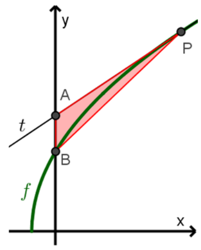
1. ★★ Bepaal, met behulp van de definitie, de afgeleide functie $f\,'$ van $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$.

$$f\,'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{a^2}}{x-a}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^4}}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{(x-a)\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^4}\right)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{(x-a)}\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^4}\right)}=\frac{2a}{3\sqrt[3]{a^4}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{a}}\quad\Rightarrow\quad\boxed{D\,\sqrt[3]{x^2}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}}$$

2. Gegeven is de functie $f(x)=\sqrt{3x+4}$.



a) ★★ Bereken, steunend op de definitie, de afgeleide $f\,'(7)$.

$$f\,'(7)=\lim_{x\to 7}\frac{f(x)-f(7)}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{3x+4}-5}{x-7}\cdot\frac{\sqrt{3x+4}+5}{\sqrt{3x+4}+5}=\lim_{x\to 7}\frac{3x-21}{(x-7)\left(\sqrt{3x+4}+5\right)}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{3\cancel{(x-7)}}{\cancel{(x-7)}\left(\sqrt{3x+4}+5\right)}=\frac{3}{10}$$

b) ★ Stel de vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van de functie f in het punt $P(7,\ldots)$.

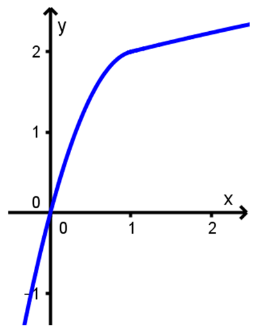
$t\leftrightarrow y=\dfrac{3}{10}(x-7)+5$ of eenvoudiger: $t\leftrightarrow y=\dfrac{3}{10}x+\dfrac{29}{10}$

c) ★ Deze raaklijn snijdt de y-as in punt A. De grafiek van f snijdt de y-as in punt B.

Bereken de oppervlakte van driehoek ΔAPB.

Het is duidelijk dat $A\left(0,\dfrac{29}{10}\right)$ en $B(0,2)$, zodat $S_\Delta=\dfrac{|AB|\cdot x_P}{2}=\dfrac{0{,}9\cdot 7}{2}=3{,}15$

3. ★★ Voor welke waarden van de parameters $a,b\in\mathbb{R}$ zal de functie f met meervoudig functievoorschrift overal continu en afleidbaar zijn:



$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+3} & ,x>1\\ ax^2+bx & ,x\le 1\end{cases}.$$

Om continu te zijn moet:

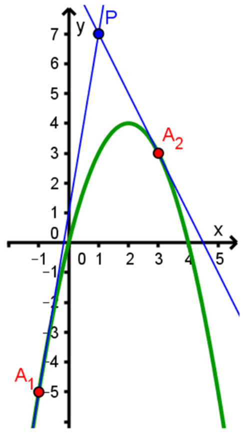
$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)\Rightarrow\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}f(x)\Leftrightarrow\sqrt{1+3}=a+b\Leftrightarrow a+b=2$$

Om afleidbaar te zijn moet bovendien:

$$LA=RA\Leftrightarrow\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}f\,'(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}f\,'(x)\Leftrightarrow\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{1}{2\sqrt{x+3}}=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}(2ax+b)\Leftrightarrow\frac{1}{4}=2a+b$$

Dus: $\begin{cases}a+b=2\\ 2a+b=1/4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-7/4\\ b=15/4\end{cases}$

4. ★★ Bepaal de punten op de grafiek van $f(x)=4x-x^2$ waarin de raaklijn aan de grafiek van f door $P(1,7)$ gaan.



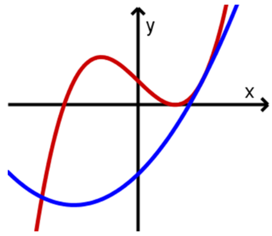
De raaklijn in $A\left(a,4a-a^2\right)$ heeft als rico $f'(a)=4-2a$, dus:

$t \leftrightarrow y=(4-2a)(x-a)+4a-a^2$.

$P(1,7)\in t \Leftrightarrow 7=(4-2a)(1-a)+4a-a^2 \Leftrightarrow a^2-2a-3=0 \Leftrightarrow a=-1 \vee a=3$.

De gezochte punten zijn $A_1(-1,-5)$ en $A_2(3,3)$.

5. De parabool $p \leftrightarrow y=x^2+4x-9$ en de kubische kromme $k \leftrightarrow y=x^3-4x+3$ hebben twee punten gemeenschappelijk.



a) ★★ Bewijs dat de grafieken elkaar snijden in een punt en raken in een ander punt.

Snijpunten:

$$\begin{cases} y=x^3-4x+3 \\ y=x^2+4x-9 \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-12 \end{cases}$$

$$*: x^3-4x+3=x^2+4x-9 \Leftrightarrow x^3-x^2-8x+12=0 \overset{\boxed{Horner}}{\Leftrightarrow} (x-2)^2(x+3)=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=-3$$

De afgeleide functies (die we voor het gemak p' en k' noemen) zijn: $p'(x)=2x+4$ en $k'(x)=3x^2-4$.

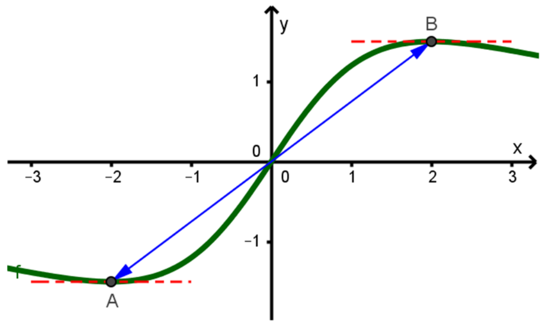
In $x=2$ zijn de afgeleiden gelijk, want $p'(2)=k'(2)=8$, dus raken de krommen elkaar.

In $x=-3$ zijn de afgeleiden verschillend, want $p'(-3)=-2$ en $k'(-3)=23$, dus snijden de krommen elkaar.

b) ★ Bereken in het snijpunt de hoek die de twee krommen met elkaar maken.

Voor de hoek geldt: $\tan\theta=\dfrac{-2-23}{1-2.23}=\dfrac{5}{9} \Rightarrow \theta \approx 29°03'17''$

6. ★★ Op de grafiek van $f(x)=\dfrac{6x}{x^2+4}$ liggen twee punten A en B waar de raaklijn aan de grafiek van f evenwijdig is aan de x-as. Bereken de afstand $|AB|$ tussen deze twee punten.

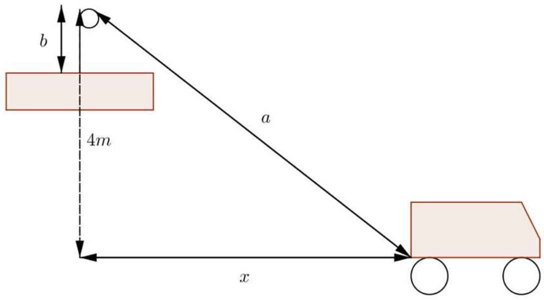


$$f'(x)=\frac{6\left(x^2+4\right)-2x.6x}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{-6x^2+24}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$t \,//\, x \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow -6x^2+24=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=-2 \ \vee \ x=2 \quad \Rightarrow A\left(-2,-\frac{3}{2}\right) \text{ en } B\left(2,\frac{3}{2}\right).$$

De afstand $|AB|$ is dan $|AB|=\sqrt{(2+2)^2+\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\right)^2}=5$

7. ★★★ Een betonnen plaat die op de grond ligt is via een katrol met een kabel verbonden aan een tractor (plaat, katrol en tractor hebben verwaarloosbare afmetingen).



De katrol hangt 4 m boven de grond, en de tractor rijdt met een snelheid van 1 m/s weg van de plaat, die als ze op de grond ligt 6 m van de tractor is verwijderd.

Bereken de snelheid waarmee de plaat omhoog wordt getild op het ogenblik dat ze 3 m boven de grond hangt.

Met de conventies op de figuur (x is de horizontale afstand die de tractor aflegt, a is de afstand van de tractor tot de katrol en b is de afstand van de plaat tot de katrol) geldt: $\begin{cases} a^2 - x^2 = 4^2 \\ a + b = 4 + \sqrt{52} \end{cases}$ (de kabellengte is constant).

Leiden we beide vergelijkingen lid aan lid af naar de tijd dan krijgen we: $\begin{cases} 2a\dfrac{da}{dt} - 2x\dfrac{dx}{dt} = 0 \\ \dfrac{da}{dt} + \dfrac{db}{dt} = 0 \end{cases}$.

Op het moment dat de plaat 3 meter boven de grond hangt is $b = 1$, $a = \sqrt{52} + 3$, $x = \sqrt{a^2 - 16} = \sqrt{45 + 6\sqrt{52}}$ en er is verder gegeven dat $\dfrac{dx}{dt} = 1$, dus is $\dfrac{da}{dt} = \dfrac{x}{a} \cdot \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\sqrt{45 + 6\sqrt{52}}}{\sqrt{52} + 3} \cdot 1 \approx 0{,}92$ (en dus ook $\dfrac{db}{dt} \approx -0{,}92$).

De snelheid waar de plaat mee wordt opgetild bedraagt op dat moment dus ongeveer $0{,}92\,\dfrac{m}{s}$.