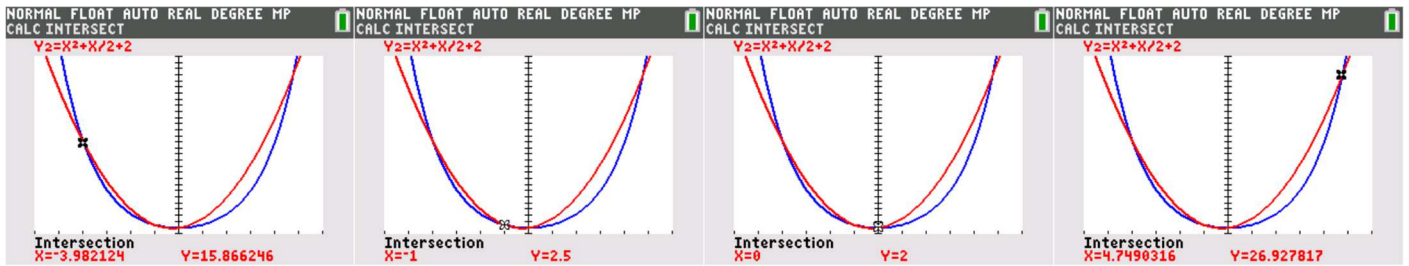


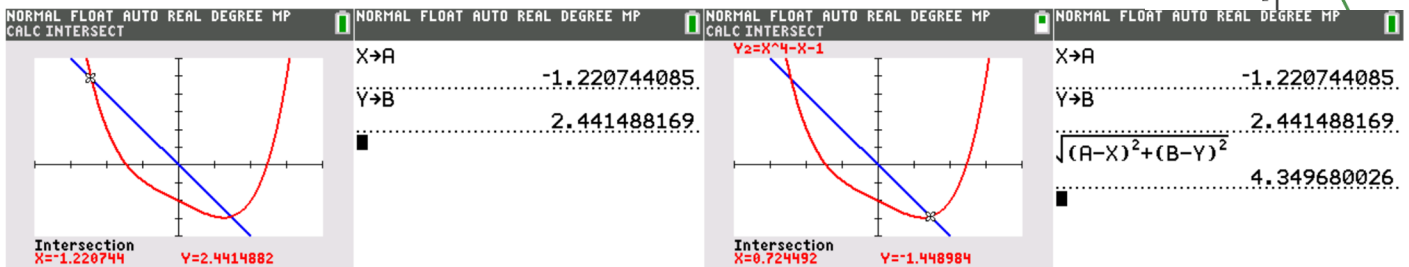
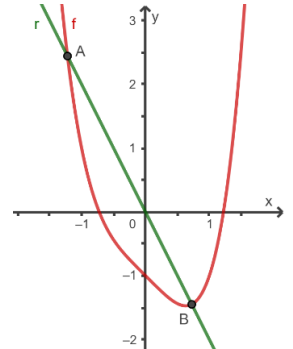
1. ★ (■) Los de ongelijkheid grafisch op: $2^x + 2^{-x} \geq x^2 + \frac{x}{2} + 2$. Rond af op 5 decimalen.

$$V =]-\infty; -3,98212] \cup [-1, 0] \cup [4, 74903; +\infty[$$

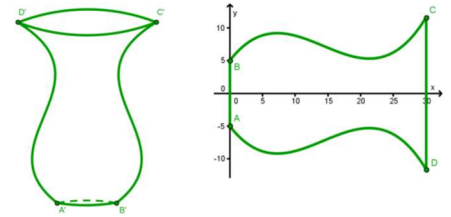


2. ★ (■) Hoe lang is de koorde $[AB]$ die door de rechte $r \leftrightarrow 2x + y = 0$ wordt afgesneden van de grafiek van de functie $f \leftrightarrow y = x^4 - x - 1$? Rond af op 5 decimalen.

$$|AB| \approx 4,34968$$



3. ★ (■) Een wiskundige heeft een mal voor een vaas geproduceerd aan de hand van een veeltermfunctie. De vaas zie je op de linkse figuur. Op de rechtse figuur is in een assenstelsel een verticale dwarsdoorsnede onder een hoek van 90° gedraaid ten opzichte van figuur 2. De binnenkant van de vaas is symmetrisch ten opzichte van de x -as. De lijnstukken $[AB]$ en $[CD]$ zijn diameters van de cirkelvormige onder- en bovenkant van de vaas.



Het gedeelte BC van de doorsnede op de rechtse figuur is de grafiek van de veeltermfunctie f met voorschrift $f(x) = 0,0028x^3 - 0,12x^2 + 1,3x + 5$. Hierbij zijn x en $f(x)$ uitgedrukt in centimeter.

- a) Bereken de diameter $|CD|$ van de bovenkant van de vaas (je weet dat de vaas 30 cm hoog is).

De straal wordt gegeven door $f(30) = 11,6$, dus de diameter bedraagt 23,2 cm.

- b) Geef de diameter van de dikste bos bloemen die nog net door het smalle deel van de vaas kan.

Met je rekenmachine vind je dat het smalste deel bepaald wordt door het minimum $(21,30; 5,31)$. De dikste bos bloemen die er nog net door kan is dus 10,62 cm dik.

- c) De dikte van de vaas – horizontaal gemeten – is steeds 0,5 cm. In figuur 3 staan de binnenzijden van de vaas getekend. Geef de formules van de twee buitenzijden van de vaas.

Dit zijn de functies $g_1(x) = f(x) + 0,5 = 0,0028x^3 - 0,12x^2 + 1,3x + 5,5$.

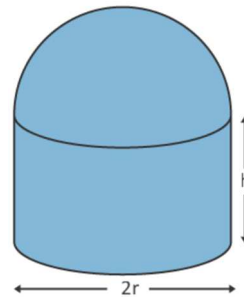
en $g_2(x) = -(f(x) + 0,5) = -0,0028x^3 + 0,12x^2 - 1,3x - 5,5$.

4. ★★ Een oliekan moet een inhoud hebben van 1 liter. Ze moet de vorm hebben van een cilinder met vlakke bodem maar langs boven begrensd door een halve bol.

Wat moeten de afmetingen van deze oliekan zijn opdat er zo weinig mogelijk materiaal moet gebruikt worden (dus een zo klein mogelijke oppervlakte)?

De dikte van het gebruikte materiaal mag verwaarloosd worden.

Als we als eenheid centimeter kiezen is de inhoud gelijk aan $1\text{ l} = 1\text{ dm}^3 = 1000\text{ cm}^3$.



Voor de inhoud geldt: $I = \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3 = 1000 \Leftrightarrow h = \frac{3000 - 2\pi r^3}{3\pi r^2}$.

Voor de oppervlakte geldt: $S = \underbrace{\pi r^2}_{\text{grondvlak}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{mantel}} + \underbrace{2\pi r^2}_{\text{halve bol}} = 3\pi r^2 + 2\pi r h = 3\pi r^2 + 2 \cdot \frac{3000 - 2\pi r^3}{3r}$.

Met het rekenmachine kan je het minimum van deze functie berekenen: $r \approx 5,76$ (exact is $r = 2 \cdot \sqrt[3]{75/\pi}$).

De kan moet dus ongeveer $11,52\text{ cm}$ breed zijn, en $5,76\text{ cm}$ hoog ($r \approx 5,76$ invullen bij h geeft ook $h \approx 5,76$).

5. ★★ Gegeven is de functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x) = -(\alpha x - 1)^2 + 1$ met parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Bepaal de verzameling van alle waarden van $\alpha \in \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat het beeld van de functie $]-\infty, 1]$ is.

- (A) $\mathbb{R}_0^-$ (B) $\mathbb{R}_0^+$ (C) $\mathbb{R}_0$ (D) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Bron: IJkingstoets burgerlijk ingenieur 2025

Als $\alpha \in \mathbb{R}_0$ dan is $f(x) = -(\alpha x - 1)^2 + 1 = -\left(\alpha\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\right)^2 + 1 = -\alpha^2\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + 1$. De grafiek hiervan is een bergparabool met top $T\left(\frac{1}{\alpha}, 1\right)$. Dus dan is $\text{bld } f =]-\infty, 1]$.

Als $\alpha = 0$ dan is $f(x) = 0$, dus de x -as, en dan is $\text{bld } f = \{0\}$.

6. ★★ Een raaklijn aan een parabool is een rechte die de parabool maar in één punt snijdt (en niet evenwijdig is aan de as van de parabool). Met hoeveel eenheden moet de rechte $r \leftrightarrow y = -3x$ naar boven verschuiven opdat het een raaklijn zou zijn aan de parabool $\mathcal{P} \leftrightarrow y = -x^2 + 3x - 1$?

Als we de rechte q eenheden naar boven schuiven is haar vergelijking $t \leftrightarrow y = -3x + q$.

t is een raaklijn

$\Leftrightarrow$ de vergelijking $-x^2 + 3x - 1 = -3x + q$ heeft slechts één oplossing

$\Leftrightarrow$ de vergelijking $-x^2 + 6x - 1 - q = 0$ heeft slechts één oplossing

$\Delta=0$
 $\Leftrightarrow 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1 - q) = 0 \Leftrightarrow 36 - 4 - 4q = 0 \Leftrightarrow q = 8$.

De rechte moet dus 8 eenheden naar boven verschoven worden om een raaklijn te zijn.

7. ★★ Gegeven is de functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^3 - 3x^2$. De grafiek van deze functie vertoont een puntsymmetrie. Zoek dit symmetriemiddelpunt met je GRM en toon aan dat dit effectief zo is.

We bewijzen dat $P(1, -2)$ het symmetriemiddelpunt is:

$$\frac{f(1-x) + f(1+x)}{2} = -2 \Leftrightarrow (1-x)^3 - 3(1-x)^2 + (1+x)^3 - 3(1+x)^2 = -4$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - 3 + 6x - 3x^2 + 1 + 3x + 3x^2 + x^3 - 3 - 6x - 3x^2 = -4 \quad \square$$

