1. ★* Bereken $\frac{(1+i)^{19}}{(1-i)^{18}}$

$\frac{(1+i)^{19}}{(1-i)^{18}}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{18}\cdot(1+i)=i^{18}(1+i)=-(1+i)=-1-i$ (want $\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{2i}{2}=i$)

2. Los op in $\mathbb{C}$:

a) ★* $\left(\sqrt{2}-i\right)z^2-6iz=0$

$\Leftrightarrow z\cdot\left(\left(\sqrt{2}-i\right)z-6i\right)=0\Leftrightarrow z=0\ \vee\ z=\frac{6i}{\sqrt{2}-i}\cdot\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}+i}=\frac{-6+6\sqrt{2}\,i}{3}=-2+2\sqrt{2}\,i$

b) ★* $(2-i)z-(1+3i)\overline{z}+2+7i=0$. Stel $z=x+yi$, dan is dus:

$(2-i)(x+yi)-(1+3i)(x-yi)+2+7i=0\Leftrightarrow 2x+y+-xi+2yi-x-3y-3xi+yi+2+7i=0$

$\Leftrightarrow(x-2y+2)+(-4x+3y+7)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y+2=0\\-4x+3y+7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$

Met andere woorden: $z=4+3i$.

c) * $z^2+9=0\Leftrightarrow z^2=-9\Leftrightarrow z=3i\ \vee\ z=-3i$

d) ★ $5z^2+4z+1=0$ $\Delta=4^2-4.5.1=-4$, dus $z=\frac{-4\pm2i}{10}\Leftrightarrow z=-0,4+0,2i\vee z=-0,4-0,2i$

e) ★* $z^4+z^2=72\Leftrightarrow z^4+z^2-72=0\Leftrightarrow z^2=8\vee z^2=-9\Leftrightarrow z=2\sqrt{2}\vee z=-2\sqrt{2}\vee z=3i\vee z=-3i$

f) ★★ $(2-i)z^2-(1+7i)z-15+10i=0$

$\Delta=(-1-7i)^2-4(2-i)(-15+10i)=-48+14i+80-140i=32-126i=(9-7i)^2$, de wortels zijn

$z=\frac{1+7i+9-7i}{4-2i}=\frac{5}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i}=2+i\ \vee\ z=\frac{1+7i-9+7i}{4-2i}=\frac{-4+7i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i}=-3+2i$

g) ★★* $z^2+\overline{z}^2-(1-3i)z+4\overline{z}-7-i=0$ Stel $z=x+yi$, dan is dus:

$(x+yi)^2+(x-yi)^2-(1-3i)(x+yi)+4(x-yi)-7-i=0$

$\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi+x^2-y^2-2xyi-x-3y+3xi-yi+4x-4yi-7-i=0$

$\Leftrightarrow\left(2x^2-2y^2+3x-3y-7\right)+(3x-5y-1)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-2y^2+3x-3y-7=0\\3x-5y-1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-2\left(\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}\right)^2+3x-3\left(\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}\right)-7=0\\y=\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}\end{cases}\overset{*}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=-3\\y=-2\end{cases}\vee\begin{cases}x=27/16\\y=13/16\end{cases}$

$*: \frac{32}{25}x^2+\frac{42}{25}x-\frac{162}{25}=0\Leftrightarrow16x^2+21x-81=0\Leftrightarrow x=-3\ \vee\ x=\frac{27}{16}$

De oplossingen zijn dus $-3-2i$ en $\frac{27}{16}+\frac{13}{16}i$.

3. ★★ De vergelijking $2z^2-(3+8i)z-m-4i=0$, met $m\in\mathbb{R}$ heeft een reële oplossing. Bepaal de andere (complexe) wortel.

Noem r die reële wortel, dan is $2r^2-(3+8i)r-m-4i=0 \Leftrightarrow (2r^2-3r-m)+(-8r-4)i=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2r^2-3r-m=0 \\ -8r-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=-1/2 \\ m=2 \end{cases}$$

De vergelijking wordt dus $2z^2-(3+8i)z-2-4i=0$ (met $P=\dfrac{c}{a}=-1-2i$).

De oplossingen zijn $-1/2$ en $2+4i$

4. ★★ Gegeven is de complexe functie $f(z)=\dfrac{z^2-3z}{z-i}$.

a) $f(1+2i)=\dfrac{(1+2i)^2-3(1+2i)}{1+2i-i}=\dfrac{-3+4i-3-6i}{1+i}=\dfrac{-6-2i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}=\dfrac{-8+4i}{2}=-4+2i$

b) $f^{-1}(-5+5i)=z \Leftrightarrow \dfrac{z^2-3z}{z-i}=-5+5i \Leftrightarrow z^2-3z=(-5+5i)(z-i) \Leftrightarrow z^2+(2-5i)z-5-5i=0$

$\Delta=(2-5i)^2-4.1.(-5-5i)=-21-20i+20+20i=-1$

De gezochte waarden zijn dus $\dfrac{-2+5i+i}{2}=-1+3i$ en $\dfrac{-2+5i-i}{2}=-1+2i$.

Dit kan genoteerd worden als $f^{-1}(-5+5i)=\{-1+3i,-1+2i\}$ (de inverse is duidelijk geen functie)

5. ★★ Bewijs dat de verzameling complexe getallen $z\in\mathbb{C}$ die voldoen aan $z\cdot\overline{z}-(1-i)\cdot z-(1+i)\cdot\overline{z}-2=0$ in het complexe vlak een cirkel voorstellen met middelpunt $z_M=1+i$ en straal $r=2$.

Noem $z=x+yi$ dan wordt de vergelijking $(x+yi)\cdot(x-yi)-(1-i)\cdot(x+yi)-(1+i)\cdot(x-yi)-2=0$

$x^2+y^2-x+xi-yi-y-x-xi+yi-y-2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-2y-2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=2^2$

Dit is wel degelijk de vergelijking van een cirkel met middelpunt $x=1,\ y=1$ (dus $1+i$) en straal 2 .