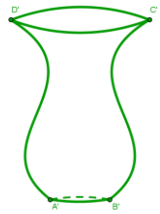
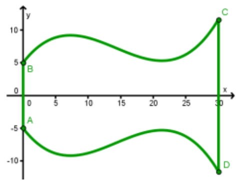
1. ★ (▮) Een wiskundige heeft een mal voor een vaas geproduceerd aan de hand van een veeltermfunctie. De vaas zie je op de linkse figuur. Op de rechtse figuur is in een assenstelsel een verticale dwarsdoorsnede onder een hoek van 90° gedraaid ten opzichte van figuur 2. De binnenkant van de vaas is symmetrisch ten opzichte van de x-as. De lijnstukken $[AB]$ en $[CD]$ zijn diameters van de cirkelvormige onder- en bovenkant van de vaas.





Het gedeelte BC van de doorsnede op de rechtse figuur is de grafiek van de veeltermfunctie f met voorschrift $f(x) = 0{,}0028x^3 - 0{,}12x^2 + 1{,}3x + 5$. Hierbij zijn x en $f(x)$ uitgedrukt in centimeter.

a) Bereken de diameter $|CD|$ van de bovenkant van de vaas (je weet dat de vaas 30 cm hoog is).

De straal wordt gegeven door $f(30) = 11{,}6$, dus de diameter bedraagt 23,2 cm.

b) Geef de diameter van de dikste bos bloemen die nog net door het smalle deel van de vaas kan.

Met je rekenmachine vind je dat het smalste deel bepaald wordt door het minimum $(21{,}30\,;\ 5{,}31)$. De dikste bos bloemen die er nog net door kan is dus 10,62 cm dik.

c) De dikte van de vaas – horizontaal gemeten – is steeds 0,5 cm. In figuur 3 staan de binnenzijden van de vaas getekend. Geef de formules van de twee buitenzijden van de vaas.

Dit zijn de functies $g_1(x) = f(x) + 0{,}5 = 0{,}0028x^3 - 0{,}12x^2 + 1{,}3x + 5{,}5$.

en $g_2(x) = -\left(f(x) + 0{,}5\right) = -0{,}0028x^3 + 0{,}12x^2 - 1{,}3x - 5{,}5$.

2. ★ Bepaal een veeltermfunctie van de 3^e graad waarvan de grafiek de x-as snijdt in punt $P(-4,0)$, de x-as raakt in punt $Q(2,0)$ en de y-as snijdt in punt $R(0,6)$.

Nulpunt $(-4,0)$ en dubbel nulpunt $(2,0)$, wil zeggen dat $f(x) = a.(x+4)(x-2)^2$.

$(0,6) \in f \Leftrightarrow 6 = a.4.(-2)^2 \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{8}$.

Het functievoorschrift is dus $f(x) = \dfrac{3}{8}(x+4)(x-2)^2$.

3. ★★* Bepaal $a, b \in \mathbb{R}$ zodat de veelterm $x^4 + 2x^2 + 9$ deelbaar is door de veelterm $x^2 + ax + b$.

Gebruik de methode van de onbepaalde coëfficiënten, dan heb je $x^4 + 2x^2 + 9 = \left(x^2 + ax + b\right)\left(cx^2 + dx + e\right)$.

Hier kan je echter direct bij opmerken dat $c = 1$ en $e = 9/b$, zodat we eenvoudiger vinden dat:

$$x^4 + 2x^2 + 9 = \left(x^2 + ax + b\right)\left(x^2 + dx + \frac{9}{b}\right) = x^4 + (a+d)x^3 + \left(\frac{9}{b} + ad + b\right)x^2 + \left(\frac{9a}{b} + bd\right)x + 9, \text{ zodat:}$$

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ \dfrac{9}{b} + ad + b = 2 \\ \dfrac{9a}{b} + bd = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -a \\ \dfrac{9}{b} - a^2 + b = 2 \\ \dfrac{9a}{b} - ab = 0 \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} d = -2 \\ \boxed{\begin{matrix} a = 2 \\ b = 3 \end{matrix}} \end{cases} \vee \begin{cases} d = 2 \\ \boxed{\begin{matrix} a = -2 \\ b = 3 \end{matrix}} \end{cases}$$

$*: \dfrac{9a}{b} - ab = 0 \Leftrightarrow a\left(\dfrac{9}{b} - b\right) = 0$

$\Leftrightarrow a = 0 \vee b^2 = 9 \Leftrightarrow \cancel{a=0} \vee b = 3 \vee \cancel{b=-3}$

$a = 0 \Rightarrow \dfrac{9}{b} + b = 2 \Leftrightarrow b^2 - 2b + 9 = 0 \ (\Delta < 0)$ ↯

$b = -3 \Rightarrow -3 - a^2 - 3 = 2 \Leftrightarrow a^2 = -8$ ↯

$b = 3 \Rightarrow 3 - a^2 + 3 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2 \vee a = -2$

4. ★★★ Gegeven is de vergelijking met parameter $k \in \mathbb{R}$: $x^4 + 2x^3 - 17x^2 + kx + 72 = 0$.

- Bepaal k zodat de vergelijking vier verschillende wortels heeft waarvoor geldt $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$.

We ontbinden de veelterm in twee tweedegraadsfactoren, de ene met wortels x_1 en x_2, de andere met wortels x_3 en x_4. De som van de wortels is bij beide vergelijkingen dezelfde, en we weten ook dat het product van alle vier de wortels 72 is. Zo krijgen we dus deze ontbinding:

$$x^4 + 2x^3 - 17x^2 + kx + 72 = \left(x^2 + ax + b\right)\left(x^2 + ax + \frac{72}{b}\right) = x^4 + 2ax^3 + \left(b + a^2 + \frac{72}{b}\right)x^2 + \left(\frac{72a}{b} + ab\right)x + 72$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = 2a \\ -17 = b + a^2 + 72/b \\ k = 72a/b + ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b^2 + 18b + 72 = 0 \\ k = 72/b + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \ \vee \ b = -12 \\ k = -18 \end{cases}$$

- Los de vergelijking op voor die waarde van de parameter k.

De wortels zijn dan $-3, 2, -4$ en 3.

5. ★★★ Bepaal de reële getallen a en b, en de wortels van de vergelijking $x^4 + x^3 - 12x^2 + ax + b = 0$, als je weet dat deze vergelijking twee wortels heeft waarvan het product 2 is, terwijl de andere wortels een som hebben gelijk aan 2.

Op dezelfde manier als boven krijgen we nu enerzijds een som en anderzijds een product gegeven:

$$x^4 + x^3 - 12x^2 + ax + b = \left(x^2 + cx + 2\right)\left(x^2 - 2x + \frac{b}{2}\right) = x^4 + (c-2)x^3 + \left(2 - 2x + \frac{b}{2}\right)x^2 + \left(\frac{bc}{2} - 4\right)x + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = c - 2 \\ -12 = 2 - 2c + b/2 \\ a = bc/2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = -16 \\ a = -28 \end{cases}$$ De wortels van deze vergelijking zijn dan $-1, -2, 4$ en -2.

6. ★ Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{12 - x - x^2}{x + 6}$. De grafiek ervan snijdt de x-as in A en B en de y-as in punt C.

Bepaal de oppervlakte van de driehoek ΔABC.

Snijpunten met de x-as: $12 - x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \ \vee \ x = -4$, dus $A(3,0)$ en $B(-4,0)$.

Snijpunt met de y-as: $x = 0 \Rightarrow f(0) = \dfrac{12}{6} = 2$, dus $C(0,2)$.

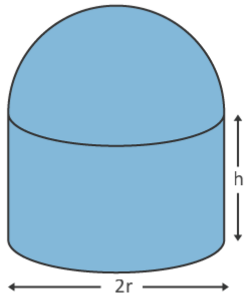
De gevraagde oppervlakte is dus $S_{\Delta ABC} = \dfrac{7.2}{2} = 7$.

7. ★★★ De grafiek van de homografische functie $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ snijdt de x-as is punt A, de y-as in punt B, en haar asymptoten snijden elkaar in punt S. Bewijs dat de verschillende punten A, B en S collineair zijn als en slechts als $2ad - bc = 0$.

De punten hebben coördinaat $A\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$, $B\left(0, \dfrac{b}{d}\right)$ en $S\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$. Dit geeft dan $AB \leftrightarrow \dfrac{x}{-b/a} + \dfrac{y}{b/d} = 1$.

$$S \in AB \Leftrightarrow \frac{-d/c}{-b/a} + \frac{a/c}{b/d} = 1 \Leftrightarrow \frac{ad}{bc} + \frac{ad}{bc} = 1 \Leftrightarrow 2ad - bc = 0 \ \square$$

8. ★★ Een oliekan moet een inhoud hebben van 1000cm³. Ze moet de vorm hebben van een cilinder met vlakke bodem maar langs boven begrensd door een halve bol.



Wat moeten de afmetingen van deze oliekan zijn opdat er zo weinig mogelijk materiaal moet gebruikt worden (dus een zo klein mogelijke oppervlakte)?

De dikte van het gebruikte materiaal mag verwaarloosd worden.

Voor de inhoud geldt: $I = \pi r^2 h + \dfrac{2}{3}\pi r^3 = 1000 \Leftrightarrow h = \dfrac{3000 - 2\pi r^3}{3\pi r^2}$.

Voor de oppervlakte geldt: $S = \underset{grondvlak}{\pi r^2} + \underset{mantel}{2\pi r h} + \underset{halve\ bol}{2\pi r^2} = 3\pi r^2 + 2\pi r h = 3\pi r^2 + 2 \cdot \dfrac{3000 - 2\pi r^3}{3r}$.

Met het rekenmachine kan je het minimum van deze functie berekenen: $r \approx 5,76$ (exact is $r = 2.\sqrt[3]{75/\pi}$).

De kan moet dus ongeveer $11,52\ cm$ breed zijn, en $5,76\ cm$ hoog ($r \approx 5,76$ invullen bij h geeft ook $h \approx 5,76$).

9. ★* Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{3x^2 + 7x + 2}$.

a) De grafiek van deze functie is geperforeerd. Bepaal het perforatiepunt.

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{3x^2 + 7x + 2} = \frac{(x-1)^2 (x+2)}{(x+2)(3x+1)} \Rightarrow f_v(x) = \frac{(x-1)^2}{(3x+1)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{3x + 1}$$

De grafiek is geperforeerd als $x = -2$, dan is $f_v(-2) = -\dfrac{9}{5}$, dus het perforatiepunt is $P\left(-2, -\dfrac{9}{5}\right)$

b) Bepaal alle asymptoten van deze functie en de ligging van de grafiek ten opzichte van deze asymptoten.

<u>VA:</u> $x = -1/3$

x	$-\infty$		$-1/3$		1		$+\infty$
$f_v(x)$		-	|	+	0	+	

Dus $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{3} \\ <}} f(x) = -\infty$ en $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{3} \\ >}} f(x) = +\infty$

<u>SA:</u> $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{7}{9}$ want:

$$\begin{array}{rrr|rr}
x^2 & -2x & +1 & 3x & +1 \\ \cline{4-5}
x^2 & +\frac{1}{3}x & & \frac{1}{3}x & -\frac{7}{9} \\ \cline{1-3}
 & -\frac{7}{3}x & +1 & & \\
 & -\frac{7}{3}x & -\frac{7}{9} & & \\ \cline{2-3}
 & & \frac{16}{9} & &
\end{array}$$

Ligging: tekenverloop van $f_v(x) - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{7}{9} = \dfrac{16/9}{3x+1}$

x	$-\infty$		$-1/3$		$+\infty$
$\dfrac{16/9}{3x+1}$		-	|	+	
		Onder SA		Boven SA	

10. ★★ Gegeven is de functie $f(x)=\dfrac{2x^2+5x-7}{x+3}$.

Bewijs dat het snijpunt van de asymptoten van deze functie een symmetriemiddelpunt is voor deze functie.

De asymptoten zijn $v \leftrightarrow x=-3$ en $s \leftrightarrow y=2x-1$, die elkaar snijden in het punt $S(-3,-7)$.

Dit punt is een symmetriemiddelpunt als en slechts als $\dfrac{f(-3-x)+f(-3+x)}{2}=-7$. We rekenen na:

$$\frac{\dfrac{2(-3-x)^2+5(-3-x)-7}{(-3-x)+3}+\dfrac{2(-3+x)^2+5(-3+x)-7}{(-3+x)+3}}{2}=\frac{2x^2+7x-4}{-2x}+\frac{2x^2-7x-4}{2x}=\frac{-14x}{2x}=-7\ (x\neq 0)$$

11. ★ Los de ongelijkheid op: $\dfrac{2x+1}{x^2-4}\leq\dfrac{x-1}{4}$.

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x^2-4}-\frac{x-1}{4}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{4(2x+1)-(x-1)(x^2-4)}{4x^2-16}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^3+x^2+12x}{4x^2-16}\leq 0$$

Ontbinden geeft $\dfrac{-x(x+3)(x-4)}{4(x-2)(x+2)}\leq 0$

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		4		$+\infty$
LL		+	0	-	|	+	0	-	|	+	0	-	

$V=[-3,-2[\cup[0,2[\cup[4,+\infty[$

12. Gegeven zijn de functies $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-1}$, met parameters $a,b,c\in\mathbb{R}$.

a) ★ Wanneer zal f de x-as als horizontale asymptoot hebben, en de y-as snijden in punt $(0,3)$.

De x-as als HA impliceert dat $gr(T)<gr(N)\Rightarrow\boxed{a=b=0}$. $(0,3)\in f\Leftrightarrow\dfrac{c}{0-1}=3\Rightarrow\boxed{c=-3}$.

b) ★ Wanneer zal f de rechte $h\leftrightarrow y=4$ als horizontale asymptoot hebben en door het punt $P(2,5)$ gaan.

$h\leftrightarrow y=4$ impliceert dat $gr(T)=gr(N)$, dus $\boxed{a=0}$ en het quotiënt van de hoogstegraadstermen moet 4 zijn, dus $\boxed{b=4}$. $P(2,5)\in f\Leftrightarrow\dfrac{4.2+c}{2-1}=5\Leftrightarrow\boxed{c=-3}$

c) ★★⋆ Wanneer zal f de rechte $s\leftrightarrow y=2x+8$ als schuine asymptoot hebben en de x-as raken.

$$\begin{array}{lll|ll}
ax^2 & +bx & +c & x & -1 \\ \cline{4-5}
ax^2 & -ax & & ax & +a+b \\ \cline{1-3}
 & (a+b)x & +c & & \\
 & (a+b)x & -(a+b) & & \\ \cline{2-3}
 & & a+b+c & &
\end{array}$$

SA: $y=ax+a+b$, dus $\boxed{a=2}$ en $\boxed{b=6}$.
De $x-$as raken impliceert dat de teller maar één (dubbel) nulpunt mag hebben, dus $\Delta=0$.
$b^2-4ac=0\Leftrightarrow 36-8c=0\Leftrightarrow\boxed{c=9/2}$