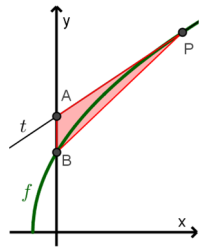
1. ★★ Bepaal, met behulp van de definitie, de afgeleide functie f' van $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{a^2}}{x-a}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^4}}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{(x-a)\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^4}\right)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{(x-a)}\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^4}\right)}=\frac{2a}{3\sqrt[3]{a^4}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{a}}\quad\Rightarrow\quad\boxed{D\sqrt[3]{x^2}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}}$$

2. Gegeven is de functie $f(x)=\sqrt{3x+4}$.



a) ★★ Bereken, steunend op de definitie, de afgeleide $f'(7)$.

$$f'(7)=\lim_{x\to 7}\frac{f(x)-f(7)}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{3x+4}-5}{x-7}\cdot\frac{\sqrt{3x+4}+5}{\sqrt{3x+4}+5}=\lim_{x\to 7}\frac{3x-21}{(x-7)\left(\sqrt{3x+4}+5\right)}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{3\cancel{(x-7)}}{\cancel{(x-7)}\left(\sqrt{3x+4}+5\right)}=\frac{3}{10}$$

b) ★ Stel de vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van de functie f in het punt $P(7,\ldots)$.

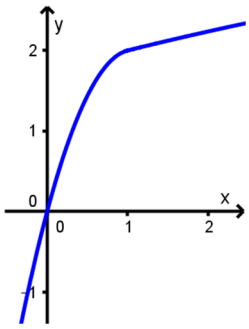
$t\leftrightarrow y=\frac{3}{10}(x-7)+5$ of eenvoudiger: $t\leftrightarrow y=\frac{3}{10}x+\frac{29}{10}$

c) ★ Deze raaklijn snijdt de y-as in punt A. De grafiek van f snijdt de y-as in punt B.

Bereken de oppervlakte van driehoek ΔAPB.

Het is duidelijk dat $A\left(0,\frac{29}{10}\right)$ en $B(0,2)$, zodat $S_\Delta=\frac{|AB|\cdot x_P}{2}=\frac{0{,}9\cdot 7}{2}=3{,}15$

3. ★★ Voor welke waarden van de parameters $a,b\in\mathbb{R}$ zal de functie f met meervoudig functievoorschrift overal continu en afleidbaar zijn:



$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+3} & ,x>1\\ ax^2+bx & ,x\le 1\end{cases}.$$

Om continu te zijn moet:

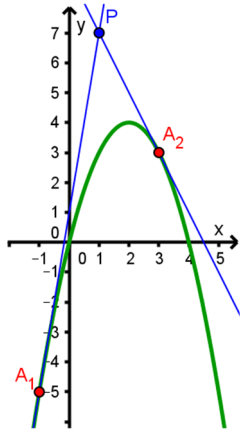
$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)\Rightarrow\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}f(x)\Leftrightarrow\sqrt{1+3}=a+b\Leftrightarrow a+b=2$$

Om afleidbaar te zijn moet bovendien:

$$LA=RA\Leftrightarrow\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}f'(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}f'(x)\Leftrightarrow\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{1}{2\sqrt{x+3}}=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}(2ax+b)\Leftrightarrow\frac{1}{4}=2a+b$$

Dus: $\begin{cases}a+b=2\\ 2a+b=1/4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-7/4\\ b=15/4\end{cases}$

4. ★★ Bepaal de punten op de grafiek van $f(x)=4x-x^2$ waarin de raaklijn aan de grafiek van f door $P(1,7)$ gaan.



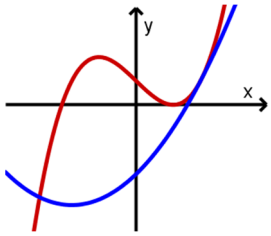
De raaklijn in $A(a,4a-a^2)$ heeft als rico $f'(a)=4-2a$, dus:

$t \leftrightarrow y=(4-2a)(x-a)+4a-a^2$.

$P(1,7)\in t \Leftrightarrow 7=(4-2a)(1-a)+4a-a^2 \Leftrightarrow a^2-2a-3=0 \Leftrightarrow a=-1 \vee a=3$.

De gezochte punten zijn $A_1(-1,-5)$ en $A_2(3,3)$.

5. De parabool $p \leftrightarrow y=x^2+4x-9$ en de kubische kromme $k \leftrightarrow y=x^3-4x+3$ hebben twee punten gemeenschappelijk.



a) ★★ Bewijs dat de grafieken elkaar snijden in een punt en raken in een ander punt.

Snijpunten:

$$\begin{cases} y=x^3-4x+3 \\ y=x^2+4x-9 \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-12 \end{cases}$$

$$*: x^3-4x+3=x^2+4x-9 \Leftrightarrow x^3-x^2-8x+12=0 \overset{\boxed{Horner}}{\Leftrightarrow} (x-2)^2(x+3)=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=-3$$

De afgeleide functies (die we voor het gemak p' en k' noemen) zijn: $p'(x)=2x+4$ en $k'(x)=3x^2-4$.

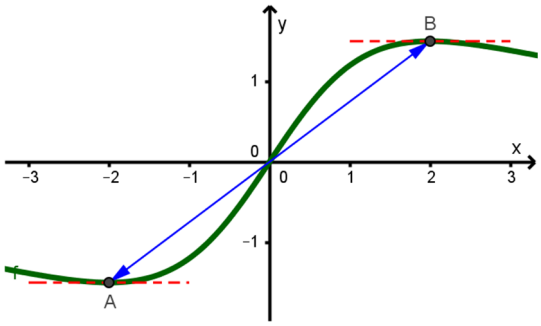
In $x=2$ zijn de afgeleiden gelijk, want $p'(2)=k'(2)=8$, dus raken de krommen elkaar.

In $x=-3$ zijn de afgeleiden verschillend, want $p'(-3)=-2$ en $k'(-3)=23$, dus snijden de krommen elkaar.

b) ★ Bereken in het snijpunt de hoek die de twee krommen met elkaar maken.

Voor de hoek geldt: $\tan\theta=\dfrac{-2-23}{1-2.23}=\dfrac{5}{9} \Rightarrow \theta \approx 29°03'17''$

6. ★★ Op de grafiek van $f(x)=\dfrac{6x}{x^2+4}$ liggen twee punten A en B waar de raaklijn aan de grafiek van f evenwijdig is aan de x-as.



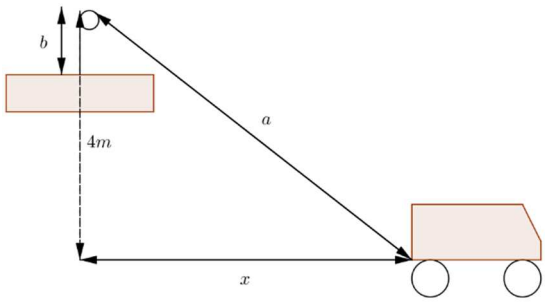
Bereken de afstand $|AB|$ tussen deze twee punten.

$$f'(x)=\frac{6(x^2+4)-2x.6x}{(x^2+4)^2}=\frac{-6x^2+24}{(x^2+4)^2}$$

$$t \,//\, x \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow -6x^2+24=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=-2 \;\vee\; x=2 \quad \Rightarrow A\left(-2,-\frac{3}{2}\right) \text{ en } B\left(2,\frac{3}{2}\right).$$

De afstand $|AB|$ is dan $|AB|=\sqrt{(2+2)^2+\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)^2}=5$

7. ★★★ Een betonnen plaat die op de grond ligt is via een katrol met een kabel verbonden aan een tractor (plaat, katrol en tractor hebben verwaarloosbare afmetingen).



De katrol hangt 4 m boven de grond, en de tractor rijdt met een snelheid van 1 m/s weg van de plaat, die als ze op de grond ligt 6 m van de tractor is verwijderd.

Bereken de snelheid waarmee de plaat omhoog wordt getild op het ogenblik dat ze 3 m boven de grond hangt.

Met de conventies op de figuur (x is de horizontale afstand die de tractor aflegt, a is de afstand van de tractor tot de katrol en b is de afstand van de plaat tot de katrol) geldt: $\begin{cases} a^2 - x^2 = 4^2 \\ a + b = 4 + \sqrt{52} \end{cases}$ (de kabellengte is constant).

Leiden we beide vergelijkingen lid aan lid af naar de tijd dan krijgen we: $\begin{cases} 2a\dfrac{da}{dt} - 2x\dfrac{dx}{dt} = 0 \\ \dfrac{da}{dt} + \dfrac{db}{dt} = 0 \end{cases}$.

Op het moment dat de plaat 3 meter boven de grond hangt is $b = 1$, $a = \sqrt{52} + 3$, $x = \sqrt{a^2 - 16} = \sqrt{45 + 6\sqrt{52}}$ en er is verder gegeven dat $\dfrac{dx}{dt} = 1$, dus is $\dfrac{da}{dt} = \dfrac{x}{a} \cdot \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\sqrt{45 + 6\sqrt{52}}}{\sqrt{52} + 3} \cdot 1 \approx 0{,}92$ (en dus ook $\dfrac{db}{dt} \approx -0{,}92$).

De snelheid waar de plaat mee wordt opgetild bedraagt op dat moment dus ongeveer $0{,}92\,\dfrac{m}{s}$.

8. Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Deze functie heeft twee verschillende horizontale asymptoten. Bepaal hun vergelijking.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(2 + 1/x)}{\pm x\sqrt{1 + 1/x^2}} = \pm 2$$

Dus voor $x \to +\infty$ is de asymptoot de rechte met vergelijking $y = 2$, en voor $x \to -\infty$ is de asymptoot de rechte met vergelijking $y = -2$.

b) Bepaal het verloop van deze functie (stijgen en dalen) met behulp van de eerste afgeleide.

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1} - (2x+1)\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{2(x^2+1) - (2x+1)x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{2-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

Deze functie heeft duidelijk slechts één nulpunt ($x = 2$) en geen polen. Het tekenverloop gaat dus:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	MAX $(\sqrt{5})$	↘

c) Bewijs dat deze functie twee verschillende buigpunten heeft. Je hoeft ze niet te berekenen.

$$f''(x)=\frac{-\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}-(2-x)\frac{3}{\cancel{2}}\sqrt{x^2+1}.\cancel{2}x}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{-\left(x^2+1\right)-(2-x).3x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^5}}=\frac{2x^2-6x-1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^5}}$$

Deze functie heeft duidelijk twee verschillende nulpunten, want de discriminant van de teller is 44. Er zijn dus inderdaad twee verschillende buigpunten (bij $x=\frac{6\pm\sqrt{44}}{4}$).

9. Gegeven zijn de functies $f_a : x \mapsto \frac{\sqrt{4x-a}}{x^2+1}$, met parameter $a \in \mathbb{R}$.

a) Bepaal het domein van deze functies.

$$x \in dom\ f \Leftrightarrow 4x-a \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{a}{4} \quad \Rightarrow \quad dom\ f=\left[\frac{a}{4},+\infty\right[.$$

b) Bepaal voor welke waarde van de parameter a de grafiek een extremum bereikt voor $x=1$.

$$f'_a(x)=\frac{\frac{\cancel{4}2}{\cancel{2}\sqrt{4x-a}}\left(x^2+1\right)-2x\sqrt{4x-a}}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2\left(x^2+1\right)-2x(4x-a)}{\left(x^2+1\right)^2\sqrt{4x-a}}=\frac{-6x^2+2ax+2}{\left(x^2+1\right)^2\sqrt{4x-a}}$$

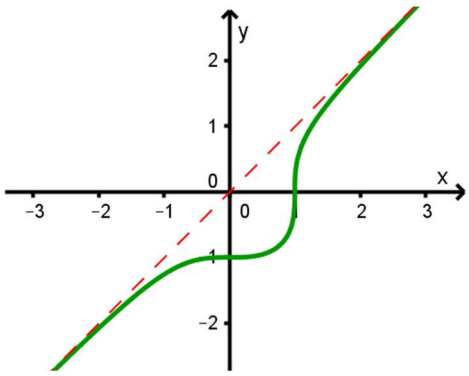
$$f'_a(1)=0 \Leftrightarrow \frac{-6+2a+2}{(1+1)^2\sqrt{4-a}}=0 \Leftrightarrow a=2$$

Dan is $f'(x)=\frac{-6x^2+4x+2}{\left(x^2+1\right)^2\sqrt{4x-2}}$, zodat f' voor $x=1$ wel degelijk een tekenwissel heeft.

- Wat is de ordinaat van dit extremum?

$$f_2(1)=\frac{\sqrt{4.1-2}}{1^2+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

10. Gegeven is grafiek van de functie $f(x)=\sqrt[3]{x^3-1}$, en haar schuine asymptoot $s \leftrightarrow y=x$.



a) Bewijs dat $f''(x)=\frac{-2x}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^5}}$.

$$f'(x)=\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}=\frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}$$

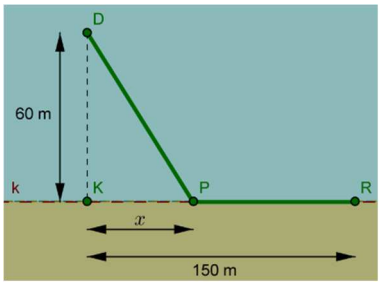
$$f''(x)=\frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}=\frac{2x.\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}-x^2\frac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}}}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^4}}=\frac{2x.\left(x^3-1\right)-2\cdot x^4}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^5}}=\frac{-2x}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^5}}$$

b) Bespreek in een tabel het volledige verloop (stijgen/dalen, hol/bol) van de functie f.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+	|	+
$f''(x)$	-	0	+	|	-
$f(x)$	↗	BP (-1)	↗	BP (0)	↗

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}=+\infty \Rightarrow$ de grafiek van f heeft $x=1$ als verticale raaklijn in $(1,0)$

11. Een drenkeling (D) bevindt zich op 60 meter van de kust (k). Op 150 meter van het punt K (het punt op de kustlijn dichtst bij D) langs de kustlijn staat een redder (R). De redder kan tegen 2,6 m/s lopen over het strand en tegen 1 m/s naar de drenkeling toe zwemmen. Bepaal algebraïsch het ideale punt waarop de redder moet beginnen zwemmen (dus zodat de tijd die hij nodig heeft om de drenkeling te bereiken minimaal is).



Stel je $|KP|=x$ dan leid je eenvoudig af dat $|PR|=150-x$ en $|DP|=\sqrt{x^2+3600}$ (Pythagoras).

De tijd waarin de redder de drenkeling bereikt is dus: $t(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3600}}{1}+\dfrac{150-x}{2,6}$ ($\Delta t=\dfrac{\Delta s}{v}$).

Afleiden geeft: $t'(x)=\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+3600}}-\dfrac{1}{2,6}$.

$t'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3600}}=\dfrac{1}{2,6} \Leftrightarrow 2,6x=\sqrt{x^2+3600} \overset{\boxed{x>0}}{\Leftrightarrow} 6,76x^2=x^2+3600 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{3600}{5,76}$,

dus $x=\dfrac{60}{2,4}=25$.

x	$-\infty$	25	$+\infty$
$t'(x)$	-	0	+
$t(x)$	↘	MIN (113,08...)	↗

Antwoord: De redder zal het snelst bij de drenkeling zijn als hij 125m loopt. *(Hij zwemt dan 65m en doet er in totaal iets meer dan 113 seconden over.)*