Determinanten

Definities en eigenschappen

Definities (korte herhaling)

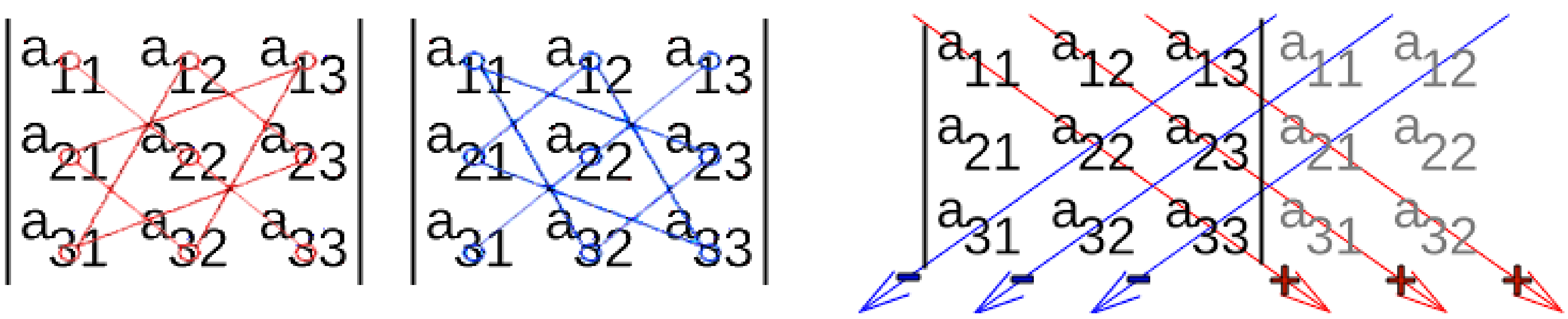
Determinant van een 2x2-matrix:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Definities (korte herhaling)

Determinant van een 3x3-matrix:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$



Definities (korte herhaling)

Determinant van hogere orde:

Gebruik de regel van Laplace

$\rightarrow$ ontwikkelen naar een rij of kolom

Nood aan twee nieuwe begrippen:

- minor
- cofactor

Definities (korte herhaling)

<u>Minor</u>

De minor m_{ij} van een element a_{ij} van een vierkante matrix A is de determinant van wat overblijft als we de i-de rij en de j-de kolom van die matrix schrappen.

Definities (korte herhaling)

<u>Cofactor</u>

De cofactor A_{ij} van een element a_{ij} van een vierkante matrix A is de determinant van wat overblijft als we de i-de rij en de j-de kolom van die matrix schrappen (dus de minor) vermenigvuldigd met de factor $(-1)^{i+j}$.

Definities (korte herhaling)

Determinant van een $n \times n$-matrix ($n \geq 2$):

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} . A_{ik}$$ (ontwikkeling naar de i-de rij)

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} . A_{kj}$$ (ontwikkeling naar de j-de kolom)

Eigenschappen

Determinant van een getransponeerde matrix:

$$\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A^T = \det A$$

Eigenschappen

Determinant van een getransponeerde matrix:

Bewijs (voor een 3x3-matrix):

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

$$\det A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{array}$$

Eigenschappen

Als we twee rijen of kolommen van een vierkante matrix verwisselen, dan verandert de determinant van teken.

Eigenschappen

Bewijs (voor kolom 1 en 2 van een 3x3-matrix):

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{matrix}$$

$$\det A' = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} \\ -a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{22}a_{33} \end{matrix}$$

Eigenschappen

Onmiddellijk gevolg: De determinant van een matrix met twee gelijke rijen (of kolommen) is nul.

Eigenschappen

Gevolg: De determinant van een matrix met twee gelijke rijen (of kolommen) is nul.

Bewijs: stel dat matrix A twee gelijke rijen of kolommen heeft en dat matrix A’ de matrix is die we krijgen door die twee rijen of kolommen van plaats te wisselen. Dan geldt dus:

$$\det A = -\det A' = -\det A \Rightarrow \det A = 0$$

Eigenschappen

Gevolg: de som van de producten van alle elementen uit een rij (of kolom) van een matrix met de cofactoren van een andere rij (of kolom) is nul.

Eigenschappen

Bewijs (voor de elementen van kolom 1 en de cofactoren kolom 3 een 3x3-matrix):

$$a_{11}.A_{13} + a_{21}.A_{23} + a_{31}.A_{33}$$

$$= a_{11}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{21}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{31}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

Eigenschappen

De formules van Kronecker:

(uit de vorige eigenschap en de definitie van determinant volgen onmiddellijk deze twee formules:)

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{jk} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \det A & (i = j) \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}.A_{kj} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \det A & (i = j) \end{cases}$$

Eigenschappen

Als in een determinant een rij of een kolom met een constante wordt vermenigvuldigd, dan wordt ook de determinant met dat getal vermenigvuldigd.

Eigenschappen

Bewijs: stel dat in de eerste rij van matrix A alle elementen met c worden vermenigvuldigd, en je zo matrix B krijgt.

Dan geldt voor de determinant van B:

$$\det B = \sum_{k=1}^{n} b_{1k}.B_{1k} = \sum_{k=1}^{n} c.a_{1k}.A_{1k} = c.\sum_{k=1}^{n} a_{1k}.A_{1k} = c.\det A$$

Het bewijs verloopt analoog voor andere rijen of kolommen (ontwikkel dan naar die rij of kolom).

Eigenschappen

Gevolg: De determinant van een matrix waar twee rijen of kolommen evenredig zijn is nul.

Bewijs: Zet de evenredigheidsfactor voorop. Je krijgt dan een determinant waarvan twee rijen of kolommen gelijk zijn. Die is gelijk aan nul.

Eigenschappen

Als twee vierkante matrices op één rij (of kolom) na gelijk zijn dan is de som van hun determinanten gelijk aan de determinant van de matrix die je bekomt door de gelijke rijen (of kolommen) te behouden en de verschillende rijen (of kolommen) bij elkaar op te tellen.

We noemen deze eigenschap de optelregel.

Eigenschappen

Bewijs (voor 2 × 2-matrices):

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & a_{12} \\ x_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x_{11} & b_{12} \\ x_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} x_{11} & a_{12} + b_{12} \\ x_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Dan geldt dus:

$$\det A = \begin{vmatrix} x_{11} & a_{12} \\ x_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = x_{11} a_{22} - x_{21} a_{12}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} x_{11} & b_{12} \\ x_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = x_{11} b_{22} - x_{21} b_{12}$$

Eigenschappen

… en:

$$\det C = \begin{vmatrix} x_{11} & a_{12} + b_{12} \\ x_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = x_{11}\left(a_{22} + b_{22}\right) - x_{21}\left(a_{12} + b_{12}\right)$$

$$= x_{11}a_{22} - x_{21}a_{12} + x_{11}b_{22} - x_{21}b_{12} = \det A + \det B$$

Eigenschappen

Als we bij een rij of kolom van een vierkante matrix een veelvoud van een andere rij of kolom optellen, dan blijft de determinant onveranderd.

Eigenschappen

Als we bij een rij of kolom van een vierkante matrix een veelvoud van een andere rij of kolom optellen, dan blijft de determinant onveranderd.

Bewijs: Gebruik de vorige stelling waarbij je splitst in de oorspronkelijke determinant en een determinant waarvan een rij of kolom evenredig is met een andere rij of kolom.

Eigenschappen

De determinant van het product van twee vierkante matrices van gelijke orde is gelijk aan het product van hun determinanten.

$$\forall M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det\left(M_1 \cdot M_2\right) = \det M_1 \, . \det M_2$$

Eigenschappen

Bewijs (voor 2 × 2-matrices): stel

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \text{ en } M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

Dan is:

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix}$$

Eigenschappen

$$\det\left(M_1 \cdot M_2\right)$$

$$=\left(a_1a_2+b_1c_2\right).\left(c_1b_2+d_1d_2\right)-\left(a_1b_2+b_1d_2\right).\left(c_1a_2+d_1c_2\right)$$

$$=\cancel{a_1a_2c_1b_2}+a_1a_2d_1d_2+b_1c_2c_1b_2+\cancel{b_1c_2d_1d_2}$$

$$-\cancel{a_1b_2c_1a_2}-a_1b_2d_1c_2-b_1d_2c_1a_2-\cancel{b_1d_2d_1c_2}$$

$$=a_1d_1a_2d_2+b_1c_1b_2c_2-a_1d_1b_2c_2-b_1c_1a_2d_2$$

$$=\left(a_1d_1-b_1c_1\right)\left(a_2d_2-b_2c_2\right)=\det M_1.\det M_2$$