



## Uitdagingsoefeningen voor het vak wiskunde

### Veeltermfuncties

1. ★★★ Bepaal de gehele getallen  $a$  en  $b$  zodanig dat de veeltermen  $A(x) = x^3 + ax^2 - 14x + 12$  en  $B(x) = x^3 + bx^2 + 10x - 24$  beiden deelbaar zijn door dezelfde tweedegraadsveelterm met coëfficiënt van  $x^2$  gelijk aan 1. (Bron: *ingangsexamen polytechnische wetenschappen KMS*)
2. ★★★★★ Suske en Wiske komen terug van een wiskundeles bij Professor Barabas. Als huiswerk moeten ze een veelterm ontbinden in factoren. Suske is de opgave vergeten op te schrijven en hij weet zelfs de graad van de veelterm niet meer. Hij vraagt Wiske om hulp. Zij gaat hem natuurlijk niet meteen de veelterm verklappen en vindt het leuker om er een raadseltje van te maken.  
Alle coëfficiënten van de veelterm  $P$  die Suske zoekt, zijn natuurlijke getallen. Wiske is bereid om voor elk getal  $a$ , dat Suske haar geeft, de functiewaarde  $P(a)$  te zeggen. Dit is de waarde die Wiske uitkomt als ze de veranderlijke van de veelterm vervangt door het getal  $a$ .  
Als Suske het slim speelt, kan hij de veelterm  $P$  achterhalen door Wiske goedgekozen getallen  $a$  te laten invullen. Kan jij voor Suske een strategie bedenken die na zo weinig mogelijk functiewaarden met zekerheid de veelterm  $P$  achterhaalt? (Bron: *Wiskunnend Wiske*)

### Rationale functies

3. ★★★ Los het stelsel ongelijkheden op: 
$$\begin{cases} \frac{(-x+5)(x^2+5x-6)}{-x^2+4x-50} \leq 0 \\ \frac{x+5}{x-2} > \frac{x+26}{x^2-4} \end{cases}$$

(Bron: *ingangsexamen burgerluchtvaartschool*)

4. ★★★ Vereenvoudig de uitdrukking hieronder als je weet dat  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$  en  $xyz = 1$ :

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}$$

(Bron: *Tweede ronde Vlaamse Wiskunde Olympiade*)

5. ★★ Gegeven is  $f(r) = \frac{1}{r^2}$ .

a) Bereken  $f(r) - f(r+1)$

b) Bewijs dat  $\sum_{r=1}^n \frac{2r+1}{r^2(r+1)^2} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}$

(Bron: *Ingangsexamen burgerlijk ingenieur*)

6. ★★★ Bewijs dat voor alle homografische functies het snijpunt van de asymptoten een symmetrie-middelpunt is.

### Irrationale functies

7. ★★★ Los op in  $\mathbb{R}$  :  $x+6 \leq \sqrt{x^3+7x^2-19x}$  . (Bron: *ingangsexamen polytechnische wetenschappen KMS*)
8. ★★★ Gegeven is de volgende vergelijking met  $m$  een reële parameter:  $x^2+mx+2=0$ .  
Bepaal alle waarden van  $m$  zodat de vergelijking twee verschillende reële nulpunten heeft waarbij het grootste nulpunt groter of gelijk is aan tweemaal het kleinste nulpunt. (Bron: *ingangsexamen polytechnische wetenschappen KMS*)
9. ★★★ Volgens de speciale relativiteitstheorie van Einstein is de massa  $m$  van een voorwerp geen constante grootte, maar een grootte afhankelijk van de snelheid  $v$  van dat voorwerp.  
Het verband wordt gegeven door de functie  $m(v) = \frac{m_0 \cdot c}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ ,  
Hierbij is  $m_0$  de massa van het voorwerp in rust, en  $c$  de lichtsnelheid (299792458 m/s).
- a) Een kogel weegt in rust 7,45g. Wat is zijn relativistische massa als hij wordt afgevuurd met een snelheid van 800 m/s?
- b) Hoe snel moet een voorwerp bewegen opdat zijn massa zou verdubbelen ten opzichte van zijn rustmassa?
- c) Verklaar waarom het onmogelijk is een voorwerp met een positieve rustmassa te versnellen tot de lichtsnelheid?

### Bewerkingen met functies en speciale functies

10. ★★★ Als  $f(x) = x+1$  en  $g \circ f(x) = x^2+x+1$ , bepaal dan  $g(x)$ .
11. ★★★ Bewijs dat je elke functie kan schrijven als de som van een even en een oneven functie.

### Machten

12. ★★★ Bereken  $a$ ,  $b$  en  $a^{10}+b^{10}$  (met  $a, b \in \mathbb{R}$ ), als je weet dat  $\begin{cases} a^4+b^4=14 \\ ab=-1 \end{cases}$

(Bron: *ingangsexamen polytechnische wetenschappen KMS*)

*Veel succes!*