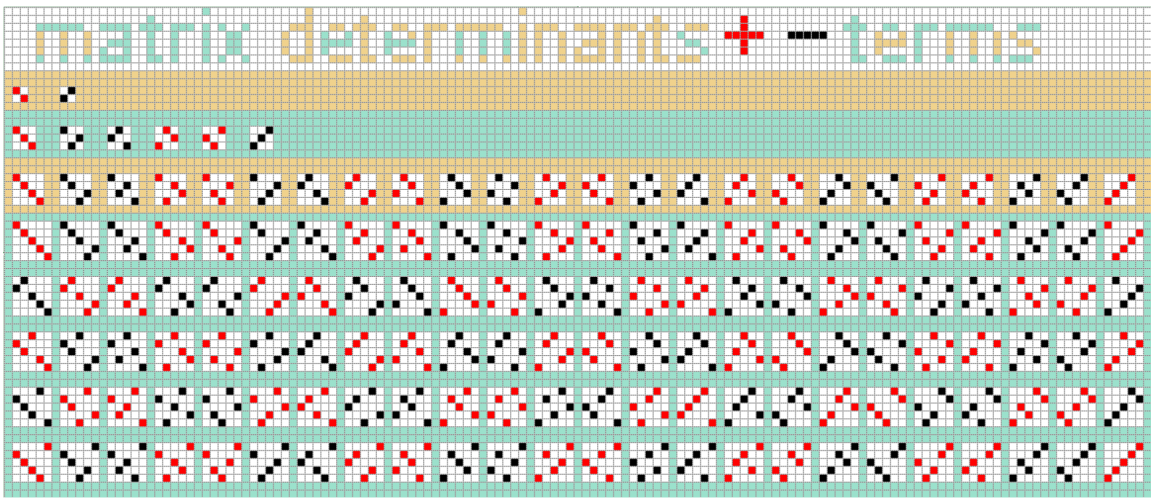
Matrices, Stelsels en determinanten



1) Matrices

a) Definities en voorbeelden

Definitie

Definitie: Een *matrix* is een tabel met een aantal rijen en een aantal kolommen, die gevuld is met reële getallen. De reële getallen noemt men de *elementen* van de matrix, en de matrix wordt genoteerd met een grote letter.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ waarbij } a_{ij} \in \mathbb{R} \quad met\ 1 \le i \le m\ en\ 1 \le j \le n.$$

Definitie: Het aantal rijen m en het aantal kolommen n noteren we als de *dimensie* $m \times n$.

Notatie: De verzameling van alle $(m \times n)$-matrices met reële elementen noteren we als $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Voorbeelden

Voorbeeld 1: *Afstanden*

Iemand wenst te gaan fietsen in de regio Antwerpen-Gent-Mechelen. Kilometerinformatie op voorhand is handig. Volgende wegen zijn hem bekend:

Gent-Lokeren: 26 km / Gent-Dendermonde: 30 km / Lokeren-Sint-Niklaas: 13 km / Lokeren-Dendermonde: 14 km / Sint-Niklaas-Antwerpen: 26 km / Sint-Niklaas-Mechelen: 34 km / Antwerpen-Mechelen: 25 km / Dendermonde-Mechelen: 28 km / …

Het is handig om al deze gegevens in een matrix te zetten:

$$K = \begin{array}{c} \\ a \\ d \\ g \\ l \\ m \\ s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & d & g & l & m & s \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 53 & 65 & 39 & 25 & 26 \\ 53 & 0 & 30 & 14 & 28 & 27 \\ 65 & 30 & 0 & 26 & 58 & 39 \\ 39 & 14 & 26 & 0 & 42 & 13 \\ 25 & 28 & 58 & 42 & 0 & 34 \\ 26 & 27 & 39 & 13 & 34 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Voorbeeld 2: *Stelsels van lineaire vergelijkingen*

Bij het stelsel $S = \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x + 14y = -1 \end{cases}$ hoort de (uitgebreide) coëfficiëntenmatrix $A_b = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 14 & -1 \end{array}\right]$.

b) Soorten matrices

Definitie: Een matrix die bestaat uit één rij noemen we een *rijmatrix* en heeft als dimensie $1 \times n$.

Definitie: Een matrix die bestaat uit één kolom noemen we een *kolommatrix* en heeft als dimensie $m \times 1$.

Definitie: Een matrix met evenveel rijen n als kolommen n noemen we een *vierkante matrix van dimensie* n *(soms ook wel van orde* n *genoemd).* Deze matrices hebben een *hoofddiagonaal*, bestaande uit de elementen $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$. De elementen $a_{1n}, a_{2\,n-1}, a_{3\,n-2}, ..., a_{n1}$ vormen de *nevendiagonaal*.

Definitie: Een vierkante matrix waarvan alle niet-diagonaal-elementen nul zijn, noemen we een *diagonaalmatrix*, die we ook korter kunnen noteren.

Vb.: $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = diag(4,5,-3)$

In symbolen geldt dus: A is een diagonaalmatrix $\Leftrightarrow \forall i,j \in \{1,2,...,n\} : i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Definitie: Een diagonaalmatrix waar alle elementen op de hoofddiagonaal gelijk zijn noemen we een *scalaire matrix*. Een voorbeeld is $S = diag(6,6,6)$

Definitie: Een diagonaalmatrix waarbij alle elementen op de hoofddiagonaal precies 1 zijn, noemen we een *eenheidsmatrix*. Als onderindex wordt soms de orde genoteerd, tenzij de orde uit de context duidelijk is.

Vb.: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Definitie: Een onderdriehoeksmatrix is een matrix waar boven de hoofddiagonaal enkel nullen staan.
In symbolen: A is een onderdriehoeksmatrix

$$\Leftrightarrow \forall i,j \in \{1,2,...,n\} : i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

Definitie: Analoog is een bovendriehoeksmatrix een matrix waar onder de hoofddiagonaal enkel nullen staan.
In symbolen: A is een bovendriehoeksmatrix

$$\Leftrightarrow \forall i,j \in \{1,2,...,n\} : i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

Vbn.: $B_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{onderdriehoeksmatrix}$ en $B_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{bovendriehoeksmatrix}$

Definitie: Voor *symmetrische* matrices geldt dat:
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is symmetrisch

$$\Leftrightarrow \forall i,j \in \{1,2,...,n\} : a_{ij} = a_{ji} .$$

Vb.: $S = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -4 & -5 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Definitie: Voor *scheefsymmetrische* matrices geldt:
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is scheefsymmetrisch $\Leftrightarrow \forall i,j \in \{1,2,...,n\} : a_{ij} = -a_{ji}$.

Opmerking: Deze matrices worden soms ook antisymmetrisch genoemd.

Vb.: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

Definitie: Een matrix waarvan alle elementen nul zijn, noemen we een *nulmatrix*. Deze hoeft niet noodzakelijk vierkant te zijn. Als onderindex noteren we soms de dimensie van de nulmatrix, tenzij deze uit de context blijkt.

Vb.: $O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Een matrix met één rij en één kolom vereenzelvigen we met een getal. Zo stellen we $[5] = 5$.

2) Bewerkingen met matrices

a) Gelijke matrices

Twee matrices A en B zijn gelijk als ze dezelfde dimensie hebben en als elk paar elementen op dezelfde positie gelijk is aan elkaar. Deze bewerking wordt meestal gebruikt om *matrixvergelijkingen* op te lossen.

Voorbeeld: Los op : $\begin{bmatrix} a-3 & 0 \\ -3 & d+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & b-2 \\ c+2 & 4 \end{bmatrix}$

Beide matrices zijn gelijk als en slechts als: $\begin{cases} a-3=2 \\ b-2=0 \\ c+2=-3 \\ d+4=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=2 \\ c=-5 \\ d=0 \end{cases}$.

b) Optellen van matrices

Twee matrices A en B kunnen worden opgeteld als ze dezelfde dimensie hebben. De *sommatrix* heeft ook dezelfde dimensie. We tellen elementen op dezelfde positie op en plaatsen de som ook op dezelfde positie.

Voorbeeld: Als $A=\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ en $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ dan is $A+B=\begin{bmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$.

c) Aftrekken van matrices

De tegengestelde matrix $-A$ van een matrix A is een matrix met dezelfde dimensie waarvan de elementen het tegengestelde zijn van de overeenkomstige elementen van de oorspronkelijke matrix.

Een matrix B aftrekken van een matrix A is bij A de tegengestelde matrix van B optellen.

Voorbeeld: Als $A=\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ en $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ dan is $A-B=\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 2 & -7 & 7 \end{bmatrix}$.

Eigenschappen van de optelling van matrices

Intern:	$\forall A,B \in \mathbb{R}^{m\times n} : A+B \in \mathbb{R}^{m\times n}$
Commutativiteit:	$\forall A,B \in \mathbb{R}^{m\times n} : A+B = B+A$
Associativiteit:	$\forall A,B,C \in \mathbb{R}^{m\times n} : (A+B)+C = A+(B+C)$
Neutraal element:	$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n} : A+O = O+A = A$
Symmetrisch element:	$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n} : A+(-A) = (-A)+A = O$

Deze vijf eigenschappen samen zorgen ervoor dat we $\mathbb{R}^{m\times n},+$ een *commutatieve groep* noemen.

d) Scalaire vermenigvuldiging met een matrix

Elke matrix A kan worden vermenigvuldigd met een reëel getal r. Het resultaat is een matrix $r.A$ van dezelfde dimensie, waarbij elk element van die matrix vermenigvuldigd werd met dat reëel getal r.

Voorbeeld: Als $A=\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$, dan is $2A=\begin{bmatrix} -2 & 8 & -4 \\ 6 & -12 & 10 \end{bmatrix}$.

Eigenschappen van de scalaire vermenigvuldiging met matrices

Intern:	$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall r \in \mathbb{R} : r.A \in \mathbb{R}^{m\times n}$
Distributiviteit van product t.o.v. som:	$\forall A,B \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall r \in \mathbb{R} : r(A+B) = r.A + r.B$
Distributiviteit van som t.o.v. product:	$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall r,s \in \mathbb{R} : (r+s).A = r.A + s.A$
Gemengde associativiteit:	$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall r,s \in \mathbb{R} : (r.s).A = r.(s.A)$
1 is neutraal element:	$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n} : 1.A = A$

Deze vijf eigenschappen samen met het feit dat $\mathbb{R}^{m\times n},+$ een commutatieve groep is, zorgen ervoor dat we $\mathbb{R},\mathbb{R}^{m\times n},+$ een *reële vectorruimte* noemen.

e) Vermenigvuldiging van matrices

Inleidend voorbeeld

Een consumentenorganisatie doet een actie bij nieuwe leden. Voor elk nieuw lid bepaalt men welk warenhuis het voordeligste is voor de wekelijkse aankopen. Hiervoor houdt de organisatie de prijzen van een groot aantal basisproducten in verschillende warenhuizen bij in een matrix P.
Hier is een voorbeeld voor een deel van de gegevens:

$$\begin{array}{rl} \begin{array}{r} \text{Dellijs} \rightarrow \\ \text{Zjeebee} \rightarrow \\ \text{Karfoer} \rightarrow \\ \text{Kolruit} \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 1{,}50 & 0{,}80 & 2{,}00 & 10{,}95 & 9{,}50 \\ 1{,}40 & 0{,}90 & 1{,}90 & 10{,}00 & 11{,}25 \\ 1{,}65 & 0{,}85 & 1{,}85 & 10{,}65 & 10{,}00 \\ 1{,}35 & 0{,}95 & 1{,}65 & 11{,}70 & 11{,}65 \end{bmatrix} = P \\ & \begin{array}{ccccc} \text{Aardappelen} & \text{Wortelen} & \text{Brood} & \text{Pils} & \text{Kaas} \\ \text{(in €/kg)} & \text{(in €/kg)} & \text{(in €/stuk)} & \text{(in €/bak)} & \text{(in €/kg)} \end{array} \end{array}$$

In realiteit gaat het uiteraard om veel meer producten en veel meer warenhuizen.
Bij de inschrijving als nieuw lid van de verbruikersvereniging kan je doorgeven hoeveel je per week van deze basisproducten verbruikt. Men rekent dan op basis van jouw gegevens uit welk warenhuis voor deze aankopen het goedkoopste is.

Als voorbeeld bekijken we twee gezinnen wiens verbruik we noteren in een matrix V:

$$\begin{array}{rl} \begin{array}{r} \text{Aardappelen (in kg)} \\ \text{Wortelen (in kg)} \rightarrow \\ \text{Brood (stuks)} \rightarrow \\ \text{Pils (bakken)} \rightarrow \\ \text{Kaas (in kg)} \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 2{,}5 \\ 2 & 1 \\ 10 & 8 \\ 0{,}8 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}6 \end{bmatrix} = V \\ & \begin{array}{cc} \text{Gezin} & \text{Gezin} \\ \text{Peeters} & \text{Janssen} \end{array} \end{array}$$

Om te berekenen hoeveel het gezin Peeters zou uitgeven in Dellijs, zou je volgende berekening doen:
$3.1{,}5 + 2.0{,}80 + 10.2{,}00 + 0{,}8.10{,}95 + 0{,}5.9{,}50 = 39{,}61$.
Dit komt neer op het vermenigvuldigen van alle elementen van de eerste rij (Delleis) van matrix P met de overeenkomstige elementen van de eerste kolom (Peeters) van matrix V.

We kunnen ook berekenen hoeveel het gezin Janssens zou uitgeven in Karfoer:
$2{,}5.1{,}65 + 1.0{,}85 + 8.1{,}85 + 0.10{,}65 + 0{,}6.10{,}00 = 23{,}275$.
Dit komt neer op het vermenigvuldigen van alle elementen van de derde rij (Karfoer) van matrix P met de overeenkomstige elementen van de tweede kolom (Janssens) van matrix V.

Doen we dit voor beide gezinnen en alle warenhuizen, dan kunnen we de uitgaven noteren als matrix U:

$$\begin{array}{rl} \begin{array}{r} \text{Dellijs} \rightarrow \\ \text{Zjeebee} \rightarrow \\ \text{Karfoer} \rightarrow \\ \text{Kolruit} \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 39{,}61 & 26{,}25 \\ 38{,}625 & 26{,}35 \\ 35{,}67 & 23{,}275 \\ 37{,}635 & 24{,}515 \end{bmatrix} = U \\ & \begin{array}{cc} \text{Gezin} & \text{Gezin} \\ \text{Peeters} & \text{Janssen} \end{array} \end{array}$$

We stellen nu per definitie dat deze matrix U het product is van de matrices P en V :

$$P.V=\begin{bmatrix}1{,}5 & 0{,}8 & 2 & 10{,}95 & 9{,}5\\ 1{,}4 & 0{,}9 & 1{,}9 & 10 & 11{,}25\\ 1{,}65 & 0{,}85 & 1{,}85 & 10{,}65 & 10\\ 1{,}35 & 0{,}95 & 1{,}65 & 11{,}7 & 11{,}65\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3 & 2{,}5\\ 2 & 1\\ 10 & 8\\ 0{,}8 & 0\\ 0{,}5 & 0{,}6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}39{,}61 & 26{,}25\\ 38{,}625 & 26{,}35\\ 35{,}67 & 23{,}275\\ 37{,}635 & 24{,}515\end{bmatrix}=U$$

Merk op dat je dus het element U_{ij} vindt door de som te maken van de producten van de overeenkomstige elementen uit de i-de rij van P met de j-de rij van V. We gebruiken dit voorbeeld nu om het product van matrices algemeen te definiëren.

Definitie

Definitie: Zij $P\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $A\in\mathbb{R}^{m\times p}$ en $B\in\mathbb{R}^{p\times n}$, dan geldt dat:

$$P=A.B\Leftrightarrow\forall i\in\{1,2,\ldots,m\},\forall j\in\{1,2,\ldots,n\}:p_{ij}=a_{i1}.b_{1j}+a_{i2}.b_{2j}+\ldots+a_{ip}.b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}.b_{kj}\,.$$

Merk op dat het product van twee matrices A en B dus enkel gedefinieerd is als A evenveel kolommen als B rijen heeft.

Het product is dan een matrix met evenveel rijen als A en evenveel kolommen als B.

Eigenschappen van de vermenigvuldiging van vierkante matrices

Intern:	$\forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}:A\cdot B\in\mathbb{R}^{n\times n}$
Associativiteit:	$\forall A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}:(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$
Neutraal element:	$\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}:A\cdot I_n=I_n\cdot A=A$
Distributiviteit t.o.v. de optelling:	$\forall A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}:A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ *(linksdistributiviteit)*
Distributiviteit t.o.v. de optelling:	$\forall A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}:(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$ *(rechtsdistributiviteit)*

Deze vijf eigenschappen samen met het feit dat $\mathbb{R}^{n\times n},+$ een commutatieve groep is, zorgen ervoor dat we $\mathbb{R}^{n\times n},+,.$ een *ring met eenheidselement* noemen.

Zowel groepen, vectorruimten, als ringen zijn van fundamenteel belang in het vak algebra.

Merk dus zeker op dat enkele eigenschappen niet gelden bij het vermenigvuldigen van matrices:

- Niet voor alle matrices geldt dat $A.B=B.A$. Deze eigenschap geldt slechts voor heel bijzondere (vierkante) matrices, die we dan ook *commuterende matrices* zullen noemen.

  Voorbeeld: Als $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ en $B=\begin{bmatrix}7 & -4\\ -6 & 1\end{bmatrix}$, dan is $A\cdot B=B\cdot A=\begin{bmatrix}-5 & -2\\ -3 & -8\end{bmatrix}$.
- Niet alle matrices hebben voor de vermenigvuldiging een symmetrisch element. Hier komen we later uitvoerig op terug (we noemen die matrices *inverteerbare matrices*).
- Uit $A\cdot B=O$ volgt bij matrices niet noodzakelijk dat $A=O\vee B=O$. Matrices waarvoor geldt dat $A\cdot B=O$, terwijl $A\neq O$ en $B\neq O$ noemen we *nuldelers*.

  Voorbeeld: Als $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2 & -4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ en $C=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 6 & -3\end{bmatrix}$, dan zijn A, B en C nuldelers omdat $A\cdot B=O$ en $C\cdot A=O$ (Je kan nochtans ook narekenen dat $B\cdot A\neq O$ en $A\cdot C\neq O$).

f) Getransponeerde van een matrix

Definitie: De *getransponeerde matrix* A^T van een matrix A is de matrix die men bekomt door rijen en kolommen te verwisselen.

Voorbeeld: Als $A=\begin{bmatrix}-1 & 4 & -2\\ 3 & -6 & 5\end{bmatrix}$, dan is $A^T=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & -6\\ -2 & 5\end{bmatrix}$.

De getransponeerde matrix van een symmetrische matrix is de matrix zelf ($A^T=A$).

De getransponeerde matrix van een scheefsymmetrische matrix is zijn tegengestelde ($A^T=-A$).

Eigenschappen van het transponeren van matrices

Getransponeerde van een som:	$\forall A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}:(A+B)^T=A^T+B^T$
Getransponeerde van een scalair product:	$\forall A\in\mathbb{R}^{m\times n},\forall r\in\mathbb{R}:(r.A)^T=rA^T$
Getransponeerde van een product:	$\forall A\in\mathbb{R}^{m\times p},\forall B\in\mathbb{R}^{p\times n}:(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$

g) Macht van een matrix – speciale vierkante matrices

Macht van een matrix

Definitie: De macht van een vierkante matrix definiëren we als $\forall A\in\mathbb{R}^{m\times m},\forall n\in\mathbb{N}_0: A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n\ factoren}$.

Het is evident dat dit enkel zin heeft bij vierkante matrices.

Belangrijk om op te merken is dat heel veel merkwaardige producten die we kennen bij reële getallen niet meer gelden bij matrices, omdat het product niet commutatief is.

Zo zal bij wijze van voorbeeld $(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$ enkel gelden als en slechts als A en B commuterende matrices zijn. Wat wel geldt is uiteraard: $(A+B)\cdot(A-B)=A^2-A\cdot B+B\cdot A-B^2$.

Nilpotente matrices

Definitie: Een vierkante matrix $A\in\mathbb{R}^{m\times m}$ is een *nilpotente matrix met index* $n\Leftrightarrow A^n=O$ (en $A^{n-1}\neq 0$).

Voorbeeld: $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ is nilpotent met index 3, want $B^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ en $B^3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

Idempotente matrices

Definitie: Een vierkante matrix $A\in\mathbb{R}^{m\times m}$ is een *idempotente matrix* $\Leftrightarrow A^2=A$.

Voorbeeld: $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -2 & 3 & -2\\ -4 & 4 & -3\end{bmatrix}$ is een idempotente matrix, want $A^2=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -2 & 3 & -2\\ -4 & 4 & -3\end{bmatrix}=A$.

Involutorische matrices

Definitie: Een vierkante matrix $A\in\mathbb{R}^{m\times m}$ is een *involutorische matrix* $\Leftrightarrow A^2=I$.

Voorbeeld: $A=\begin{bmatrix}6 & -5\\ 7 & -6\end{bmatrix}$ is een involutorische matrix, want $A^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$.

h) De bewijsmethode door volledige inductie

Een zeer krachtige bewijstechniek die ook vaak gebruikt wordt bij matrices is het *bewijs door volledige inductie*. We illustreren dit met twee voorbeelden:

Voorbeeld 1: Bewijs dat geldt: $1+4+9+\ldots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Bewijs: ① Controle voor $n=1$: $1=\dfrac{1(1+1)(2.1+1)}{6}$ $\boxed{OK}$

② Stel nu dat het gestelde klopt voor n. We proberen hieruit af te leiden dat de stelling dan ook geldt voor $n+1$, dus dat geldt: $1+4+9+\ldots+(n+1)^2=\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

$$LL \quad =1+4+9+\ldots+(n+1)^2=1+4+9+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}=RL$$

③ De formule klopt voor $n=1$, dus wegens ② ook voor $n=2$, dan voor $n=3$, enz. □

Voorbeeld 2: Bewijs dat, als $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$, geldt dat $\forall n\in\mathbb{N}_0: A^n=2^n.\begin{bmatrix}1 & n/2\\0 & 1\end{bmatrix}$.

Bewijs: ① Controle voor $n=1$: $A^1=2^1.\begin{bmatrix}1 & 1/2\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$ $\boxed{OK}$

② Stel nu dat het gestelde klopt voor n. We proberen hieruit af te leiden dat de stelling dan ook geldt voor $n+1$, dus dat geldt: $A^{n+1}=2^{n+1}.\begin{bmatrix}1 & (n+1)/2\\0 & 1\end{bmatrix}$.

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=2^n.\begin{bmatrix}1 & n/2\\0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}=2^n.\begin{bmatrix}2 & 1+n\\0 & 2\end{bmatrix}=2^n.2.\begin{bmatrix}1 & (1+n)/2\\0 & 1\end{bmatrix}=RL \quad \square$$

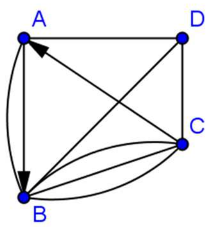
Opmerking: stap ③ is in elk bewijs met inductie hetzelfde en moet je dus niet altijd noteren.

3) Toepassingen op matrices

Zoals hierboven al meermaals ondervonden kunnen matrices rekenwerk vaak vereenvoudigen. We illustreren dit met drie aanvullende voorbeelden van realistische toepassingen.

a) Wegenmatrix

In Bulbapedia zijn er 4 gyms, die we voor de eenvoud met A, B, C en D noteren. De wegen tussen deze gyms onderling kunnen we schematisch als volgt voorstellen:



We noemen dit schema een *graaf*. Je leest er bijvoorbeeld af dat er twee wegen zijn tussen A en B waarvan één enkele richting, dat je op drie manieren van B naar C kan en omgekeerd, enzovoort. We kunnen deze gegevens ook noteren in matrix W.

$$\begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} & \\ W=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A\\ B\\ C\\ D \end{array}\ \text{naar} \end{array} \end{array}$$

Als we nu willen weten op hoeveel manieren we van bijvoorbeeld A naar C willen gaan met behulp van één tussenstap, dan tellen we volgende 4 elementen bij elkaar op:

- Van A naar A en dan van A naar C: 0x0 = 0 manieren
- Van A naar B en dan van B naar C: 2x3 = 6 manieren
- Van A naar C en dan van C naar C: 0x0 = 0 manieren
- Van A naar D en dan van D naar C: 1x1 = 1 manier

In totaal op 7 manieren.

Als je nu eens stil staat bij hoe deze som berekend is dan zie je dat je dit krijgt door de derde rij van W te vermenigvuldigen met de eerste kolom van W. Dit geldt voor alle mogelijke combinaties, dus kunnen we hieruit besluiten dat de matrix W^2 ons geeft op hoeveel manieren we van gym naar gym kunnen gaan met één tussenstap.

$$\begin{array}{c} \\ \\ W^2 = \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 3 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 12 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{array} \ \text{naar}$$

Zo kan je dus op de matrix W^2 hiernaast aflezen dat je op 7 manieren van A naar C kan met één tussenstap (tel deze manieren zeker eens na op de graaf).

Op dezelfde manier kan je beredeneren dat je bij W^3 kan aflezen op hoeveel manieren je met twee tussenstappen van de ene gym naar de andere gaat.

Wil je bijvoorbeeld weten op hoeveel manieren je met hoogstens twee tussenstappen van de ene gym naar de andere gaat dan kan dit met de matrix $W^3 + W^2 + W$.

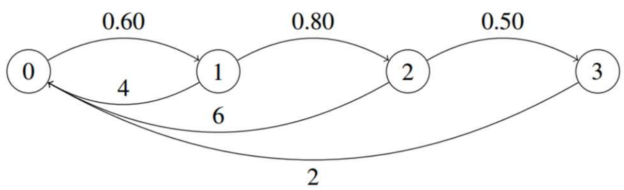
b) Populatiematrices (Lesliematrices)

Een bioloog ontdekt op een expeditie een exotische insectensoort.

Hij verdeelt de insecten in vier leeftijdscategorieën met gelijke tijdsintervallen van een jaar. Zijn onderzoek wijst uit dat de insecten vanaf het tweede levensjaar nakomelingen hebben. Elk insect uit deze leeftijdscategorie produceert gemiddeld vier nakomelingen. Dit stijgt in het derde levensjaar tot zes om in het laatste levensjaar te dalen tot twee.

Verder stelt hij vast dat veertig procent van de insecten het eerste jaar niet overleeft. Het tweede jaar zijn ze sterker en overleeft 80%. Slechts de helft hiervan bereikt de laatste leeftijdscategorie.

We kunnen de bevindingen van de bioloog in een graaf en in een matrix weergeven als volgt:



$$L = \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cccc} \text{⓪} & \text{①} & \text{②} & \text{③} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \text{⓪} \\ \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \end{array} \ \text{naar}$$

Deze soort matrices wordt ook wel eens Lesliematrices genoemd.

Stel dat de bioloog bij aanvang van het onderzoek observeerde dat er in elke leeftijdscategorie een aantal insecten waren die hij weergeeft in de populatiematrix P_0. Hoe ziet de populatie er dan volgend jaar uit?

$$P_0 = \left[\begin{array}{c} 100 \\ 150 \\ 125 \\ 120 \end{array}\right] \begin{array}{c} \text{⓪} \\ \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \end{array}$$

Om te weten hoeveel er in categorie ⓪ komen moet je de volgende berekening doen: Er komen 4x150 + 6x125 + 2x120 = 1590 nieuwe insecten bij. Dit vind je dus eigenlijk door de eerste rij van de matrix L te vermenigvuldigen met de (start) populatiematrix P_0.

Om te weten hoeveel er in categorie ① komen bereken je: 0,6x100=60. Dit vind je ook door de tweede rij van de Lesliematrix te vermenigvuldigen met P_0. Deze redenering blijft ook opgaan voor ② en ③.

Na één jaar is de populatie dus gelijk aan: $P_1 = L \cdot P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 125 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1590 \\ 60 \\ 120 \\ 62,5 \end{bmatrix}$.

Wil je de populatie na twee jaar kennen dan kan je $L \cdot P_1$ berekenen of rechtstreeks $L^2 \cdot P_0$.

Als je de situatie na 10 jaar bekijkt ($P_{10} = L^{10} \cdot P$) zal je merken dat deze insectenpopulatie een ware plaag wordt want er zijn dan al meer dan een kwart miljard van deze insecten.

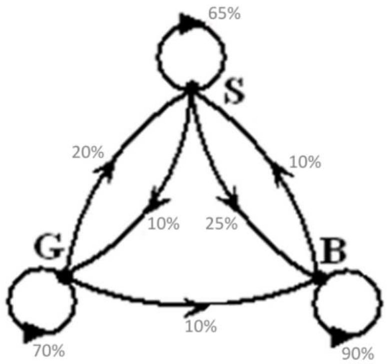
c) Overgangsmatrices

In een natuurreservaat zijn er drie types biotopen: struikgewas (S), grasweiden (G) en bos (B).

Elk jaar verschuift het aandeel van deze biotopen binnen het reservaat volgens het hiernaast staande schema.

Ook deze gegevens kunnen we noteren in een matrix:

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccc} S & G & B \end{array} \\ M = & \begin{bmatrix} 0,65 & 0,20 & 0,10 \\ 0,10 & 0,70 & 0 \\ 0,25 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ S \\ G \\ B \end{array} \quad \text{naar}$$



Je kan dit gerust beschouwen als een speciaal type Lesliematrix, met als opmerking dat er nu lussen zijn (er zijn populatiestukken die niet verschuiven). En verder is de som per kolom hier altijd 1 omdat er van het reservaat zelf niets verloren gaat.

Stel dat het reservaat van 400 ha vandaag bestaat uit 100 ha struikgewas, 75 ha grasweiden en 225 ha bos.

Na één jaar ziet het reservaat er dus zo uit: $R_1 = M \cdot R_0 = \begin{bmatrix} 0,65 & 0,20 & 0,10 \\ 0,10 & 0,70 & 0 \\ 0,25 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 75 \\ 225 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102,5 \\ 62,5 \\ 235 \end{bmatrix}$.

Merk op dat de totale grootte dus inderdaad niet verandert. We bekijken nu eens de situatie op lange termijn:

$$R_5 = M^5 \cdot R_0 \approx \begin{bmatrix} 99,8 \\ 40,76 \\ 259,40 \end{bmatrix},\ R_{10} = M^{10} \cdot R_0 \approx \begin{bmatrix} 97 \\ 34,03 \\ 268,97 \end{bmatrix},\ R_{100} = M^{100} \cdot R_0 \approx \begin{bmatrix} 96 \\ 32 \\ 272 \end{bmatrix}.$$

Ons vermoeden is dus dat er na verloop van tijd biologisch evenwicht optreedt. We kunnen zelfs bewijzen dat dit de enige mogelijkheid is voor biologisch evenwicht, want:

$$R_\infty = M.R_\infty \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0,65 & 0,20 & 0,10 \\ 0,10 & 0,70 & 0 \\ 0,25 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s \\ g \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ g \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,65s + 0,20g + 0,10b = s \\ 0,10s + 0,70g = g \\ 0,25s + 0,10g + 0,9b = b \\ (s + g + b = 400) \end{cases} \overset{\boxed{GRM}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} s = 96 \\ g = 32 \\ b = 272 \end{cases}.$$

De extra voorwaarde die we bij het stelsel hebben bijgevoegd is de totale grootte van het reservaat.

4) Stelsels van eerstegraadsvergelijkingen

a) Definities

Definitie: Een *stelsel* van m eerstegraadsvergelijkingen met n onbekenden is een verzameling vergelijkingen van de vorm:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots & +a_{mn}x_n & =b_m \end{cases}$$

Definitie: Een *oplossing* van zo 'n stelsel is een geordend n-tal $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dat voldoet aan alle vergelijkingen van dit stelsel.

Definitie: We noemen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, $X \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ en $A_b \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ respectievelijk de *coëfficiëntenmatrix*, de *constantenmatrix*, de *onbekendenmatrix* en de *uitgebreide coëfficiëntenmatrix* bij het stelsel:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \text{ en } A_b = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Gevolg: Merk op dat het stelsel dan kan geschreven worden in matrixnotatie: $A.X = B$.

Definitie: Als de constantenmatrix B een nulmatrix is noemen we het stelsel *homogeen*.

Definitie: Als er evenveel vergelijkingen als onbekenden zijn, is de coëfficiëntenmatrix A een vierkante matrix. We noemen dan ook het stelsel een *vierkant* stelsel.

Voorbeeld 1: $\begin{cases} 3x + y - 4z = 12 \\ 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$ is een vierkant stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden.

De enige oplossing is het drietal $(3,-1,-1)$. De oplossingsverzameling is: $V = \{(3,-1,-1)\}$.

Voorbeeld 2: $\begin{cases} x + y = 4 \\ -2x - 2y = 5 \end{cases}$ is een vierkant stelsel van orde 2.

Er zijn geen oplossingen: $V = \varnothing$.

Voorbeeld 3: $\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ x - y + 5z = 6 \end{cases}$ is een stelsel van twee vergelijkingen met drie onbekenden.

Er zijn oneindig veel oplossingen: $V = \{(2-k, -4+4k, k) \mid\mid k \in \mathbb{R}\}$.

b) Gelijkwaardige stelsels

Definitie: Twee stelsels zijn *gelijkwaardig (of equivalent)* als ze dezelfde oplossingenverzameling hebben.

Eigenschappen:

① Wissel je twee vergelijkingen in een stelsel van plaats dan bekom je een gelijkwaardig stelsel.

② Vermenigvuldig je in een vergelijking van een stelsel beide leden met eenzelfde van nul verschillend getal dan bekom je een gelijkwaardig stelsel.

③ Tel bij een vergelijking van een stelsel een veelvoud van een andere vergelijking op dan krijg je een gelijkwaardig stelsel.

Combineer je ② en ③ dan krijg je een eigenschap die ook gelijkwaardige stelsels oplevert:

❸ Vervang een vergelijking van een stelsel door de som van een van nul verschillend veelvoud van de vergelijking zelf met een veelvoud van een andere vergelijking.

Het bewijs van deze eigenschappen is triviaal!

c) Elementaire rij-operaties op matrices

Deze drie eigenschappen die gelden voor stelsels, kunnen we rechtstreeks overnemen op de uitgebreide coëfficiëntenmatrix van het stelsel. We noemen ze dan de *elementaire rij-operaties*.

① Rijen van de uitgebreide matrix mogen verwisseld worden.
Notatie : R_{ij} (de i-de en j-de rij worden verwisseld)

② Een rij van de uitgebreide matrix mag vermenigvuldigd worden met $k \in \mathbb{R}_0$.
Notatie : $k.R_i$ (de i-de rij wordt vermenigvuldigd met k)

③ Een rij van de uitgebreide matrix kan vervangen worden door een lineaire combinatie van zichzelf met een andere rij. De factor die bij de rij zelf hoort moet verschillend zijn van nul.
Notatie : $k.R_i + m.R_j$ (de i-de rij wordt vervangen door k maal zichzelf vermeerderd met m maal de j-de rij, met $k \in \mathbb{R}_0$ en $m \in \mathbb{R}$).

Als we, door rij-operaties uit te voeren, de coëfficiëntenmatrix kunnen omzetten naar de eenheidsmatrix (of een matrix die daar zo goed mogelijk op lijkt) wordt ons gelijkwaardig stelsel veel eenvoudiger. De oplossing is meestal gewoon af te lezen. We definiëren daartoe:

Definitie: We zeggen dat een matrix zich in zijn *rijgereduceerde echelonvorm* bevindt, als en slechts als:

- Elke volgende rij van de matrix begint met meer nullen dan de voorgaande rij.
- Alle nulrijen in de matrix staan onderaan (nulrijen zijn rijen die enkel uit nullen bestaan)
- In elke niet-nulrij is de leidende term een 1 (de leidende term van een rij is de meest linkse term verschillend van 0 in die rij).

Door elementaire rij-operaties uit te voeren kan elke matrix herleid worden tot zijn unieke rijgereduceerde echelonvorm. Deze vorm is voor elke matrix uniek. In het Engels heet dit *row reduced echelon form* (*rref* – vandaar dat het commando op je rekenmachine zo heet).

De methode van Gauss-Jordan (eerste vorm)

Om een matrix via elementaire rij-operaties te herleiden tot zijn *rijgereduceerde echelonvorm* gaan we zeer gestructureerd te werk. We zullen dit illustreren met enkele voorbeelden:

Voorbeeld 1: Los het stelsel op $\begin{cases} 2x-y+2z=6 \\ x-2y+4z=9 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$

$$A_b=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 9 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

stap 1: vertrek van de uitgebreide coëfficiëntenmatrix van het stelsel.

$$\overset{R_{12}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

stap 2: gebruik ① of ② om in de eerste rij in de eerste kolom een 1 te krijgen.

$$\underset{R_3-3R_1}{\overset{R_2-2R_1}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & -12 \\ 0 & 7 & -13 & -25 \end{array}\right]$$

Stap 3: gebruik ③ om van alle andere elementen in de eerste kolom 0 te maken.

$$\overset{\frac{1}{3}R_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 7 & -13 & -25 \end{array}\right]$$

Stap 4: gebruik ① of ② om in de tweede rij in de tweede kolom een 1 te krijgen.

$$\underset{R_3-7R_2}{\overset{R_1+2R_2}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Stap 5: gebruik ③ om van alle andere elementen in de tweede kolom 0 te maken.

$$\overset{R_2+2R_3}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Dit tweetal stappen blijf je nu herhalen zolang je er voor kan zorgen dat er op de i-de rij op de i-de kolom een 1 staat en overal anders in die kolom een 0.

Dit geeft ons het gelijkwaardig stelsel: $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$. De oplossingenverzameling is dus $V=\{(1,2,3)\}$.

Voorbeeld 2: Los het stelsel op $\begin{cases} 3x-7y+2z=-5 \\ -x+3y=5 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$

$$A_b=\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]\overset{R_{13}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & -7 & 2 & -5 \end{array}\right]\underset{R_3-3R_1}{\overset{R_2+R_1}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right]\underset{R_3+R_2}{\overset{R_1+2R_2}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

We krijgen nu het gelijkwaardige stelsel: $\begin{cases} x+3z=10 \\ y+z=5 \\ 0=0 \end{cases}$, of dus nog: $\begin{cases} x=10-3z \\ y=5-z \end{cases}$.

Dit stelsel heeft dus oneindig veel oplossingen. We noteren: $V=\{(10-3k, 5-k, k) \parallel k\in\mathbb{R}\}$.

Voorbeeld 3: Los het stelsel op $\begin{cases} x-3y-z=1 \\ -2x+5y+3z=-2 \\ 4x-11y-5z=3 \end{cases}$

$$A_b=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 3 & -2 \\ 4 & -11 & -5 & 3 \end{array}\right] \underset{R_3-4R_1}{\overset{R_2+2R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \overset{R_{23}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{R_3+R_2}{\overset{R_1+3R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

We krijgen nu het gelijkwaardige stelsel: $\begin{cases} x-4z=-2 \\ y-z=-1 \\ 0=-1 \end{cases}$. Dit kan uiteraard niet, dus $V=\varnothing$.

De spilmethode (tweede vorm van de methode van Gauss-Jordan)

Het zorgen voor de enen (stappen 2 en 4 in het eerste voorbeeld boven) kan met zich meebrengen dat er al heel snel met breuken zou moeten gewerkt worden. Dit kan eenvoudig vermeden worden. We illustreren ook hier met een voorbeeld:

Voorbeeld 4: Los het stelsel op $\begin{cases} 2x-y+3z=14 \\ 3x+2y+2z=10 \\ 5x+3y-z=4 \end{cases}$

$$A_b=\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -1 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 2 & 10 \\ 5 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right] \underset{2R_3-5R_1}{\overset{2R_2-3R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 14 \\ 0 & \boxed{7} & -5 & -22 \\ 0 & 11 & -17 & -62 \end{array}\right] \underset{7R_3-11R_2}{\overset{7R_1+R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 16 & 76 \\ 0 & 7 & -5 & -22 \\ 0 & 0 & -64 & -192 \end{array}\right] \underset{\frac{-R_3}{64}}{\overset{\frac{R_1}{2}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 8 & 38 \\ 0 & 7 & -5 & -22 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_2+5R_3}{\overset{R_1-8R_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{\frac{R_2}{7}}{\overset{\frac{R_1}{7}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$. We krijgen het gelijkwaardige stelsel: $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$.

De elementen die in het rood omkaderd staan aangeduid noemen we de spilelementen. De stappen in het paars hoef je niet te noteren, de spilmethode werkt altijd op die manier.

De oplossingenverzameling is dus $V=\{2,-1,3\}$.

d) Rang van een matrix – oplosbaarheid

Definitie: Het aantal niet-nulrijen van de rijgereduceerde echelonvorm van een matrix noemen we *de rang* van die matrix. We noteren de rang van matrix M met $rg(M)$.

We herbekijken nu even de voorbeelden (allemaal stelsel van $m=3$ vergelijkingen met $n=3$ onbekenden):

Voorbeelden 1 en 4: $rg\ A=rg\ A_b=n=3 \Rightarrow$ het stelsel heeft een unieke oplossing

Voorbeeld 2: $rg\ A=rg\ A_b=2, n=3 \Rightarrow$ het stelsel heeft oneindig veel oplossingen (één parameter)

Voorbeeld 3: $rg\ A=2, rg\ A_b=3 \Rightarrow$ het stelsel is strijdig

We leiden uit de voorbeelden dus deze drie eenvoudige eigenschappen af:

Stelling: Voor een stelsel met coëfficiëntenmatrix A en uitgebreide coëfficiëntenmatrix A_b met n onbekenden geldt

- $rg\ A = rg\ A_b = n \Rightarrow$ het stelsel heeft een unieke oplossing
- $rg\ A = rg\ A_b < n \Rightarrow$ het stelsel heeft oneindig veel oplossingen ($n - rg\ A$ vrijheidsgraden)
- $rg\ A < rg\ A_b \Rightarrow$ het stelsel is strijdig en heeft dus geen oplossingen.

e) Vraagstukken

Vraagstukken geven vaak aanleiding tot stelsels. We illustreren dit met een voorbeeldje:

Voorbeeld: Een groothandel in meststoffen heeft 3 soorten tuinmest A, B en C. Ze bevatten respectievelijk 5%, 10% en 20% stikstof. Er komt nu een bestelling van 1200kg mest dat een stikstofgehalte van 15% moet hebben. Men maakt hiervoor een mengeling van de voorradige meststoffen. Om logistieke redenen wil men van soort C driemaal zoveel gebruiken als van soort A. Hoeveel kg van elke soort moet men mengen?

We nemen als onbekenden a, b, c voor de hoeveelheden meststof per soort. De gegevens vertalen zich dan tot het stelsel:

$$\begin{cases} a+b+c=1200 \\ 0{,}05a+0{,}1b+0{,}2c=180 \\ c=3a \end{cases} \Rightarrow A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1200 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}2 & 180 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{rref}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 240 \\ 0 & 1 & 0 & 240 \\ 0 & 0 & 1 & 720 \end{array}\right]$$

Antwoord: Ze moeten van soorten A en B telkens 240 kg gebruiken en van soort C 720 kg.

f) Bespreken van stelsels met parameter(s)

Als er in de opgave van een stelsel parameters te vinden zijn dan hangt de oplosbaarheid van het stelsel uiteraard af van de waarde van die parameter. We bekijken enkele voorbeelden:

Voorbeeld 1: Bespreek het stelsel $\begin{cases} x+y+mz=1 \\ x+my+z=m \\ mx+y+z=m^2 \end{cases}$ naargelang de waarde van parameter $m \in \mathbb{R}$.

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & m^2 \end{array}\right] \underset{R_3-mR_1}{\overset{R_2-R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-1 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & m^2-m \end{array}\right] \underset{\substack{\frac{R_3}{1-m} \\ \boxed{m \neq 1}}}{\overset{\frac{R_2}{m-1}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+m & -m \end{array}\right]$$

$$\underset{R_3-R_2}{\overset{R_1-R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m+1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & m+2 & -m-1 \end{array}\right] \underset{\substack{(m+2)R_2+R_3 \\ \boxed{m \neq -2}}}{\overset{(m+2)R_1-(m+1)R_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} m+2 & 0 & 0 & (m+1)^2 \\ 0 & m+2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m+2 & -m-1 \end{array}\right]$$

We onderscheiden dus drie gevallen voor de oplossingenverzameling:

- $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$: bepaald stelsel $V = \left\{ \left(\frac{(m+1)^2}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{-m-1}{m+2} \right) \right\}$.
- $m = 1 \Rightarrow A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, dus onbepaald stelsel $V = \{(1-k-l, k, l) \,\|\, k, l \in \mathbb{R}\}$.

- $m=-2 \Rightarrow A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, dus vals stelsel $V=\varnothing$.

Voorbeeld 2: Bespreek $\begin{cases} x+ky=m \\ 2x+ly=1 \end{cases}$ naargelang de waarde van parameters $k,l,m \in \mathbb{R}$.

$$A_b = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & k & m \\ 2 & l & 1 \end{array}\right] \overset{R_2-2R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & k & m \\ 0 & l-2k & 1-2m \end{array}\right] \underset{\boxed{l-2k\neq 0}}{\overset{(l-2k)R_1-kR_2}{\sim}} \left[\begin{array}{cc|c} l-2k & 0 & lm-k \\ 0 & l-2k & 1-2m \end{array}\right]$$

We onderscheiden dus eerst en vooral al twee gevallen:

- $l \neq 2k$: bepaald stelsel: $V=\left\{\left(\dfrac{lm-k}{l-2k},\dfrac{1-2m}{l-2k}\right)\right\}$
- $l=2k \Rightarrow A_b = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & k & m \\ 0 & 0 & 1-2m \end{array}\right]$. Binnen dit geval moeten we dus nog onderscheid maken:
  - $m=\dfrac{1}{2} \Rightarrow A_b = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, dus onbepaald stelsel $V=\{(1/2-k.r,r) \,\|\, r\in\mathbb{R}\}$
  - $m\neq\dfrac{1}{2} \Rightarrow A_b \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, dus vals stelsel $V=\varnothing$.

5) Inverse matrices

Definitie: De inverse matrix A^{-1} van een vierkante matrix $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ is die matrix waarvoor geldt:

$$A.A^{-1}=A^{-1}.A=I_n .$$

Het is dus het symmetrische element van A t.o.v. de matrixvermenigvuldiging.

Voorbeeld: Als $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ dan is $A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -5 & 10 & -3 \\ -3 & 6{,}5 & -2 \end{bmatrix}$.

Merk op dat niet elke matrix een inverse heeft. Zo is het onmogelijk om voor $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$ een inverse te vinden. Probeer dit zelf maar eens.

Definitie: Matrices die een inverse hebben noemen we *inverteerbare* of *reguliere* matrices. Matrices die geen inverse hebben noemen we *niet-inverteerbaar* of *singulier.*

Berekening van een inverse matrix

Stelling: $\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}$: A is regulier $\Leftrightarrow$ de rijgereduceerde echelonvorm van A is de eenheidsmatrix

Bewijs: We bewijzen de stelling voor 3×3-matrices, maar het bewijs is eenvoudig uit te breiden.

Om de inverse $A^{-1}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$ van een matrix $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ te berekenen, kunnen we de matrixvergelijking $A.A^{-1}=I$ oplossen. Dit zou geven:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} = 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} = 0 \\ a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + a_{13}x_{32} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{32} = 1 \\ a_{31}x_{12} + a_{32}x_{22} + a_{33}x_{32} = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} a_{11}x_{13} + a_{12}x_{23} + a_{13}x_{33} = 0 \\ a_{21}x_{13} + a_{22}x_{23} + a_{23}x_{33} = 0 \\ a_{31}x_{13} + a_{32}x_{23} + a_{33}x_{33} = 1 \end{cases}$$

Deze drie stelsels hebben telkens dezelfde coëfficiëntenmatrix. We kunnen dus om ze alle drie tegelijk op te lossen de drie uitgebreide coëfficiëntenmatrices, die gegeven worden door:

$$A_{b_1} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right],\ A_{b_2} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right] \text{ en } A_{b_3} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{array}\right],$$

te bundelen tot één grote uitgebreide coëfficiëntenmatrix en dan deze matrix reduceren tot zijn rij-echelonvorm. We krijgen dan dus samengevat:

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{rref}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 1 & 0 & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & 1 & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{array}\right]$$

Dit kan enkel op voorwaarde dat de matrix A regulier is want anders moet het stelsel vals zijn. □

Voorbeeld: We herbekijken het voorbeeld uit de vorige paragraaf:

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R_3-5R_1}{\overset{R_2-2R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & -20 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{4R_3-13R_2}{\overset{2R_1+R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & -13 & 4 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_2-3R_3}{\overset{R_1+R_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 6 & -12 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -20 & 40 & -12 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & -13 & 4 \end{array}\right] \underset{-R_3/2}{\overset{R_1/2,\ R_2/4}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6{,}5 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -5 & 10 & -3 \\ -3 & 6{,}5 & -2 \end{bmatrix}$$

Eigenschappen

Eigenschap ①: De inverse van een reguliere matrix is uniek.

Bewijs: Stel dat A twee inversen zou hebben: M_1 en M_2. Den geldt per definitie dat:

$A.M_1 = M_1.A = I$ en $A.M_2 = M_2.A = I$, zodat

$$M_2 = I \cdot M_2 = (M_1 \cdot A) \cdot M_2 = M_1 \cdot (A \cdot M_2) = M_1 \cdot I = M_1. \ \square$$

Eigenschap ②: Een eenheidsmatrix is zijn eigen inverse.

Bewijs: $I \cdot I = I$ □

Eigenschap ③: Als je een reguliere matrix tweemaal inverteert krijg je weer de matrix zelf.

Bewijs: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$ (de definitie is perfect symmetrische voor A en A^{-1}). □

Eigenschap ④: Als $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ reguliere matrices zijn, dan geldt: $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

Bewijs: $(A\cdot B)\cdot(B^{-1}\cdot A^{-1})=A\cdot(B\cdot B^{-1})\cdot A^{-1}=A\cdot I\cdot A^{-1}=A\cdot A^{-1}=I$ en

$$(B^{-1}\cdot A^{-1})\cdot(A\cdot B)=B^{-1}\cdot(A^{-1}\cdot A)\cdot B=B^{-1}\cdot I\cdot B=B^{-1}\cdot B=I.\ \square$$

Eigenschap ⑤: Als $A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$, en A is regulier dan geldt: $A\cdot B=A\cdot C\Leftrightarrow B=C$

Bewijs: Dat "$\Leftarrow$" geldt is wel duidelijk (en daarvoor hoeft A zelfs niet regulier te zijn).

"$\Rightarrow$": dit kan bewezen worden door beide leden links te vermenigvuldigen met A^{-1}, dus

$$\begin{aligned}A\cdot B=A\cdot C\quad&\Rightarrow A^{-1}\cdot(A\cdot B)=A^{-1}\cdot(A\cdot C)\Rightarrow(A^{-1}\cdot A)\cdot B=(A^{-1}\cdot A)\cdot C\\&\Rightarrow I\cdot B=I\cdot C\Rightarrow B=C\ \square\end{aligned}$$

Oplossen van een stelsel van Cramer

Definitie: Een *Stelsel van Cramer* is een stelsel van n lineaire vergelijkingen in n onbekenden waarvan de coëfficiëntenmatrix regulier is. Dan geldt dus:

$$A\cdot X=B\ \Leftrightarrow\ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}B\ \Leftrightarrow\ I\cdot X=A^{-1}B\ \Leftrightarrow\ X=A^{-1}B.$$

Voorbeeld: Los het stelsel van Cramer op $\begin{cases}x-2y+4z=1\\2x+2z=2\\5x+3y=-3\end{cases}$.

De coëfficiëntenmatrix $A=\begin{bmatrix}1&-2&4\\2&0&2\\5&3&0\end{bmatrix}$ heeft als inverse matrix $A^{-1}=\begin{bmatrix}3&-6&2\\-5&10&-3\\-3&6,5&-2\end{bmatrix}$. Er geldt

$$\begin{bmatrix}1&-2&4\\2&0&2\\5&3&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-6&2\\-5&10&-3\\-3&6,5&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-15\\24\\16\end{bmatrix}$$. Dus $V=\{(-15,24,16)\}$.

6) Determinanten

a) Definities

2x2 determinanten

Stelling: Een 2×2-matrix $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ is regulier als en slechts als $ad-bc\neq 0$.

Bewijs: M is regulier als en slechts als zijn rijgereduceerde echelonvorm de eenheidsmatrix is.

Eén van de elementen a of c moet dus sowieso verschillend zijn van 0. Stel zonder de algemeenheid te schaden dat $a\neq 0$ (anders wissel je in de eerste stap de twee rijen om). Dan kunnen we schrijven:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{a} & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{ad-bc} & -c & a \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} a(ad-bc) & 0 & ad & -ab \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{array}\right]$$

We kunnen de matrix M dus slechts via elementaire rijoperaties tot de eenheidsmatrix als en slechts als $ad-bc\neq 0$, waarmee het gestelde bewezen is. □

Gevolg: Als $ad-bc\neq 0$, dan is de inverse van matrix M gelijk aan $M^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\cdot\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Definitie: We noemen $ad-bc$ de *determinant* van de matrix $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Notatie: We noteren dit symbolisch als $\det M=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$.

3x3 determinanten

Stelling: Matrix $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ is regulier

$$\Leftrightarrow a_{11}a_{22}a_{33}-a_{33}a_{12}a_{21}-a_{13}a_{31}a_{22}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{23}a_{12}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\neq 0.$$

Bewijs: Mocht de hele eerste kolom van A nul zijn dan is A zeker singulier. We gaan er zonder de algemeenheid te schaden van uit dat $a_{11}\neq 0$ (anders wissel je in de eerste stap rijen om).

$$A=\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \boxed{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21} \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

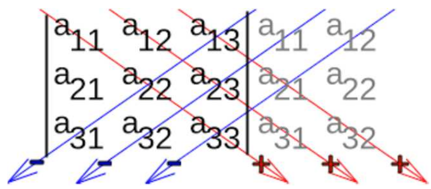
$$\begin{aligned} * &= \left(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}\right)\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right)-\left(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}\right)\left(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}\right) \\ &= a_{11}^2a_{22}a_{33}-a_{11}a_{33}a_{12}a_{21}-a_{13}a_{31}a_{11}a_{22}\cancel{+a_{13}a_{31}a_{12}a_{21}}-a_{11}^2a_{23}a_{32}+a_{11}a_{23}a_{12}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{11}a_{32}\cancel{-a_{13}a_{21}a_{12}a_{31}} \\ &= a_{11}\left(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{33}a_{12}a_{21}-a_{13}a_{31}a_{22}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{23}a_{12}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\right) \end{aligned}$$

In de tweede stap spillen met het element $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. Mocht dit element nul zijn dan kan je rij 2 en rij 3 wisselen en spillen met het element $a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}$. Ze kunnen nooit allebei 0 zijn want ook dan is de matrix sowieso singulier. De uitdrukking $*$ wisselt dan van teken, maar het al dan niet nul zijn wijzigt niet. De matrix M is dus regulier als en slechts als $*\neq 0$, waaruit het gestelde onmiddellijk volgt omdat $a_{11}\neq 0$. □

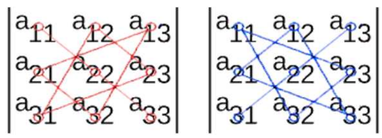
Definitie: $\det A = |A| = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$.

Er zijn twee geheugensteuntjes om deze formule te onthouden:

De *regel van Sarrus*:
schrijf achter de determinant nogmaals de eerste en de tweede kolom. Evenwijdig aan de hoofddiagonaal vind je dan de producten met een positief teken (+) en evenwijdig met de nevendiagonaal die met een negatief teken (-).



De *regel van de driehoeken*:
Op de linkerfiguur staan de producten met een positief teken in rood aangeduid (+), op de rechterfiguur staan de producten met een negatief teken in blauw aangeduid (-).



Voorbeeld:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \\ -5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2.(-2).2+3.4.(-5)+(-1).5.(-3)-(-1).(-2).(-5)-2.4.(-3)-3.5.2=-49$$

Determinanten van hogere orde

Om determinanten uit te breiden tot hogere dimensies hebben we twee belangrijke begrippen nodig:

Definitie: De *minor* m_{ij} van een element a_{ij} van een vierkante matrix A is de determinant van wat overblijft als we de i-de rij en de j-de kolom in die matrix schrappen.

Definitie: De *cofactor* A_{ij} van een element a_{ij} van een vierkante matrix A is het product van de minor m_{ij} van dat element met het getal $(-1)^{i+j}$.

Voorbeeld: Is $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \\ -5 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, dan is $A_{23}=(-1)^{2+3}m_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 & \cancel{-1} \\ \cancel{5} & \cancel{-2} & \cancel{4} \\ -5 & -3 & \cancel{2} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}=-9$.

Stelling: De som van de producten van alle elementen uit een rij of een kolom van een matrix met hun cofactor is onafhankelijk van de gekozen rij of kolom.

Bewijs: Een algemeen bewijs van deze stelling valt buiten het bestek van deze cursus. We bewijzen de stelling voor de tweede rij en de derde kolom van een 3×3-matrix.

Stel $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. We *ontwikkelen* de matrix naar zijn tweede rij en zijn derde kolom:

- Tweede rij: $a_{21}.A_{21} + a_{22}.A_{22} + a_{23}.A_{23}$

$$\begin{aligned}
&= -a_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= -a_{21}\cdot(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}\cdot(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}\cdot(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \\
&= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \; (= \det A)
\end{aligned}$$

- Derde kolom: $a_{13}.A_{13} + a_{23}.A_{23} + a_{33}.A_{33}$

$$\begin{aligned}
&= a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&= a_{13}.(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - a_{23}.(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + a_{33}.(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\
&= a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} \; (= \det A)
\end{aligned}$$

Je kan analoog narekenen dat dit ook voor de andere rijen en kolommen geldt. □

Definitie: Het getal dat we uitkomen door een matrix te *ontwikkelen* naar een van zijn rijen of kolommen noemen we de determinant van die matrix.

We proberen dit nu in formulevorm te noteren (dit wordt ook wel eens de methode van Laplace genoemd):

Definitie: Zij gegeven een matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, met $n \geq 2$ dan gelden de formules $\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$:

- $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik}$, dit noemen we de ontwikkeling naar de i-de rij.
- $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj}$, dit noemen we de ontwikkeling naar de j-de kolom.

In praktijk kies je bij het ontwikkelen voor die rij of kolom van de matrix met de meeste nullen.

Voorbeeld: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 3 & 7 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -2 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -2.(-111) - 3.65 = 27$,

want $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 42 - 18 - 49 = -111$ en $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 6 + 168 - 90 - 16 + 7 = 65$.

b) Eigenschappen van determinanten

We bekijken nu enkele eigenschappen van determinanten van vierkante matrices. De algemene bewijzen vallen buiten het bewijs van deze cursus. Bij wijze van oefening kunnen jullie deze eigenschappen wel illustreren voor lage ordes (2×2 of 3×3).

De determinant van een getransponeerde matrix

Eigenschap: De determinant van een vierkante matrix is gelijk aan de determinant van zijn getransponeerde matrix. In symbolen wordt dit: $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det A^T = \det A$

Rijen of kolommen verwisselen

Eigenschap: Als we twee rijen of kolommen van een vierkante matrix verwisselen, dan verandert de determinant van teken.

Gevolg: De determinant van een vierkante matrix met twee gelijke rijen of kolommen is nul.

Gevolg: De som van de producten van alle elementen uit een rij (of kolom) van een matrix met de cofactoren van een andere rij (of kolom) is nul.

Combineren we dit laatste gevolg met de definitie van determinanten dan krijgen we de zogenaamde formules van Kronecker:

Zij gegeven een matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, met $n \geq 2$ dan gelden de volgende formules ($\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$:

- $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{jk} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \det A & (i = j) \end{cases}$
- $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}.A_{kj} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \det A & (i = j) \end{cases}$

Lineaire combinaties van rijen en kolommen

Eigenschap: Als in een matrix alle elementen van een rij of kolom vermenigvuldigd worden met eenzelfde getal dan wordt ook de determinant met dit getal vermenigvuldigd.

Gevolg: De determinant van een matrix waar twee rijen of kolommen evenredig zijn is nul.

Eigenschap: Als we bij een rij of kolom van een vierkante matrix een veelvoud van een andere rij of kolom optellen, dan blijft de determinant onveranderd.

Product van matrices

Eigenschap: de determinant van het product van twee vierkante matrices is gelijk aan het product van de determinanten van deze matrices.

Als voorbeeld een bewijsje voor 2×2-matrices: $\forall M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \det(M_1 \cdot M_2) = \det M_1 \,.\det M_2$

Bewijs: Stel $M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ en $M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$, dan is $M_1 \cdot M_2 = \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} &\det(M_1 \cdot M_2) = (a_1a_2 + b_1c_2).(c_1b_2 + d_1d_2) - (a_1b_2 + b_1d_2).(c_1a_2 + d_1c_2) \\ &= \cancel{a_1a_2c_1b_2} + a_1a_2d_1d_2 + b_1c_2c_1b_2 + \cancel{b_1c_2d_1d_2} - \cancel{a_1b_2c_1a_2} - a_1b_2d_1c_2 - b_1d_2c_1a_2 - \cancel{b_1d_2d_1c_2} \\ &= a_1d_1a_2d_2 + b_1c_1b_2c_2 - a_1d_1b_2c_2 - b_1c_1a_2d_2 = (a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2) = \det M_1.\det M_2 \quad \square \end{aligned}$$

Optelregel

Eigenschap: Als twee vierkante matrices op één rij (of kolom) na gelijk zijn dan is de som van hun determinanten gelijk aan de determinant van de matrix die je bekomt door de gelijke rijen (of kolommen) te behouden en de verschillende rijen (of kolommen) bij elkaar op te tellen.

Voorbeeld: $\begin{vmatrix} a & b & c+j \\ d & e & f+k \\ g & h & i+l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}$

Determinanten verlagen van orde

Al deze voorgaande eigenschappen kan je gebruiken om determinanten makkelijker te berekenen door ervoor te zorgen dat je rijen of kolommen krijgt met veel nullen.

Voorbeeld 1: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & -2 \end{vmatrix} \underset{K_3-6K_1}{\overset{K_2+2K_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 13 & -25 \\ 3 & 13 & -20 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 13 & -25 \\ 13 & -20 \end{vmatrix} \overset{R_2-R_1}{=} \begin{vmatrix} 13 & -25 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 13.5 = 65$

Voorbeeld 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & -5 & 4 \\ -3 & -8 & 5 & -4 \\ 2 & 8 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2-R_1 \\ R_3+3R_1}}{\underset{R_4-2R_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \overset{R_2-2R_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -(-7)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 56$$

Zeker bij dit tweede voorbeeld is duidelijk waarom deze werkwijze het *verlagen van de orde* heet.

c) De inverse matrix herbekeken

De adjunctmatrix

Definitie: De *adjunctmatrix* (of *geadjugeerde matrix*) van een vierkante matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is de getransponeerde van de $n \times n$-matrix die je krijgt door elk element van A te vervangen door zijn cofactor.

Notatie: We noteren de adjunctmatrix met $\operatorname{adj} A$. Er geldt dus: $\operatorname{adj} A = \left[A_{ij}\right]^T = \left[A_{ji}\right]$.

Stelling: $A \cdot (\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A) \cdot A = (\det A) \, . \, I$

Bewijs: Dit volgt onmiddellijk uit de formules van Kronecker:

$$A \cdot (\operatorname{adj} A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix} = (\det A) \, . \, I$$

Analoog bewijs je ook dat $(\operatorname{adj} A) \cdot A = (\det A) \, . \, I$ □

Gevolg: is $\det A \neq 0$, dan is A regulier en geldt $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A$.

De twee stellingen die we bewezen voor 2×2- en 3×3-matrices in de inleiding gelden dus ook algemeen:

Gevolg:

- $\forall M \in \mathbb{R}^{n\times n}: \det M \neq 0 \;\Leftrightarrow\; M$ is regulier.
- $\forall M \in \mathbb{R}^{n\times n}: \det M = 0 \;\Leftrightarrow\; M$ is singulier.

d) Stelsels van Cramer

Definitie: Een *stelsel van Cramer* is een vierkant stelsel (evenveel vergelijkingen als onbekenden) waarvan de coëfficiëntenmatrix regulier is.

Met behulp van het voorgaande kunnen we voor stelsels met een reguliere coëfficiëntenmatrix schrijven dat:

$$A \cdot X = B \;\Leftrightarrow\; X = A^{-1} \cdot B \;\Leftrightarrow\; X = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} \cdot B$$

We bekijken dit eens specifieker voor een stelsel met $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ en $\det A \neq 0$.

Noteren we met A_1 de matrix die je bekomt door de eerste kolom te vervangen door de kolom der constante termen, A_2 de matrix die je bekomt door de tweede kolom te vervangen door de kolom der constante termen en A_3 de matrix die je bekomt door de derde kolom te vervangen door de kolom der constante termen, dan geldt het volgende:

Stelling: Is $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ regulier dan geldt $A \cdot X = B \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\det A_1}{\det A},\ y = \dfrac{\det A_2}{\det A},\ z = \dfrac{\det A_3}{\det A}$.

Bewijs: Dit volgt onmiddellijk uit de formule van Laplace om een determinant te berekenen:

$$X = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} \cdot B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot b_1 - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot b_2 + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot b_3 \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot b_1 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot b_2 - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot b_3 \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot b_1 - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot b_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \qquad \square$$

Voorbeeld: Los op $\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$, dan is $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 13 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{28}{14} = 2$ en $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-42}{14} = -3$.

Bespreken van stelsels met de methode van Cramer

We hernemen het voorbeeld uit onze eerste bespreking: $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = m \\ mx + y + z = m^2 \end{cases}$, met $m \in \mathbb{R}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = m + m + m - m^3 - 1 - 1 = -m^3 + 3m - 2 \overset{\boxed{Horner}}{=} -(m-1)^2(m+2)$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m & 1 \\ m^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m + m^2 + m^2 - m^4 - m - 1 = -m^4 + 2m^2 - 1 \overset{\boxed{Horner}}{=} -(m-1)^2(m+1)^2$$

$$\det A_2=\begin{vmatrix}1&1&m\\1&m&1\\m&m^2&1\end{vmatrix}=m+m^3+m-m^3-m^2-1=-m^2+2m-1\overset{\boxed{Horner}}{=}-(m-1)^2$$

$$\det A_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&m&m\\m&1&m^2\end{vmatrix}=m^3+m^2+1-m^2-m^2-m=m^3-m^2-m+1\overset{\boxed{Horner}}{=}(m-1)^2(m+1)$$

- In het geval $m\in\mathbb{R}\setminus\{1,-2\}$ geven de formules van Cramer ons de oplossing:

  $$x=\frac{-\cancel{(m-1)^2}(m+1)^2}{-\cancel{(m-1)^2}(m+2)},\ y=\frac{-\cancel{(m-1)^2}}{-\cancel{(m-1)^2}(m+2)},\ z=\frac{\cancel{(m-1)^2}(m+1)}{-\cancel{(m-1)^2}(m+2)}$$

  Dus dan is $V=\left\{\left(\frac{(m+1)^2}{m+2},\frac{1}{m+2},\frac{-m-1}{m+2}\right)\right\}$.

  De twee speciale waarden van m moeten besproken worden met de spilmethode:

- $m=1\Rightarrow A_b\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right]\sim\ldots\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$, dus $V=\{(1-k-l,k,l)\,\|\,k,l\in\mathbb{R}\}$.

- $m=-2\Rightarrow A_b\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&1\\1&-2&1&-2\\-2&1&1&4\end{array}\right]\sim\ldots\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-1&1\\0&0&0&1\end{array}\right]$, dus $V=\varnothing$.

Een opmerking over de rang van een matrix

Eerder in deze cursus zagen we de volgende definitie: *de rang* van een matrix is het aantal niet-nulrijen van de rijgereduceerde echelonvorm van die matrix.

We leerden dat een $m\times n$-stelsel $A\cdot X=B$ een unieke oplossing had als en slechts als $rg\ A_b=rg\ A=n$. De methode van Cramer leert ons nu dat bij vierkante stelsels het volgende geldt:

Het $n\times n$ stelsel $A\cdot X=B$ heeft een unieke oplossing als en slechts als $\det A\neq 0$.

Combineren we deze twee stellingen dan krijgen we: $\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}: rg\ A=n\Leftrightarrow \det A\neq 0$.

De definitie van de rang van een matrix kunnen we nu dan ook anders formuleren als volgt:

Definitie: Een $m\times n$-matrix heeft *rang* r als en slechts als elke vierkante deelmatrix van orde groter dan $r\times r$ determinant nul heeft en er een vierkante deelmatrix van orde $r\times r$ bestaat met determinant verschillend van nul.

(**Definitie:** Een *deelmatrix* is een matrix die ontstaat door evenveel rijen als kolommen te schrappen.)

Voorbeeld: De rang van $\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$ is 2, want $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=0$, maar $\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}=-3\neq 0$.

e) Homogene 2x3 stelsels

In de wiskunde worden we regelmatig geconfronteerd met homogene 2×3 -stelsels.

Stelling: Als de rang van de coëfficiëntenmatrix van het homogene 2×3 -stelsel $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$ gelijk is aan 2, dan is de oplossingenverzameling $V = \left\{ \lambda \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, -\lambda . \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \,\|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Bewijs: De rang van $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ is 2. Zonder de algemeenheid te schaden stellen we dat $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

We herschrijven het gegeven stelsel als stelsel van Cramer (met onbekenden x en y): $\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1z \\ a_2x + b_2y = -c_2z \end{cases}$.

Dit oplossen geeft $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \cdot z$ en $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1z \\ a_2 & -c_2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = -\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \cdot z$.

Stel je hierbij dan $\lambda = \dfrac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$, dan wordt $x = \lambda \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $y = -\lambda . \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ en $z = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. □

Dit zal handig zijn in onder andere ruimtemeetkunde (op deze manier bereken je een richtingsvector van de snijlijn van twee snijdende vlakken).

f) Eliminatie

Het elimineren van n onbekenden uit n+1 eerstegraadsvergelijkingen

Stelling: Als de rang van de coëfficiëntenmatrix van het 3×2 -stelsel $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{cases}$ gelijk is aan 2 dan is dit stelsel bepaald als en slechts als de uitgebreide coëfficiëntenmatrix singulier is.

Bewijs: De rang van de coëfficiëntenmatrix is 2, dus stel zonder de algemeenheid te schaden $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Met behulp van Cramer vinden we dat $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \overset{\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0}}{\Leftrightarrow} x = \dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \wedge y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$.

Opdat dit ook aan de derde vergelijking zou voldoen moet dus gelden dat:

$$a_3 \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} + b_3 \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = c_3 \quad \Leftrightarrow a_3 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} - c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \square$$

Opmerking 1: Je kan dit stelsel in dat geval interpreteren als de vergelijkingen van drie concurrente rechten (drie rechten die door één punt gaan). Als de rang van de coëfficiëntenmatrix 1 zou zijn dan zouden de rechten allemaal evenwijdig zijn (of stellen het zelfs geen rechten voor in het geval dat $a_i = b_i = 0$).

Definitie: We noemen de voorwaarde $\det(A_b) = 0$ ook weleens de *coëxistentievoorwaarde* van dat stelsel. Omdat in deze voorwaarde geen sprake meer is van de onbekenden x en y zeggen we ook dat we deze onbekenden *geëlimineerd* hebben.

Definitie: We noemen de determinant $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ de *eliminant* van het gegeven stelsel.

Wat we hier gedaan hebben voor 3×2 stelsels kan eenvoudig veralgemeend worden:

Een $(n+1) \times n$-stelsel heeft een unieke oplossing als en slechts als de determinant van de uitgebreide coëfficiëntenmatrix nul is, en de rang van de coëfficiëntenmatrix gelijk is aan n (dan geldt inderdaad zoals we vroeger zagen dat $rg\ A_b = rg\ A = n$).

Het elimineren van n onbekenden uit n homogene eerstegraadsvergelijkingen

Stelling: Als voor een homogeen $n \times n$-stelsel van de vorm $A \cdot X = O$ geldt dat $\det A \neq 0$ dan heeft het stelsel één unieke oplossing, namelijk de nuloplossing.

Bewijs: Dit volgt onmiddellijk uit de formules van Cramer. $\square$

Een homogeen $n \times n$-stelsel van de vorm $A \cdot X = O$ zal dus nog andere oplossingen (naast de nuloplossing) hebben als en slechts als $\det A = 0$. We zagen inderdaad eerder dat een $m \times n$-stelsel onbepaald zal zijn als en slechts als $rg\ A = rg\ A_b < n$.

Toepassing: Wanneer zijn de punten $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ en $P_3(x_3, y_3)$ collineair?

Dit zal het geval zijn als en slechts als er een rechte $r \leftrightarrow ax + by + c = 0$ (met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en niet alle gelijk aan nul) bestaat waar de drie punten P_1, P_2 en P_3 op liggen, dus als en slechts als:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases} \text{ heeft een oplossing verschillend van de nuloplossing} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$