zijn in sinus en cosinus

De vergelijking uit het tweede voorbeeld kan ook eleganter worden opgelost (zonder de $\boxed{!?!}$ stap):

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=1 \Leftrightarrow \sin x-\tan\frac{\pi}{3}\cos x=1 \Leftrightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos x=\cos\frac{\pi}{3}\left(=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$$

Op deze manier hoef je ook niet zoals bij de vorige manier te weten dat $\tan\frac{7\pi}{12}=-2-\sqrt{3}$.

Stelling: De vergelijking $a\sin x+b\cos x=c$ is oplosbaar als en slechts als $a^2+b^2\geq c^2$.

Bewijs: $a\sin x+b\cos x=c \Leftrightarrow \sin x+\frac{b}{a}\cos x=\frac{c}{a} \Leftrightarrow \sin x+\tan\varphi\cos x=\frac{c}{a}$ (met $\tan\varphi=\frac{b}{a}$)

$$\Leftrightarrow \sin x\cos\varphi+\sin\varphi\cos x=\frac{c}{a}\cos\varphi \Leftrightarrow \sin\left(x+\varphi\right)=\frac{c}{a}\cos\varphi.$$

Deze laatste vergelijking is oplosbaar als en slechts als geldt:

$$-1\leq\frac{c}{a}\cos\varphi\leq1 \Leftrightarrow \left(\frac{c}{a}\cos\varphi\right)^2\leq1 \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2}\cdot\cos^2\varphi\leq1 \overset{\boxed{!!}}{\Leftrightarrow} \frac{c^2}{\cancel{a^2}}\cdot\frac{\cancel{a^2}}{a^2+b^2}\leq1 \Leftrightarrow c^2\leq a^2+b^2$$

$\boxed{!!}$: Uit $\tan\varphi=\frac{b}{a}$ volgt $\tan^2\varphi=\frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow 1+\tan^2\varphi=1+\frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\varphi}=\frac{a^2+b^2}{a^2} \Leftrightarrow \cos^2\varphi=\frac{a^2}{a^2+b^2}$ □

Opmerking: Deze methode is aangeraden als je de hoek φ exact kan berekenen. In het andere geval zijn de t-formules meer aangewezen.

Homogene vergelijkingen in sinus en cosinus

Een vergelijking heet homogeen in sinus en cosinus als de som van de exponenten van sinus en cosinus in elke term gelijk zijn. Het is heel eenvoudig deze vergelijkingen op te lossen:

Voorbeeld: $3\cos^4 x + 2\sin x\cos^3 x - \sin^2 x\cos^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x\left(3\cos^2 x + 2\sin x\cos x - \sin^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \;\vee\; \frac{3\cos^2 x + 2\sin x\cos x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi} \;\vee\; 3 + 2\tan x - \tan^2 x = 0$$

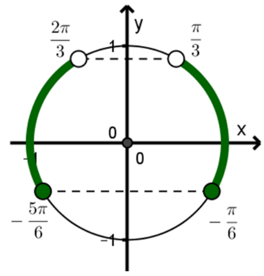
$$\Leftrightarrow \tan x = -1 \;\vee\; \tan x = 3 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \;\vee\; x = \text{Bgtan}3 + k\pi$$

Merk op dat je bij de tweede vergelijking mag delen door $\cos^2 x$ omdat er ook nog een term in $\sin x$ staat en die kan nooit nul zijn als de cosinus nul is.

f) Goniometrische ongelijkheden

Eenvoudige goniometrische ongelijkheden zijn op te lossen door het oplossingsgebied aan te duiden op de goniometrische cirkel. Bij iets complexere ongelijkheden zal soms een substitutie nodig zijn.

Eerste voorbeeld: $-1 \le 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) < \sqrt{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$

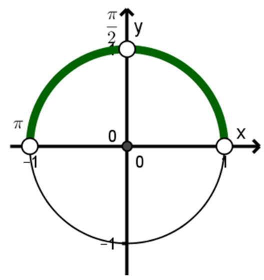


$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le \frac{\pi}{3} - 2x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \;\vee\; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < \frac{\pi}{3} - 2x \le \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le -2x < 2k\pi \;\vee\; \frac{\pi}{3} + 2k\pi < -2x \le \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow -k\pi < x \le \frac{\pi}{4} - k\pi \;\vee\; -\frac{5\pi}{12} - k\pi \le x < -\frac{\pi}{6} - k\pi$$

Tweede voorbeeld: $\csc x + \cos 2x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x} + 1 - 2\sin^2 x > 0$



$$\Leftrightarrow \frac{-2\sin^3 x + \sin x + 1}{\sin x} > 0 \overset{\text{Horner}}{\Leftrightarrow} 0 < \sin x < 1$$

$$\Leftrightarrow 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\vee\; \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$

5) Cyclometrische functies

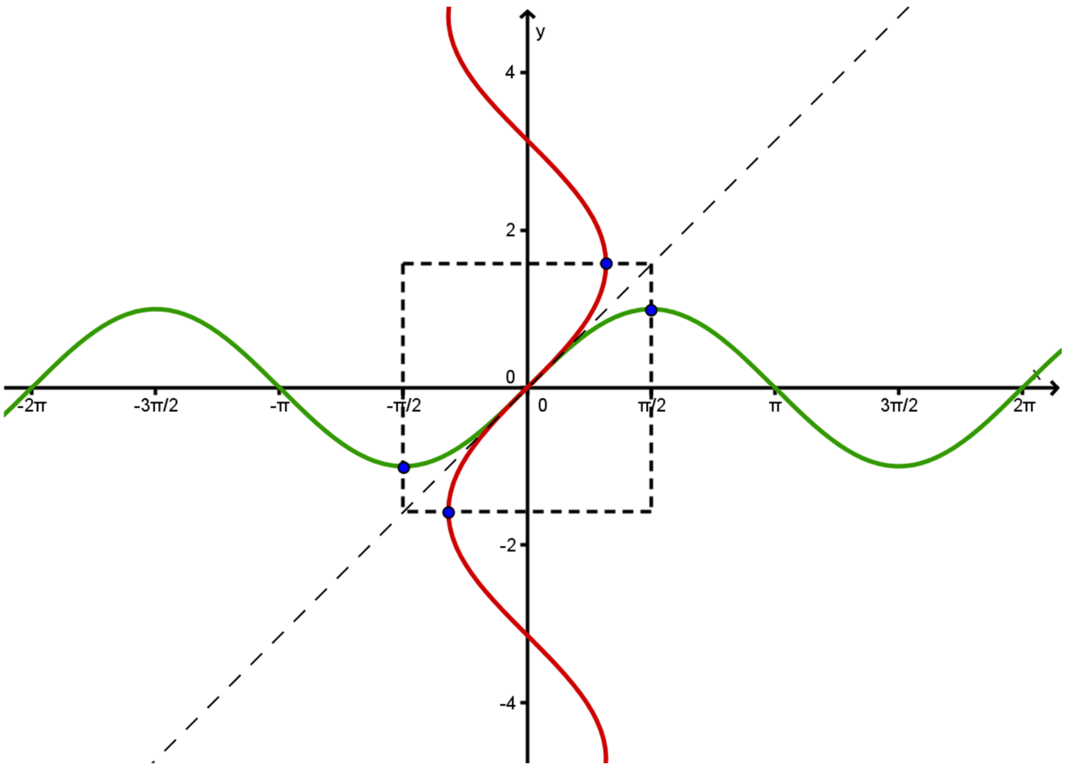
a) Definitie en grafieken

Definitie: De *cyclometrische functies* zijn de inverse functies van de goniometrische functies, na beperking van het domein.

De boogsinusfunctie

We bekijken eerst de inverse relatie van de sinus, deze zullen we noteren met bgsin :

$$\sin = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin x \right\} \Leftrightarrow \text{bgsin} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \sin y \right\}$$



Het is duidelijk dat bgsin geen functie is. We begrenzen daartoe het domein van de sinus:

$$\sin_b = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin x \wedge -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \right\} \Leftrightarrow \text{Bgsin} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \sin y \wedge -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \right\}$$

Merk op dat we de inverse functie noteren met een hoofdletter. We noemen deze functie de *boogsinusfunctie*. We maken een korte bespreking van deze functie: stel $f(x) = \text{Bgsin}\, x$.

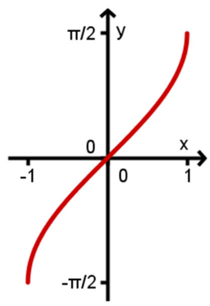
- $dom\ f = [-1,1]$
- $bld\ f = [-\pi/2, \pi/2]$
- Tekenverloop:

x		-1		0		1	
$f(x)$	/	-	-	0	+	+	/

- Stijgen en dalen:

x		-1		1	
$f(x)$	/	|	↗	|	/

- Symmetrie: de functie is oneven (symmetrisch om de oorsprong)

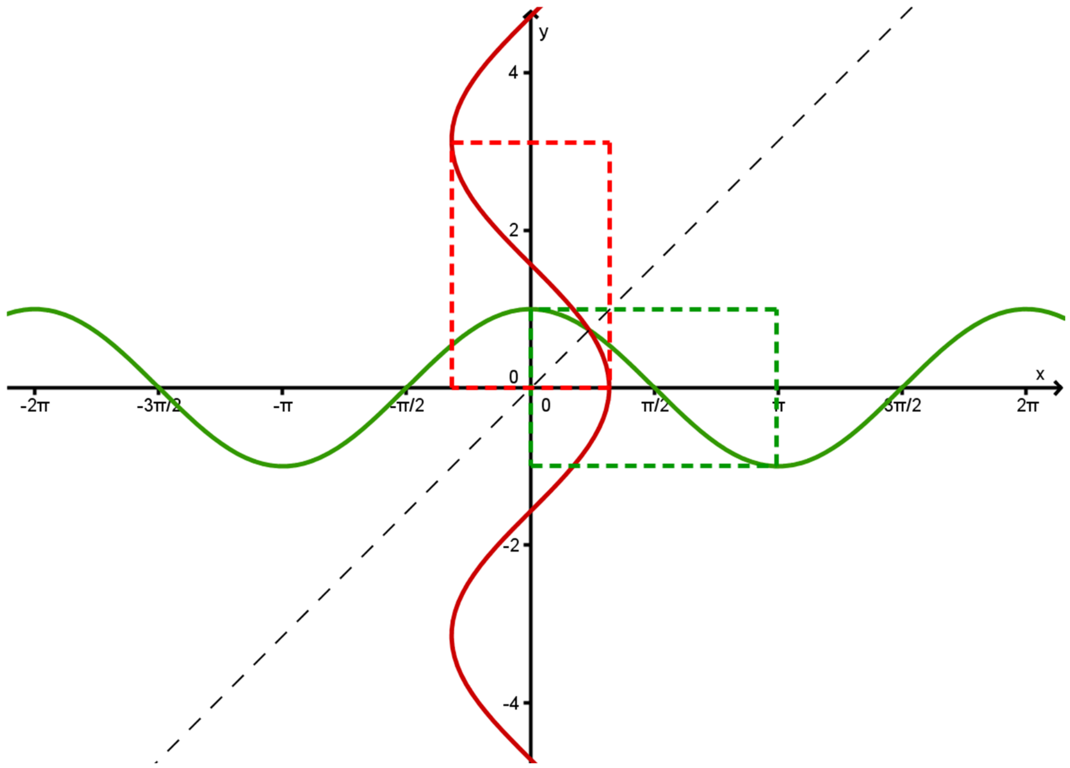


Gevolgen: ① $\forall x \in [-1,1] : \sin(\text{Bgsin}\, x) = x$ ② $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] : \text{Bgsin}(\sin x) = x$

De boogcosinusfunctie

We bekijken eerst de inverse relatie van de cosinus, deze zullen we noteren met bgcos :

$$\cos = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \cos x\} \Leftrightarrow \text{bgcos} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \cos y\}$$



Het is duidelijk dat bgcos geen functie is. We begrenzen daartoe het domein van de cosinus:

$$\cos_b = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \cos x \wedge 0 \le x \le \pi\} \Leftrightarrow \text{Bgcos} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \cos y \wedge 0 \le y \le \pi\}$$

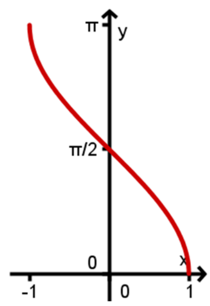
Merk op dat we de inverse functie noteren met een hoofdletter. We noemen deze functie de *boogcosinusfunctie*. We maken een korte bespreking van deze functie: stel $f(x) = \text{Bgcos}\, x$.

- $dom\ f = [-1,1]$
- $bld\ f = [0,\pi]$
- Tekenverloop:

x		-1		0		1	
$f(x)$	/	+	+	+	+	0	/

- Stijgen en dalen:

x		-1		1	
$f(x)$	/	|	↘	|	/



- Symmetrie: de functie is noch even, noch oneven.

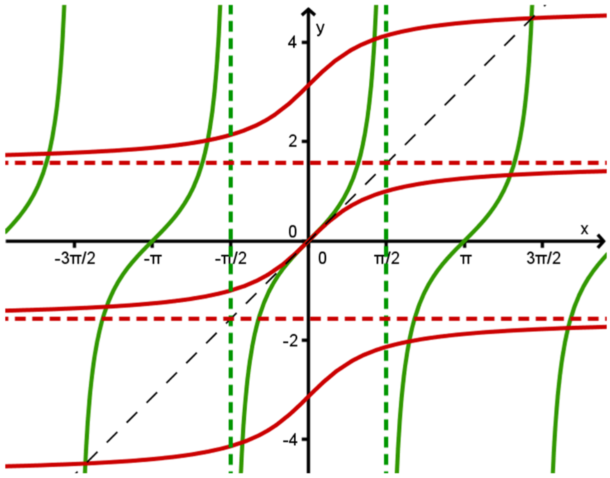
Gevolgen: ① $\forall x \in [-1,1] : \cos(\text{Bgcos}\, x) = x$ ② $\forall x \in [0,\pi] : \text{Bgcos}(\cos x) = x$

Voorbeeld: $\text{Bgcos}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

De boogtangensfunctie

We bekijken eerst de inverse relatie van de tangens, deze zullen we noteren met bgtan :

$$\tan = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\tan x\right\} \Leftrightarrow \text{bgtan} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=\tan y\right\}$$



Het is duidelijk dat bgtan geen functie is. We begrenzen daartoe het domein van de tangens:

$$\tan_b = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\tan x \wedge -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{Bgtan} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=\tan y \wedge -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right\}$$

Merk op dat we de inverse functie noteren met een hoofdletter. We noemen deze functie de *boogtangensfunctie*.

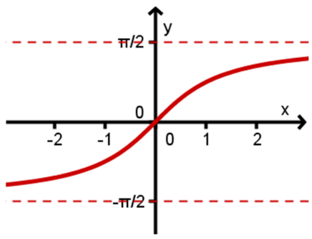
We maken een korte bespreking van deze functie: stel $f(x)=\text{Bgtan}\, x$.

- $dom\ f=\mathbb{R}$
- $bld\ f=\left]-\pi/2,\pi/2\right[$
- Tekenverloop:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

- Stijgen en dalen:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	



- Symmetrie: de functie is oneven (symmetrisch om de oorsprong).
- Asymptotisch gedrag: $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{Bgtan}\, x=\pi/2$ en $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{Bgtan}\, x=-\pi/2$

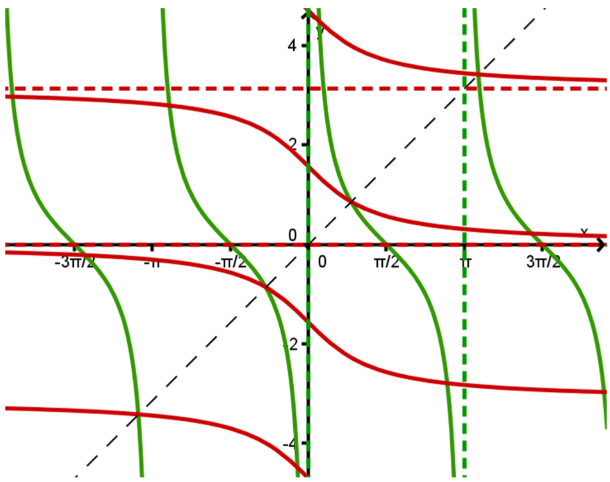
De functie heeft dus twee horizontale asymptoten met vergelijkingen $y=\pi/2$ en $y=-\pi/2$.

Gevolgen: ① $\forall x\in\mathbb{R}:\tan(\text{Bgtan}\, x)=x$ ② $\forall x\in\left]-\pi/2,\pi/2\right[:\text{Bgtan}(\tan x)=x$

De boogcotangensfunctie

We bekijken eerst de inverse relatie van de cotangens, deze zullen we noteren met bgcot :

$$\cot = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\cot x\right\} \Leftrightarrow \text{bgcot} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=\cot y\right\}$$



Het is duidelijk dat bgcot geen functie is. We begrenzen daartoe het domein:

$$\cot_b = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\cot x \wedge 0\le x\le\pi\right\}$$

$$\Updownarrow$$

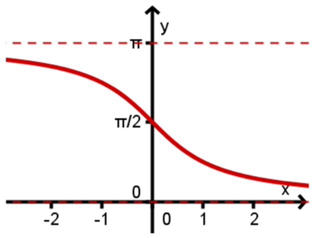
$$\text{Bgcot} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=\cot y \wedge 0\le y\le\pi\right\}$$

Merk op dat we de inverse functie noteren met een hoofdletter. We noemen deze functie de *boogcotangensfunctie*.

We maken een korte bespreking van deze functie: stel $f(x)=\text{Bgcot}\, x$.

We maken een korte bespreking van deze functie: stel $f(x) = \operatorname{Bgcot} x$.

- $dom\ f = \mathbb{R}$
- $bld\ f =]0, \pi[$



- Tekenverloop:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	

- Stijgen en dalen:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↘	

- Symmetrie: de functie is noch even, noch oneven.
- Asymptotisch gedrag: $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Bgcot} x = 0$ en $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{Bgcot} x = \pi$

De functie heeft dus twee horizontale asymptoten met vergelijkingen $y = 0$ en $y = \pi$.

Gevolgen: ① $\forall x \in \mathbb{R} : \cot(\operatorname{Bgcot} x) = x$ ② $\forall x \in]0, \pi[: \operatorname{Bgcot}(\cot x) = x$

b) Enkele eenvoudige stellingen

Stelling: $\forall x \in [-1,1] : \operatorname{Bgsin} x + \operatorname{Bgcos} x = \pi/2$

Bewijs: Stel $y = \operatorname{Bgsin} x$, dan is $x = \sin y = \cos(\pi/2 - y)$, waaruit volgt dat $\operatorname{Bgcos} x = \pi/2 - y$.

Omdat $y = \operatorname{Bgsin} x \in [-\pi/2, \pi/2]$ zal wel degelijk $\operatorname{Bgcos} x = \pi/2 - y \in [0, \pi]$ □

Stelling: $\forall x \in [-1,1] : \cos(\operatorname{Bgsin} x) = \sin(\operatorname{Bgcos} x) = \sqrt{1 - x^2}$

Bewijs: $\cos^2(\operatorname{Bgsin} x) = 1 - \sin^2(\operatorname{Bgsin} x) = 1 - x^2$, dus $\cos(\operatorname{Bgsin} x) = \sqrt{1 - x^2}$.

We nemen de positieve wortel omdat $\operatorname{Bgsin} x \in [-\pi/2, \pi/2] \Rightarrow \cos(\operatorname{Bgsin} x) > 0$.

$\sin^2(\operatorname{Bgcos} x) = 1 - \cos^2(\operatorname{Bgcos} x) = 1 - x^2$, dus $\sin(\operatorname{Bgcos} x) = \sqrt{1 - x^2}$.

We nemen de positieve wortel omdat $\operatorname{Bgcos} x \in [0, \pi] \Rightarrow \sin(\operatorname{Bgcos} x) > 0$. □

Stelling: $\forall x \in \mathbb{R} : \operatorname{Bgtan} x + \operatorname{Bgcot} x = \pi/2$

Bewijs: Stel $y = \operatorname{Bgtan} x$, dan is $x = \tan y = \cot(\pi/2 - y)$, waaruit volgt dat $\operatorname{Bgcot} x = \pi/2 - y$.

Omdat $y = \operatorname{Bgtan} x \in]-\pi/2, \pi/2[$ zal wel degelijk $\operatorname{Bgcot} x = \pi/2 - y \in]0, \pi[$ □

Stelling: $\forall x \in \mathbb{R}_0 : \tan(\operatorname{Bgcot} x) = \cot(\operatorname{Bgtan} x) = \dfrac{1}{x}$

Bewijs: Als $x \neq 0$: $\tan(\operatorname{Bgcot} x) = \dfrac{1}{\cot(\operatorname{Bgcot} x)} = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\tan(\operatorname{Bgtan} x)} = \cot(\operatorname{Bgtan} x)$. □

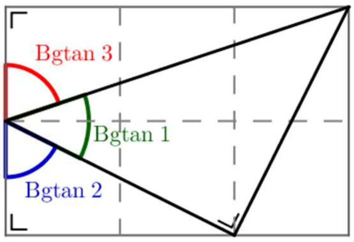
c) Cyclometrische vergelijkingen

Eerste voorbeeld: Bereken $\text{Bgtan}\,1+\text{Bgtan}\,2+\text{Bgtan}\,3$

We weten dat $\text{Bgtan}\,1=\dfrac{\pi}{4}$. We stellen $\text{Bgtan}\,2+\text{Bgtan}\,3=x$

$$\overset{!!}{\Rightarrow}\tan\left(\text{Bgtan}\,2+\text{Bgtan}\,3\right)=\tan x\Leftrightarrow\frac{2+3}{1-2.3}=\tan x\Leftrightarrow\tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\,.$$

We hebben nu dus bewezen dat er een $k\in\mathbb{Z}$ bestaat zodat $\text{Bgtan}\,2+\text{Bgtan}\,3=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.



Omdat $0<\text{Bgtan}\,2<\text{Bgtan}\,3<\dfrac{\pi}{2}$ zal $0<\text{Bgtan}\,2+\text{Bgtan}\,3<\pi$ en dus zal de juiste waarde van k gegeven worden door $k=1$, zodat

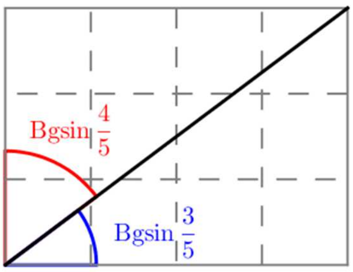
$$\text{Bgtan}\,2+\text{Bgtan}\,3=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}\,.$$

We weten dus meteen ook dat $\text{Bgtan}\,1+\text{Bgtan}\,2+\text{Bgtan}\,3=\pi$.
Dit is ook eenvoudig (en mooi) in te zien op de hiernaast staande figuur.

Tweede voorbeeld: Los op: $\text{Bgsin}\,x+\text{Bgsin}\,\dfrac{3}{5}=\dfrac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow\text{Bgsin}\,x=\frac{\pi}{2}-\text{Bgsin}\,\frac{3}{5}\overset{!!}{\Rightarrow}\sin\left(\text{Bgsin}\,x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\text{Bgsin}\,\frac{3}{5}\right)\Leftrightarrow x=\cos\left(\text{Bgsin}\,\frac{3}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{1-\frac{9}{25}}\Leftrightarrow x=\frac{4}{5}$$



We hebben nu bewezen dat er een $k\in\mathbb{Z}$ bestaat zodat:

$$\text{Bgsin}\,\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2}-\text{Bgsin}\,\frac{3}{5}+2k\pi\ \vee\ \text{Bgsin}\,\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2}+\text{Bgsin}\,\frac{3}{5}+2k\pi\,.$$

De enige juiste mogelijkheid is wel degelijk de eerste vergelijking waar we $k=0$ stellen (omdat je weet dat $0<\text{Bgsin}\,\dfrac{3}{5}<\text{Bgsin}\,\dfrac{4}{5}<\dfrac{\pi}{2}$).

Ook dit kunnen we eenvoudig en mooi inzien op de figuur hiernaast.

Derde voorbeeld: Los op: $\text{Bgtan}\,x+\text{Bgtan}\,2x=\dfrac{\pi}{4}\ \overset{!!}{\Rightarrow}\ \tan\left(\text{Bgtan}\,x+\text{Bgtan}\,2x\right)=\tan\dfrac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow\frac{x+2x}{1-2x^2}=1\Leftrightarrow 2x^2+3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\vee x=\frac{-3-\sqrt{17}}{4}\,.$$

Het is duidelijk dat de gezochte oplossing positief is, dus we controleren nu of $x_1=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$ een oplossing is. De tweede oplossing voldoet sowieso niet (we noemen dit een parasitaire oplossing).

We hebben bewezen dat er een $k\in\mathbb{Z}$ is zodat $\text{Bgtan}\,x_1+\text{Bgtan}\,2x_1=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

Omdat $0<\text{Bgtan}\,x_1<\text{Bgtan}\,2x_1<\dfrac{\pi}{2}$, zal $0<\text{Bgtan}\,x_1+\text{Bgtan}\,2x_1<\pi$, zodat inderdaad $k=0$.